

引用格式: 丁宸宇, 岳瑞华, 李远东, 等. 基于时间序列模型的残差控制图在 MAP 中的应用[J]. 电光与控制, 2018, 25(10): 100-103, 107. DING C Y, YUE R H, LI Y D, et al. Application of time-series model based residual control chart in MAP[J]. Electronics Optics & Control, 2018, 25(10): 100-103, 107.

基于时间序列模型的残差控制图在 MAP 中的应用

丁宸宇, 岳瑞华, 李远东, 顾凡
(火箭军工程大学, 西安 710025)

摘要: 针对在 MAP 中, 测控设备高频率地采集数据导致数据呈现时序依赖性, 难以满足传统控制图要求的数据间相互独立的问题, 提出根据时间序列原理用受控状态下观测数据估计模拟出自回归模型 $AR(p)$, 求出服从独立同分布的观测值残差, 建立控制图。为进一步说明残差控制图的有效性, 通过真实数据求出残差控制图并与休哈特控制图进行比较, 结果表明, 残差控制图的虚假警报明显减少。

关键词: MAP; 导弹综合测试设备; 残差控制图; 时间序列; 自相关过程; SPC

中图分类号: TP29 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-637X.2018.10.020

Application of Time-Series Model Based Residual Control Chart in MAP

DING Chen-yu, YUE Rui-hua, LI Yuan-dong, GU Fan
(Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China)

Abstract: In the Measurement Assurance Program (MAP), due to the high-frequency data acquisition of the measurement and control equipment, the data may present dependency on timing sequence, and can hardly meet the data independence requirements of the traditional control chart. It is proposed to simulate the auto-regression model $AR(p)$ with the observation data in the constrained state according to the timing sequence principle, the residual of the observation value is calculated, which is independently and identically distributed, and the control chart is set up. To further illustrate the validity of the residual control chart, real data is used to obtain the residual control chart and then it is compared with the Shewhart control chart. The results show that the occurrence of the false alarm of the residual control chart is significantly reduced.

Key words: MAP; integral test equipment of missile; residual control chart; timing sequence; auto-correlation process; SPC

0 引言

基于 MAP (Measurement Assurance Program) 的导弹综合测试设备的计量保证方案解决了传统计量中逐级向上溯源以及大型设备的原位计量问题, 而且使计量检定过程处于闭环状态, 保证了测试的精度与可靠性, 满足了导弹时刻遂行作战任务的需求。

在 MAP 方案中, 为了计算核查标准值的统计特性, 用核查标准值的标准偏差来表征其随机误差大小, 因此需要每两次测量之间的时间间隔足够长, 以确保测量的观测值具有完全独立性。只有这样, 才能对核查标准值的测量进行统计计算^[1]。统计过程控制 (SPC) 是一种

用于监视和管理过程质量的工具集合, 控制图是 SPC 工具箱中最流行、最有效的工具。传统 SPC 方案都是假设观测结果相互独立, 基于这样的假设, 休哈特控制图已经广泛应用于各个行业。对于具有自相关现象的数据, 传统控制图不能有效地进行工作, 会误导错误判断监测状态, 而休哈特控制图则会因为上下控制限过窄, 产生大量的虚发警报, 使控制图的使用效果大为降低^[2-3]。文献[4]分析的 235 个实际案例, 分别使用传统控制图方法和考虑了序列相关的控制图方法, 前者相较于后者超出控制限的数据点多了 584 个, 并且后者超出控制限的数据点中有 33 个点是前者没有检测出来的^[4]。

自相关过程广泛地存在于各种自动化生产。学术界具有自相关性的数据处理主要有模型和无模型两种方法^[5-6]。其中: 有模型的处理方式是利用受控数据估计出正确的时间序列模型, 求出每一个观测值的残

收稿日期: 2017-12-14

作者简介: 丁宸宇 (1994 —), 男, 安徽合肥人, 硕士生, 研究方向为计量检定。

差,用求得的残差建立控制图;无模型方法就是利用基平策略和对数据分组求均值,但是并不能完全消除时序相关,增大样本容量可以降低时序相关,但是会导致失控时平均步长增大,无法及时预警。

