

引用格式:张川,赵蓝飞.基于马尔可夫随机场的图像去噪复原方法[J].电光与控制,2018,25(7):96-100. ZHANG C, ZHAO L F. An image restoration method based on Markov random field[J]. Electronics Optics & Control, 2018, 25(7):96-100.

基于马尔可夫随机场的图像去噪复原方法

张川¹, 赵蓝飞²

(1. 中国航空工业集团公司洛阳光电设备研究所, 河南 洛阳 471000;
2. 哈尔滨理工大学测控技术与仪器黑龙江省高校重点实验室, 哈尔滨 150080)

摘要: 由于样本空间的多样性, 势函数模型难以计算, 因此无法得到马尔可夫随机场模型的参数估计。针对该问题, 提出基于麦克劳林级数的马尔可夫随机场参数估计算法。通过二阶麦克劳林级数的展开式得到了势函数的近似值和似然函数的表示式, 推导出极大似然估计对应的非线性方程组, 通过牛顿迭代法得到方程组的解即是马尔可夫随机场的极大似然估计。提出了一种改进的 Gibbs 采样方法, 加快了模拟退火的速度。实验分别从视觉效果、峰值信噪比和稳态迭代次数三方面验证了算法的有效性。

关键词: 图像去噪; 马尔可夫随机场; 麦克劳林级数; 极大似然估计; Gibbs 采样

中图分类号: V271.4; TP391.41 文献标志码: A doi:10.3969/j.issn.1671-637X.2018.07.020

An Image Restoration Method Based on Markov Random Field

ZHANG Chuan¹, ZHAO Lan-fei²

(1. Luoyang Institute of Electro-Optical Equipment, AVIC, Luoyang 471000, China; 2. The Higher Educational Key Laboratory for Measuring & Control Technology and Instrumentations of Heilongjiang Province, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Due to the diversity of sample space, it is difficult to calculate the model of the potential function, and therefore difficult to obtain the parameter estimation of Markov random field model. To solve the problem, a parameter estimation algorithm for Markov random field is presented based on Maclaurin series. This algorithm employs a second-order expansion of Maclaurin series to derive the approximate expressions of the potential function and the likelihood function. The system of nonlinear equations corresponding to the Maximum Likelihood Estimation (MLE) is derived, which is calculated by Newton iteration method, and its solution is the MLE for Markov random field. An updated approach is presented and used to calculate the optimal observed value of the degradation model for noisy images based on Gibbs sampling for accelerating the simulation annealing. Tests have verified the effectiveness of the algorithm from three aspects of visual effect, peak signal to noise ratio, and iteration times.

Key words: image restoration; Markov random field; Maclaurin series; maximum likelihood estimation; Gibbs sampling

0 引言

马尔可夫随机场 (Markov Random Field, MRF) 是一种描述上下文相关性的概率模型。CLIFFORD 和 HAMMERSLEY^[1] 首先提出并证明了 MRF 与 Gibbs 分布的等价性; BESAG^[2] 验证了 Hammersley 理论, 在

此基础上提出多个能量模型; GEMAN 等^[3] 扩展了 MRF 理论, 推导出以最大后验概率作为准则的图像降解模型, 通过模拟退火方法得到最优观测序列。

近年来许多学者在降解模型和模拟退火的基础上, 将 MRF 模型应用于图像恢复、分割领域中。典型的分割算法有混合高斯模型图像分割方法^[4], 区域邻接图的图像分割方法^[5], 分层 MRF 模型图像分割方法^[6]等; 典型的恢复算法有高阶邻域系统图像恢复算法^[7], 小波域隐马尔可夫树模型的图像恢复算法^[8], 模

收稿日期: 2017-04-17

修回日期: 2017-08-15

作者简介: 张川 (1985—), 男, 河南南阳人, 硕士, 工程师, 研究方向为数字图像处理。

糊分类 MRF 图像恢复模型^[9]等。但是这些算法存在一个共同的问题,即手动选取的 MRF 模型的未知参数对图像分割、恢复的结果影响较大。

本文利用麦克劳林级数的二阶展开式推导出 MRF 模型的先验概率的近似表达式和极大似然估计对应的非线性方程组。通过牛顿迭代法得到方程组的解为 MRF 的极大似然估计。提出一种改进的 Gibbs 采样方法,该方法能够有效地提高模拟退火的收敛速度。通过实验,对于噪声图像降解模型进行参数估计,通过改进的 Gibbs 采样得到图像恢复的结果。在人眼主观效果、峰值信噪比(Peak Signal to Noise Ratio, PSNR)及模拟退火达到稳态所需的迭代次数与现有参数估计算法进行分析、比较,验证了本文算法所得参数估计的有效性。