现有文献大都是用事先假设的时间序列结合残差控制图来解决自相关过程中出现的控制问题^[7-10],继而进行分析,这显然不符合工程应用实际。就本文中的具体问题来说,时间序列模型是无法事先知道的,必须根据稳定状态下的观测值模拟出时间序列模型。针对以上特点,本文提出依据受控状态下的数据估计出时序模型,根据时序模型求出残差,建立控制图,并与传统休哈特控制图进行对比。

1 控制图基本原理

1.1 休哈特控制图

休哈特控制图对较大的漂移和异常点检测效率较高,而且操作简便,因此得以广泛使用。

记 $\{x_i\}$ 为唯一连续时间采集的样本数据,其中, $i=1,2,\dots,n$,服从正态分布 (μ_0, σ_0^2) 且彼此间相互独立。当且仅当存在偶然原因导致波动时,时刻 i 的观测值可表示为

$$x_i = \mu_i + \varepsilon_i \quad (1)$$

式中: μ_i 表示过程均值; $\varepsilon_i \sim i, d(0, \sigma_\varepsilon^2)$, 当且仅当存在偶然原因导致波动时,系统仍处于受控状态,输出依然可认为是相互独立的。即

$$\text{cov}(x_i, x_{i-t}) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \sigma^2 & t = 0 \end{cases} \quad (2)$$

在得到 n 个样本观测值后,可得其样本均值 \bar{x} 以及方差 S_x^2 , 在 μ_0, σ_0 已知的情况下, $\bar{x} \sim N(\mu_0, \sigma_0^2/n)$, 则样本均值 \bar{x} 落在 $[\mu_0 + Z_{\alpha/2}(\sigma_0/\sqrt{n}), \mu_0 + Z_{\alpha/2}(\sigma_0/\sqrt{n})]$ 的概率为 $1 - \alpha$ 。其中,控制限可以设置为上述区间,即

$$\begin{cases} U_{CL} = \mu_0 + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \\ L_{CL} = \mu_0 - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \end{cases} \quad (3)$$

当样本大小为 1,过程标准差需要通过前后两个观测值的极差来计算,即

$$\bar{R}_s = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} R_{sj} \quad (4)$$

式中, R_{sj} 表示第 j 个移动极差,大小为 $|x_j - x_{j-1}|$ 。可以证明 $E(R_s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$, $\sigma_{R_s} = \sqrt{2 - \frac{4}{\pi}}$, 所以 $\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \bar{R}_s$ 。

实际应用中 $Z_{\alpha/2}$ 取值为 3, 所以式(3)变为

$$\begin{cases} U_{CL} = \bar{X} + 2.66 \bar{R}_s \\ L_{CL} = \bar{X} - 2.66 \bar{R}_s \end{cases} \quad (5)$$

1.2 控制图判异准则

控制图的主要作用是判断统计过程是否受控,在过程控制当中,可能存在过程处于稳定状态,但是控制图却显示出异常报警,这被称为第 I 类错误,犯此类错误的概率记为 σ ; 同时也存在另一种错误,即过程控制已经失控,但是控制图却没有发出警报,这类错误被称为第 II 类错误,犯此类错误的概率记为 β 。一般认为小概率事件不会发生,所以 σ 的取值特别小,通常取为 0.002 7。在此种概率下,“点出界即异常”。犯第 I 类错误的概率减小会导致犯第 II 类错误的概率增大,此时认为只要点在控制图中不是随机排列即判定控制图异常。所以,判断控制图异常的两条准则如下:1) 点出界即异常;2) 点没有出界但排列不随机即异常。

2 残差控制图基本原理

2.1 时间序列模型理论

自回归 AR(p) 模型是时间序列模型中使用最为广泛的模型,可表示为

$$\begin{cases} \hat{Y}_i = \phi_1 Y_{i-1} + \phi_2 Y_{i-2} + \dots + \phi_p Y_{i-p} \\ Y_i = \hat{Y}_i + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim i, d(0, \sigma_\varepsilon^2) \end{cases} \quad (6)$$

式中: Y_i 表示 i 时刻的观测值; \hat{Y}_i 表示在 i 时刻由 AR(p) 模型估计的值; ε_i 表示两者之间的误差。

在不失一般性情况下,以一阶自回归 AR(1) 模型具体阐述残差控制图,即

$$Y_i = \phi Y_{i-1} + (1 - \phi)\mu + \varepsilon_i \quad \varepsilon_i \sim i, d(0, \sigma_\varepsilon^2) \quad (7)$$