1 马尔可夫随机场

1.1 随机场与邻域系统

用二维离散栅格表示一个容量为 n 的样本集,假设栅格的空域坐标集是 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$,随机场 X 可以表示为 $X = \{X_s, s \in S\}$ 。令 $s = \{i, j\}, N_s$ 为以 s 为中心的邻域系统。用欧氏距离作为度量,邻域系统表达式为

$$N_s \in \{s' \mid \|s - s'\|^2 \leq r, s \neq s'\} \quad (1)$$

式中, r 是邻域系统的阶数。

基团是构成邻域系统的最小单元,根据构成基团的原子个数,基团分为单团、双团、三团等,如图 1 所示。随着邻域系统阶数的增加,基团的类型也不断增加,一阶邻域系统如图 2a 所示^[1],只包含单团和双团;二阶邻域系统如图 2b 所示,包含单团、双团和三团。

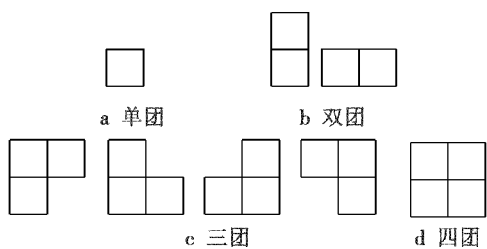
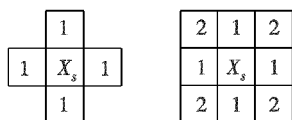


图 1 二阶邻域系统的全部基团类型

Fig. 1 All types of persads in the two-order neighborhood systems



a 一阶邻域系统 b 二阶邻域系统

图 2 一阶、二阶邻域系统

Fig. 2 One- and two-order neighborhood system

1.2 马尔可夫随机场与吉布斯分布

假设随机场 X 的任意一组观测序列是 x ,如果满足如下条件

$$\begin{cases} P(x) > 0 \\ P(x_s | x_{s-s}) = P(x_s | x_{N_s}) \end{cases} \quad (2)$$

则 X 是马尔可夫随机场。Hammersley-Clifford 定理^[1]证明了马尔可夫随机场与吉布斯分布的等价性,定理描述如下:随机场 $X = \{X_s | s \in S\}$ 是马尔可夫随机场的充要条件为观测序列 x 的先验概率满足吉布斯分布,即

$$P(x) = Z^{-1} \exp(-U(x)) \quad (3)$$

式中: $Z = \sum_{x \in \Omega} \exp(-U(x))$ 称为势函数,值为常量; $U(x) =$

$\sum_{c \in C} V_c(x)$ 称为能量函数, $V_c(x)$ 为基团 c 的势。根据 1.1 节所述,对于不同阶的邻域系统,基团的形式也是不同的,对于一阶邻域系统,能量函数表达式是

$$U(x) = \sum_{s \in S} V_1(x_s) + \sum_{s \in S} \sum_{s' \in N_s} V_2(x_s, x_{s'}) \quad (4)$$

1.3 马尔可夫随机场与吉布斯分布

将 MRF 的先验概率表示为含有未知参数的形式

$$P(x | \theta) = \frac{\exp(-U(x | \theta))}{\sum_{x \in \Omega} \exp(-U(x | \theta))} \quad (5)$$

根据极大似然估计理论^[10],马尔可夫随机场极大似然估计等价于

$$\frac{\partial \ln P(x | \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (6)$$

随着样本容量的增大,样本空间越来越大,式(5)分母的值难以计算,所以 MRF 模型势函数的表达式、似然函数表达式和极大似然估计难以计算^[11]。

2 本文算法

2.1 经典的 MRF 模型参数估计算法

为了得到 MRF 模型的参数估计,一些学者提出了多个 MRF 模型的参数估计算法。根据文献[2]可知, BESAG 等提出了利用伪似然函数代替传统的似然函数得到 MRF 伪似然函数的参数估计,但由于局部马尔可夫性的存在,伪似然函数的值不等于似然函数的值。随后 BESAG 改进了伪似然函数方法,提出了编码方法(Coding method),该方法将二维的网格划分为多个不相交的局部邻域系统,有效地逼近了极大似然函数的真值; GEMAN 和 GRAFFIGNE 提出并证明了伪似然函数估计与极大似然函数估计的一致性; DERIN 和 ELLIOTT 提出了最小二乘拟合的方法进行参数估计^[9]; CHANDLER 和 ZHANG 利用均值场近似方法得到局部势函数的表达式。

2.2 基于麦克劳林级数的势函数近似方法

如果直接在整个样本空间求解势函数,算法的时间复杂度相当高。为了得到势函数的近似解,将分子和分母分别展开成二阶麦克劳林级数的形式。

为了方便推导,假设 MRF 模型由单团、双团构成邻域系统,如图 2a 所示。假设单团权值为 0,双团具有同质性和各向异性。基因 $c = \{x_p, x_q\}$, $\Delta_c(x)$ 是 c 的增量函数。增量函数定义如下:当 $x_p = x_q$ 时, $\Delta_c(x) = -1$, 否则 $\Delta_c(x) = 1$ 。样本点的取值范围是 $[0, l-1]$, 样本空间为 Ω , 样本容量为 n 。MRF 模型的能量函数可以表示为

$$U(x|\beta) = \exp\left(-\sum_{C_i \in C} \sum_{c \in C_i} \beta_i \Delta_c(x)\right) \quad (7)$$

式中, C_i 代表不同类型的基因。对于一阶邻域系统,共有四类基因如图 1a 所示。此时,观测序列 x 的先验概率表示为

$$P(x|\beta) = \frac{Z(x|\beta)}{Z_W(x|\beta)} = \frac{\exp\left(-\sum_{C_i \in C} \sum_{c \in C_i} \beta_i \Delta_c(x)\right)}{\sum_{x \in \Omega} \exp\left(-\sum_{C_i \in C} \sum_{c \in C_i} \beta_i \Delta_c(x)\right)} \quad (8)$$

假设 $u = \sum_{C_i \in C} \sum_{c \in C_i} \beta_i \Delta_c(x)$, 根据麦克劳林级数的二阶展开式^[12], 则式(8)分子的二阶展开式可以表示为

$$Z(x|\beta) = \exp(-u) = 1 - u + 0.5u^2 = 1 - \sum_{C_i \in C} \sum_{c \in C_i} \beta_i \Delta_c(x) + 0.5 \left(\sum_{C_i \in C} \sum_{c \in C_i} \beta_i \Delta_c(x) \right)^2 \quad (9)$$

分母的二阶展开式为

$$Z_W(x|\beta) = \sum_{x \in \Omega} (1 - u + 0.5u^2) = l^n - \sum_{x \in \Omega} u + 0.5 \sum_{x \in \Omega} u^2 = l^n - \sum_{C_i \in C} \sum_{c \in C_i} \sum_{x \in \Omega} \beta_i \Delta_c(x) + 0.5 \sum_{x \in \Omega} \left(\sum_{C_i \in C} \sum_{c \in C_i} \beta_i \Delta_c(x) \right)^2 = l^n - S_1 + 0.5S_2 \quad (10)$$

为了得到 $Z_W(x|\beta)$ 的值, 给出一些在 $c_1 \neq c_2$ 成立时有关增量函数的结论

$$\begin{cases} \sum_{x \in \Omega} \Delta_c(x) = l^{n-2} [l(l-1) - l] = l^{n-1} (l-2) \\ \sum_{x \in \Omega} \Delta_c^2(x) = l^{n-2} [l(l-1) + l] = l^n \\ \sum_{x \in \Omega} \Delta_{c_1}(x) \Delta_{c_2}(x) = l^{n-2} (l-2)^2 \end{cases} \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)中, 则其一次项可以表示为

$$S_1 = \sum_{C_i \in C} \sum_{c \in C_i} \sum_{x \in \Omega} \beta_i \Delta_c(x) = n \sum_{x \in \Omega} \Delta_c(x) \sum_{C_i \in C} \beta_i = nl^{n-2} [l(l-1) - l] \sum_{C_i \in C} \beta_i = nl^{n-1} (l-2) \sum_{C_i \in C} \beta_i \quad (12)$$