式中: μ 为过程均值; $|\phi| < 1$ 是模型保持稳定的必要条件。

传统质量控制图应用于自相关过程时,会因监控限过窄导致虚假警报频发^[11-12]。考虑使用满足统计量独立性假设的残差控制图。其中过程残差 e_i 的表达式为

$$\begin{aligned} e_i &= Y_i - \hat{Y}_{i/i-1, i-2, \dots} = Y_i - \hat{\mu} - \hat{\phi}(Y_{i-1} - \hat{\mu}) = \\ & Y - E(\hat{Y}_{i/i-1, i-2, \dots}) \approx \varepsilon_i \end{aligned} \quad (8)$$

式中,参数 μ 和 ϕ 由统计过程处于受控状态下的样本数据估计得到,而式(8)成立的条件就是这两个参数必须估计准确。

如果在过程中出现异常波动导致过程均值出现偏移,过程均值将会随时间发生改变。式(8)变为

$$\begin{aligned} Y_i &= \mu + \phi(Y_{i-1} - \mu) + \varepsilon_i \\ \Downarrow \\ Y_i &= \mu_i + \phi(Y_{i-1} - \mu_{i-1}) + \varepsilon_i = \\ & \mu_i + \phi Y_{i-1} - \phi \mu_{i-1} + \varepsilon_i \quad (9) \end{aligned}$$

假设在 $t-1$ 时刻过程均值因异常波动变为 $\mu + \delta\sigma$, 那么变动将发生在 $i=t-1$ 和 $i=t$ 之间,残差序列 e_i 为

$$e_{t-1} = Y_{t-1} - \hat{Y}_{t-1} = (\mu + \delta\sigma) + \phi Y_{t-1} - \phi \mu + \varepsilon_i -$$

$$[\mu(1-\phi) + \phi Y_{t-1}] = \delta\sigma_y + \varepsilon_t \quad (10)$$

$$e_t = Y_t - \hat{Y}_t = [\mu + \delta\sigma_y + \phi Y_t - \phi(\mu + \delta\sigma_y) + \varepsilon_{t+1}] - [\mu(1-\phi) + \phi Y_t] = (1-\phi)\delta\sigma_y + \varepsilon_t \quad (11)$$

综上,可得残差序列 e_i 为

$$e_i = \begin{cases} \varepsilon_i & i < t-1 \\ \delta\sigma_y + \varepsilon_i & i = t-1 \\ (1-\phi)\delta\sigma_y + \varepsilon_i & i > t-1 \end{cases} \quad (12)$$

分析式(10)、式(11)可知,在均值发生变化后,第一个 $E(R_i)$ 为 $\delta\sigma_y$,但是自相关过程随之对均值变化做出反应, $E(R_i)$ 变为 $(1-\phi)\delta\sigma_y$ 。

由上文知残差 $e_i \sim i, i, d(\mu, \sigma^2)$,所以可以用休哈特控制图对残差进行控制,建立残差—休哈特控制图,其满足

$$\begin{cases} L_{CL} = -K_R\sigma_e \\ C_L = 0 \\ U_{CL} = K_R\sigma_e \end{cases} \quad (13)$$

通过残差建立的控制图因数据间已经没有相关性故不再适用一般控制图的判异规则。残差控制图的判异准则仅在超出控制限的情况下才予以报警。

2.2 自相关过程及其辨识

自相关过程也称作序列相关,指的是在自动化条件下采集到的观测值时间间隔太短,导致前后质量特性存在相互依赖。自相关系统的辨识通常采用绘制自相关函数(ACF)和偏自相关函数(PACF)的方式来甄别。

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_{i+k} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \quad \forall 0 < k < n \quad (14)$$

式中: $\hat{\rho}_k$ 表示自相关系数; n 代表样本容量; k 表示滞后期; \bar{X} 代表样本算数平均值; X 为样本观测值。

式(14)是用来计算自相关系数大小的,其中, $\theta_k \in [-1, 1]$, $|\theta_k|$ 离1越近,表示相关的程度越大。

$$\hat{\theta}_{kk} = \frac{\hat{D}_k}{\hat{D}} \quad \forall 0 < k < n \quad (15)$$

$$\text{式中: } \hat{D} = \begin{vmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{k-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \cdots & \hat{\rho}_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{k-1} & \hat{\rho}_{k-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}; \hat{D}_k = \begin{vmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \cdots & \hat{\rho}_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{k-1} & \hat{\rho}_{k-2} & \cdots & \hat{\rho}_k \end{vmatrix};$$