将式(11)代入式(10)中, 则其二次项可以表示为

$$S_2 = \sum_{x \in \Omega} \left[\sum_{C_i \in C} \sum_{c \in C_i} \beta_i \Delta_c(x) \right]^2 = \sum_{x \in \Omega} \left[\left(\sum_{C_i \in C} \sum_{c_1 \in C_i} \beta_{c_1} \Delta_{c_1}(x) \right) \cdot \left(\sum_{C_j \in C} \sum_{c_2 \in C_j} \beta_{c_2} \Delta_{c_2}(x) \right) \right] = \sum_{C_i \in C} \beta_i^2 \sum_{c_1 \in C_i} \sum_{x \in \Omega} \Delta_{c_1}^2(x) + \left(\sum_{C_i \in C} \beta_i \right)^2 \cdot \sum_{c_1 \in C_1} \sum_{c_2 \in C_2} \sum_{x \in \Omega} \Delta_{c_1}(x) \Delta_{c_2}(x) \quad (13)$$

将式(11)代入式(13), 则二次项可以进一步化简得到

$$S_2 = nl^n \sum_{C_i \in C} \beta_i^2 + nl^{n-2} (n-1) (l-2)^2 \left(\sum_{C_i \in C} \beta_i \right)^2 \quad (14)$$

将式(12)、式(14)代入式(10)得到势函数的表达式为

$$Z_W(x|\beta) = l^n - nl^{n-1} (l-2) \sum_{C_i \in C} \beta_i + 0.5nl^n \times \sum_{C_i \in C} \beta_i^2 + 0.5nl^{n-2} (n-1) (l-2)^2 \left(\sum_{C_i \in C} \beta_i \right)^2 \quad (15)$$

2.3 参数估计

为了得到 MRF 模型的极大似然估计, 采用具有同质性和各项异性的 ising 模型作为 MRF 模型。对式(8)两边取对数, 再对 β 求导并令其等于 0, 得到

$$\frac{\partial Z(x|\beta)/\partial \beta}{Z(x|\beta)} - \frac{\partial Z_W(x|\beta)/\partial \beta}{Z_W(x|\beta)} = 0 \quad (16)$$

将式(12)、式(14)代入式(16), 得到一个四元二次非线性方程组, 形式为

$$f_k(\beta) = \beta_k \left(\sum_{C_i \in C} \sum_{c \in C_i} \beta_i \Delta_c(x) \right)^2 - 2\beta_k \sum_{C_i \in C} \sum_{c \in C_i} \beta_i \Delta_c(x) - \sum_{C_i \in C} \beta_i^2 \cdot \sum_{c \in C_i} \Delta_c(x) - \sum_{C_j \in C} \beta_j^2 \cdot \sum_{c \in C_j} \Delta_c(x) = 0 \quad (17)$$

为了得到式(17)的解, 采用牛顿迭代法^[13]求解方程组的解。根据牛顿迭代法, 迭代过程为

$$\beta^{k+1} = \beta^k - \left(\frac{\partial f(\beta^k)}{\partial \beta} \right)^{-1} f(\beta^k) \quad (18)$$

式中: k 是迭代次数, $\frac{\partial f(\beta^k)}{\partial \beta}$ 是雅可比矩阵的元素。

由于牛顿迭代法是局部收敛的迭代方法, 该方法对初始值要求较高, 即初始值 β^0 充分接近 β^* 时才会保证算法收敛。由于文献[14]证明了伪似然函数估计与极大似然函数估计的一致性, 所以这里采用伪似然函数的方法对 β 进行初始化。

2.4 Gibbs 采样的改进方法及图像去噪复原过程描述

假设空域坐标集为 $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, 根据贝叶斯公式, 对于 $\forall i, j \in n$, 满足如下关系

$$P(x_{s_i} | x_{S-s_i}) = P(x_{s_i} | x_{S-s_i-s_j}, x_{s_j}) = \frac{P(x_{s_i}, x_{s_j} | x_{S-s_i-s_j})}{P(x_{s_j} | x_{S-s_i-s_j})} \quad (19)$$

整理式(19), 将式(2)代入得到

$$P(x_{s_i}, x_{s_j} | x_{S-s_i-s_j}) = P(x_{s_i} | x_{N_i}) P(x_j | x_{N_j-s_i}) \quad (20)$$

假设 Gibbs 采样顺序作用于空域坐标集 S , 根据数学归纳法以及式(20), 可以得到 MRF 的先验概率分布表达式为

$$P(x) = P(x_{s_t}) \prod_{i=1}^{n-1} P(x_{s_i} | x_{u_i}) \quad (21)$$

式中, s_t 代表 Gibbs 采样在 t 时刻作用的空域坐标。 u_s 是 t 时刻的邻域系统, 且满足

$$u_{s_t} = N_{s_t} - \sum_{k=1}^t s_k \quad (22)$$

式中, N_{s_t} 是原始 Gibbs 采样算法在坐标 s_t 处的邻域系统。式(22)表明改进的 Gibbs 采样在 t 时刻的邻域系统是在舍去前 $t-1$ 个时刻所经历的空域位置之后, 剩余的邻域集合所构成的原子集合。图3为本文方法原理框图。

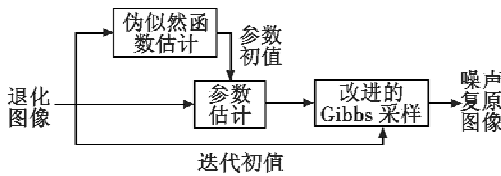


图3 本文方法原理框图

Fig. 3 The diagram of the proposed method

退化图像被并行分割为3个独立的数据流, 前2个数据流用于对 β 进行参数估计, 参数估计结果与第3个数据流共同作为改进的 Gibbs 采样模块的输入, 并进行模拟退火进而得到噪声复原图像。其中, 改进的 Gibbs 采样模块的流程如图4所示。

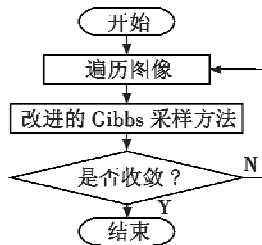


图4 改进的 Gibbs 方法流程图

Fig. 4 The diagram of improved Gibbs method

3 实验结果与数据分析

通过对噪声图像进行恢复, 得到各参数估计算法对应的图像恢复结果。通过人眼主观效果、峰值信噪比和稳态所需迭代次数作为评价指标与其他参数估计算法进行比较, 验证了本文算法的有效性。硬件平台为 Pentium Dual-Core 2.70 GHz 处理器, 2 GB 内存, 软件系统为 Windows XP SP3, VC 6.0, 图像是像素深度为 24 的位图文件。

采用像素尺寸为 512×512 的标准数字图像 Lena 和 Cameraman 作为输入, 叠加均值为 0、标准差为 80 的高斯白噪声, 如图5所示。

利用单团系数为 0、具有同质性及各向异性的ising模型作为MRF的能量模型, 通过改进的 Gibbs 采样求

解降解模型的最优观测序列。设定稳态能量阈值是 0.05, 该阈值是模拟退火使系统达到稳态所需的收敛条件, 即当前次迭代与本次迭代间的能量差值小于该阈值时, 退火过程结束, 系统达到稳态。图6为各算法对应的 PSNR 曲线, 曲线横坐标是迭代次数, 纵坐标是对应的峰值信噪比。



图5 原始图像及噪声图像

Fig. 5 Original images and noise images

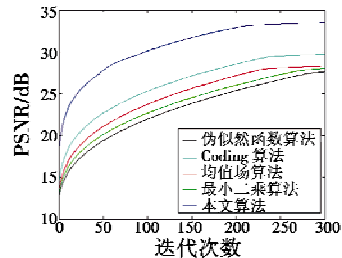


图6 各算法对应的信噪比曲线

Fig. 6 SNR curves of different algorithms

由图6可知, 在迭代次数相同的情况下, 本文算法对应的峰值信噪比最高。随着迭代次数增加, 所有算法的 PSNR 曲线均呈现上升的趋势, 本文算法对应的 PSNR 曲线上升速度最快, 达到稳态所需的迭代次数最小, 收敛速度明显优于其他算法。图像恢复结果如图7所示。从图中可知, 伪似然函数算法、Coding 算法、均值场算法、最小二乘算法得到的恢复图像噪声较大, 本文算法图像恢复质量较高。