$\hat{\theta}_{kk}$ 为偏自相关系数,表示在排除了其他变量的影响之后两个变量之间的相关系数。

3 实验分析

3.1 模型建立和参数估计

从采用 MAP 定期校准的某大型测控设备的标准

28 V 电压源记录中截取数据,该标准电压源在受控的情况下,每周对其进行3次检定,共收集到150周的电压表校准观测值,其时序图用 Minitab 绘制,如图1所示。横坐标表示样本序列,纵坐标表示标准电压观测值大小。从时序图中并不能观测出数据具有明显相关性。

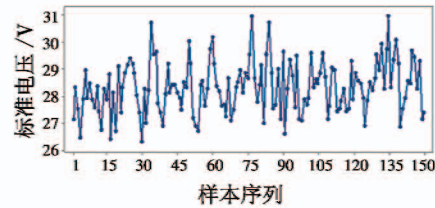


图1 观测值时序图

Fig.1 Sequence diagram of observed value

选取前150个数据,根据 Minitab 软件绘制样本序列的自相关函数(ACF)图和偏自相关函数(PACF)图,以检验样本数据的自相关性,如图2、图3所示。

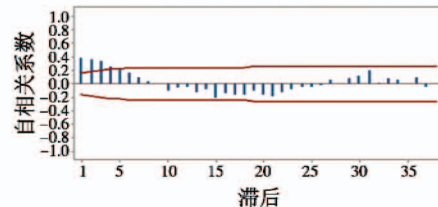


图2 观测值自相关函数

Fig.2 ACF of the observed value

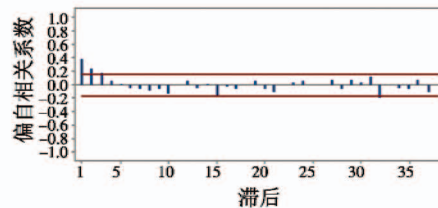


图3 观测值偏自相关函数

Fig.3 PACF of the observed value

样本 ACF 图显示延迟4阶后,自相关系数都收敛到两倍标准差范围以内,且呈余弦函数形式指数衰减到零值上下波动,表明样本数据是一个短期的自相关。鉴于样本数量以及随机性,样本的偏自相关系数不会和理论上的偏自相关系数一样,严格意义上收敛到0,本文的样本偏自相关系数2阶显著不为0,2阶以后近似为0。如果样本的自相关系数在 d 阶明显超过两倍标准差,而后95%都收敛到两倍标准差范围之内,并且由非零的自相关系数收敛到两倍标准差范围之内且波动十分迅速,则视为截尾,可以判定为 PACF 截尾。另外,根据 ACF 拖尾综合判定样本值模型为 $AR(p)$ 模型。

对样本值做 ADF 检验,其在含截距项和趋势项以及只含趋势项的检验中,ADF 值均小于显著水平5%单位根临界值,所以样本值序列趋势平稳。根据 PACF 函数图2阶截尾,可以初步判断模型是 $AR(2)$ 模型,根

据最小二乘法从最大滞后阶数 4 阶开始建立模型,并分别记录 AIC,SC 和 HQ 准则值的大小,如表 1 所示。

表 1 信息准则值

Table 1 Value of information criteria

AR(p)	参数数值		
	AIC 准则	SC 准则	HQ 准则
AR(1)	3.035	3.075	3.051
AR(2)	2.931	2.992	2.956
AR(3)	2.948	3.030	2.981