表1是各种算法所得到的参数估计, 系统达到稳态时的峰值信噪比和迭代次数。从表1可以看出, 上述几种参数估计方法中, 本文参数估计算法恢复图像的峰值信噪比高于其他几种算法, 改进的 Gibbs 采样算法对应的稳态所需要的迭代次数小于其他方法。



图7 不同算法对应的图像恢复结果

Fig. 7 Image restoration results of different algorithms

表1 不同算法对应的参数估计、峰值信噪比、迭代次数

Table 1 The parameter estimation, peak SNR, iterations of different algorithms

算法	图像序号	$\beta_{(i-1,j)}$	$\beta_{(i+1,j)}$	$\beta_{(i,j-1)}$	$\beta_{(i,j+1)}$	PSNR/dB	迭代次数
伪似然函数算法	图 7a	0.74	0.57	1.23	1.03	27.25	274
		1.44	0.48	1.54	0.85	26.17	258
Coding 算法	图 7b	0.68	0.62	1.31	0.89	29.32	232
		1.54	0.57	1.41	1.12	28.45	220
均值场算法	图 7c	0.59	0.48	1.16	1.21	27.89	228
		1.25	0.58	1.27	0.78	27.21	218
最小二乘算法	图 7d	0.88	0.74	1.53	1.28	27.67	267
		1.76	0.58	1.24	0.61	26.49	255
本文算法	图 7e	0.38	0.27	0.85	0.78	33.05	207
		0.87	0.24	1.01	0.35	32.37	202

4 结论

由麦克劳林级数可以近似得到 Gibbs 分布的先验概率表达式,该方法能够解决样本空间的多样性给极大似然估计带来的困难。通过对含有噪声的图像进行图像恢复,将本文算法与伪似然函数算法、Coding 算法、均值场算法和最小二乘算法进行比较,验证了本文算法获得的 MRF 模型参数估计值性能优于传统的参数估计算法。通过分析退火所需迭代次数,验证了改进的 Gibbs 采样收敛速度较快。

参考文献

- [1] HAMMERSLEY J M, CLIFFORD P. Markov field on finite graphs and lattices[R]. Oxford: Oxford University, 1971.
- [2] BESAG J. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems[J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1974, 36(2):192-236.
- [3] GEMAN S, GEMAN D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions, and the Bayesian restoration of images[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(6):721-741.
- [4] 朱峰,罗立民,宋余庆,等. 基于自适应空间邻域信息高斯混合模型的图像分割[J]. 计算机研究与发展, 2011, 48(11):2000-2007.
- [5] LI Q X, ZHAO J Y. MRF energy minimization for unsupervised image segmentation[C]//Proceedings of Natural Computation, Ningbo, 2009:14-16.
- [6] 张学良,肖鹏峰,冯学智. 基于图像内容层次表征的遥感图像分割方法[J]. 中国图象图形学报, 2012, 17(1):142-149.
- [7] ZHAO B, ZHANG W. A novel image deblurring method based on high-order MRF prior[C]//Fourth International Workshop on Advanced Computational Intelligence, IEEE, 2011:436-440.
- [8] SUN J, GU F, ZHANG S. Hidden Markov Bayesian texture segmentation using complex wavelet transform[J]. IEEE Vision, Image and Signal Processing, 2004, 151(3):215-223.
- [9] DERIN H, ELLIOTT H. Modeling and segmentation of noisy and textured images using Gibbs random fields[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1987, 9(1):39-55.
- [10] 吴锡,周激流,何建新. 采用非局部主成分分析的极大似然估计图像去噪[J]. 光子学报, 2011, 40(12):1827-1832.
- [11] LI S Z. Markov random field modeling in image analysis [M]. 3rd ed. London: Springer Verlag Press, 2009:124-142.
- [12] WU B, WANG Y, CAO X Y, et al. Resolving and parameter estimation of nonsynchronous sampling pulse signals based on Taylor series expansion[C]//Proceedings of Communication Technology, Nanjing, 2011:793-796.
- [13] 陈传森,胡宏伶,雷蕾,等. 非线性方程组的 Newton 流线法[J]. 计算数学, 2012, 34(3):235-258.
- [14] 孔莹莹,周建江. 基于 Gibbs-Markov 随机场的连通聚类的 SAR 图像恢复[J]. 航空学报, 2010, 31(2):310-317.