上述 3 个准则的数值越小说明模型越好。从表 1 中可以看出,AR(2)模型 3 个准则的参数值最小,所以选择 AR(2)模型。具体模型为

$$\hat{Y}_i = 0.2865Y_{i-1} + 0.3376Y_{i-2} + 11.342 \quad (16)$$

对估计出的模型的残差使用拉格朗日乘数(LM)检验,结果见表 2。

表 2 LM 检验结果

Table 2 LM test result

F-stastic	结果	
	0.355	Prob 0.706
Obs * R-squard	0.731	Prob 0.693

LM 的统计量 Obs * R-squard 对应的 P(Prob) 值为 0.693,在 5% 的显著水平下不拒绝原假设,即残差序列不存在相关性。

根据估计出的模型绘出残差序列的 ACF 和 PACF,如图 4、图 5 所示。

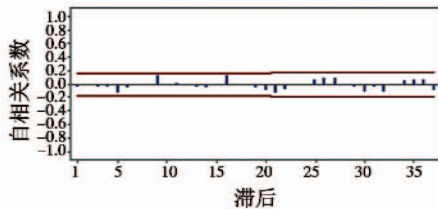


图 4 残差自相关函数

Fig.4 ACF of residual analysis

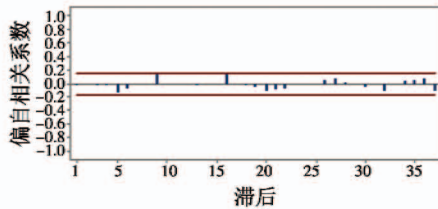


图 5 残差偏自相关函数

Fig.5 PACF of residual analysis

由图 4、图 5 可以明显看出,自相关系数和偏自相关系数都在两倍标准差内,而且在零值附近波动,所以残差序列可以看作是一个白噪声序列。

综上,通过时间序列估计的模型适当,拟合效果较好。

3.2 分析验证

如果忽视观测值之间的自相关过程,直接采用常

规的休哈特控制图对观测值进行处理,根据式(4)与式(5)得到单值控制图的控制限为: $U_{CL} = 30.7553$, $C_L = \bar{X} = 28.2687$, $L_{CL} = 25.7822$ 。依据此控制限做图,如图 6 所示。

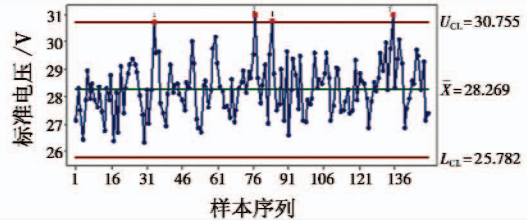


图 6 单值控制图

Fig.6 Single value control chart

根据式(11)计算出残差序列的数值,而后由式(15)得到残差控制图的控制限大小为: $U_{CL} = 3$, $C_L = \bar{X} = 0$, $L_{CL} = -3$ 。依据此控制限做图,如图 7 所示。

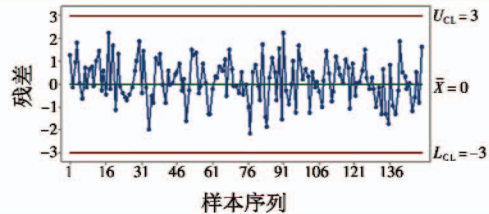


图 7 残差控制图

Fig.7 Residual range control chart

由图 6 可以观察出有 4 个点明显超出控制限,根据休哈特控制图判断稳定的准则,一个点出界即为异常,判断该过程失控,但是该控制图中的数据是在测控设备处于稳定状态下获得的,所以该控制图发出的警报为虚假警报。观察图 7,发现没有点超出控制限,残差控制图的判稳准则是只要没有点出界即处于受控状态,即判断该过程处于受控状态,没有出现虚假警报。结果表明对存在自相关的数据使用残差控制图是有效的。

4 结束语

本文针对采用 MAP 的大型自动化测试设备获得的校准值,因校准值本身存在自相关性,导致传统休哈特控制图上下间距过小,出现虚假警报过多的问题,提出满足传统休哈特控制图数据间相互独立假设的残差控制图。根据时间序列模型,利用受控状态下的观测值辨识并估计出自回归模型。结合实例计算出数据的残差并绘制残差控制图与传统控制图对比,其结果有力地说明在考虑数据自相关性后,残差控制图有效地减少了非异常原因造成的波动,减少了虚假警报,同时也为其他采用 MAP 的项目建立过程参数提供了一种可以参考的方法。

(下转第 107 页)

5 结论

本文针对某空间微型光学载荷主结构质量过大、基频过低和重力条件下敏感载荷安装位置静力变形过大的问题,对主结构进行优化设计,并对优化设计后的主结构和光学设备进行了力学试验,对试验后的结构进行了检测,结论如下:1) 根据总体设计指标,初步设计了主结构方案,工程分析表明,初步设计的主结构方案质量为39.96 kg,基频为11.18 Hz,敏感载荷安装位置变形为0.186 2 mm,指标均远优于总体指标;2) 建立微型光学载荷主结构多目标优化数学模型,并对结构进行了优化设计,优化结果显示,所有指标均满足设计要求,且质量降低了68.71%;3) 工程分析表明,主结构质量、基频和力条件下光学载荷安装位置静力变形结果良好,所用优化设计方法有效可行,可为后续其他结构设计提供一定的借鉴;4) 试验表明,所设计的光学载荷主支撑结构具有优良的力学强度和尺寸稳定性,能够有效保证其上端光学载荷在空间环境中的优良性能。

参考文献

- [1] 杨新峰,赵志明,邓卫华,等. 小卫星随机振动特性分析与试验验证方法探讨[J]. 航天器环境工程,2014(4):357-362.
- [2] 谭陆洋,王栋,孔林,等. 基于蜂窝加肋板结构参数匹配抑制光学卫星随机响应[J]. 光学精密工程,2016(2):372-380.
- [3] 李林,王栋,谭陆洋,等. 微小卫星天线与飞轮共支撑结构优化设计与试验[J]. 红外与激光工程,2016(10):199-205.
- [4] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, 71(2):197-224.
- [5] DIAZ A R, BENDSØE M P. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method[J]. Structural Optimization, 1992, 4(1):17-22.
- [6] 李林,王栋,杨洪波,等. 空间相机柔性减振支撑结构的优化设计[J]. 光学精密工程,2016(7):1677-1684.
- [7] 张新洁,颜昌详,谢涛. 星载光学遥感器调焦机构的设计[J]. 光学精密工程,2009(11):2757-2761.
- [8] 程曦,姚林泉,沙峰. 基于虚拟激励法的车—轨—桥耦合系统的随机振动响应分析[J]. 力学季刊,2015,36(2):261-269.
- [9] 胡杰. 基础激励下基于模态叠加法的谐响应分析[J]. 计算机辅助工程,2014,23(6):94-96.
- [10] 冯伟. 基于变密度法的箱型梁结构拓扑优化研究[D]. 太原:中北大学,2014.
- [11] 夏天翔,姚卫星. 连续体结构拓扑优化方法评述[J]. 航空工程进展,2011(1):1-11,55.
- [12] 邓扬晨,张卫红,刘晓欧,等. 拓扑优化设计中刚度与密度关系的一种力学模型[J]. 航空计算技术,2004,(1):1-4.
- [13] 刘林华,辛勇,汪伟. 基于折衷规划的车架结构多目标拓扑优化设计[J]. 机械科学与技术,2011,30(3):382-385.

(上接第103页)

参考文献

- [1] 王立吉. 计量质量保证方案[M]. 北京:中国计量出版社,1992:62-69.
- [2] ABDALJBBAR B A, RIAZ D M, ABBASI S A. On model selection for autocorrelated processes in statistical process control[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2017, 33(4):867-882.
- [3] 孙静. 自相关过程的残差控制图[J]. 清华大学学报:自然科学版,2002,42(6):735-738.
- [4] ALWAN L C. The problem of misplaced control limits[J]. Journal of the Royal Statistical Society, 1995, 44(3):269-278.
- [5] MONTGOMERY D C, MASTRANGELO C M. Some statistical process control methods for autocorrelated data[J]. Quality Control & Applied Statistics, 1991, 36(3):569-570.
- [6] RUNGER G, WILLEMAIN T. Batch-means control charts for autocorrelated data[J]. IIE Transactions, 1996, 28(6):483-487.
- [7] LI S Y, WANG W J. A study on the performance of lambda control chart for autocorrelated processes[C]//International Conference on Control Science and Systems Engineering (EI), 2016:124-127.
- [8] 王莉,赵渊,杨显明,等. 基于时间序列模型与残差控制图的兰州市空气质量研究[J]. 高原气象,2015,34(1):230-236.
- [9] ALWAN L, ROBERTS H. Time-series modeling for statistical process control[J]. Journal of Business & Economic Statistics, 1988, 6(1):87-95.
- [10] ZHANG N F. Detection capability of residual control chart for stationary process data[J]. Journal of Applied Statistics, 1997, 24(4):475-492.
- [11] WARDELL D G, MOSKOWITZ H, PLANTE R D. Control charts in the presence of data correlation[J]. Management Science, 1992, 38(8):1084-1102.
- [12] LIN W S W, ADAMS B M. Combined control charts for forecast-based monitoring schemes[J]. Journal of Quality Technology, 1996, 28(3):289-301.