

引用格式:雷章勇,彭志炜,张俨,等.基于S函数的改进变步长LMS自适应算法[J].电光与控制,2018,25(10):52-56. LEI Z Y, PENG Z W, ZHANG Y, et al. An improved variable step-size LMS adaptive algorithm based on S function[J]. Electronics Optics & Control, 2018, 25(10):52-56.

基于S函数的改进变步长LMS自适应算法

雷章勇, 彭志炜, 张 俨, 赵雪娇
(贵州大学电气工程学院, 贵阳 550025)

摘要: 变步长LMS自适应滤波算法通过构造步长因子来进行权值调整,使算法具有较快的收敛速度和较小的稳态误差。为了进一步改善算法的性能,提出一种基于S函数的改进变步长LMS自适应算法。该算法基于S函数的曲线特点,通过对函数的平移变换得到算法步长因子的表达式。为满足算法的可控性和抗干扰能力的要求,通过引入可控参数和误差向量自相关值来调整步长因子,得到算法的最终模型。详细分析了模型中各参数的取值对步长因子和滤波性能的影响。与现有算法的仿真结果对比表明,该算法在收敛速度、稳态误差及抗干扰能力方面的性能均有了很大的改善。

关键词: LMS自适应滤波; S函数; 改进变步长; 滤波性能

中图分类号: TP15 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-637X.2018.10.011

An Improved Variable Step-Size LMS Adaptive Algorithm Based on S Function

LEI Zhang-yong, PENG Zhi-wei, ZHANG Yan, ZHAO Xue-jiao
(School of Electrical Engineering, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract: The variable step-size LMS adaptive filtering algorithm adjusts the weights by constructing a step-size factor, so that the algorithm has faster convergence speed and smaller steady-state error. In order to further improve the performance of the algorithm, an improved variable step-size LMS adaptive algorithm based on S function is proposed. By using the curve characteristics of S function, the algorithm obtains the expression of the step-size factor by translation transformation of the function. According to the requirement of controllability and anti-interference ability, controllable parameters and error vector autocorrelation values are introduced to adjust the step-size factor, and the final model is obtained. An analysis is made to the influence of the values of these parameters on the step-size factor and the filtering performance. The simulation results show that, compared with the existing algorithms, the algorithm has better performance on convergence speed, steady-state error and anti-interference ability.

Key words: LMS adaptive filtering; S function; improved variable step-size; filtering performance

0 引言

在信号处理中,引入滤波器可在一定程度上削弱或消除噪声信号的影响。对于滤波器的应用,往往希望在实现滤波、平滑或者预测等任务的同时,实时跟踪和适应系统或环境的动态变化,这就需要滤波器的参数可以实时变化更新。自适应滤波器通常根据采样信

号的变化不断更新滤波器的参数或者调整滤波器的结构,实现从含噪声信号中提取或者恢复有效的原始信号^[1]。作为自适应滤波器设计的一个关键环节,自适应滤波算法常用的计算准则是使滤波器实际输出与期望输出响应之间的均方误差为最小,即最小均方误差准则(MMSE)。

由WIDROW提出的最小均方误差(LMS)算法是一种自适应算法,因算法简单、计算量小、鲁棒性强、易于实现的特点^[2-3],被广泛应用于通信、系统辨识、回波消除和自适应谱线增强等领域^[4-5]。该算法基于MMSE准则,通过步长因子的选择实现对权值的更新,以获得最优权值。在这个过程中对步长因子的取值影

收稿日期:2017-11-13

基金项目:贵州省电力系统智能化技术重点实验室建设项目(Z103188)

作者简介:雷章勇(1989—),男,贵州毕节人,硕士生,研究方向为电力系统安全与稳定控制。

响算法各方面的性能,包括收敛速度、稳态误差、对时变系统的跟踪能力以及抗噪声干扰能力等^[6-8]。根据对步长因子构造方式的不同,LMS 算法主要分为传统定步长 LMS 算法和变步长 LMS 算法。

传统定步长 LMS 算法将步长因子取为固定值进行权值更新。在此过程中,如果对步长因子取值不当将会使算法的性能受到影响。若步长因子取值较大,在初始阶段,算法的收敛速度较快,但会在接近稳态时产生较大的稳态误差;反之,若步长因子取值较小,算法在收敛时稳态误差也较小,但会降低算法的收敛速度^[9-11]。可见,传统定步长 LMS 算法中步长因子的取值难以同时满足算法对收敛速度与稳态误差两个性能指标的要求,因此许多文献^[12-15]提出了变步长 LMS 算法。通过建立误差与步长因子之间的非线性函数关系进行权值更新,该方法可兼顾收敛速度与稳态误差,有效弥补定步长 LMS 算法的不足。文献[12]提出一种新的变步长自适应滤波(SVSLMS)算法,可获取较快的收敛速度和跟踪速度,但由于在收敛阶段步长的变化较快,从而造成稳态误差较大。针对文献[12]算法的不足,文献[13]提出一种新的变步长自适应滤波算法,该算法给出了新的步长因子调整函数,使得步长在误差接近零处具有缓慢变化的特性,减小了稳态误差。文献[14]提出的变步长 LMS 滤波算法克服了 S 函数变步长 LMS 算法稳态阶段步长变化较大的缺陷,该算法在初始阶段或系统发生时变阶段具有较大的步长,且稳态时步长较小。文献[15]提出一种新的基于箕舌线的变步长 LMS 算法,该算法对步长因子的计算较为简单,同时算法滤波效果好。

通过对上述文献进行分析可以看出,改进变步长 LMS 算法对步长因子的调整原则都是要求在初始阶段或系统发生时变后,步长能够取得较大值,使得算法具备较快的收敛速度或对时变状态下信号的快速跟踪;而在收敛阶段则要求步长变化较慢且取值较小,以减小稳态误差和避免稳态失调。根据上述现有算法理论,为进一步改善变步长 LMS 自适应滤波算法的性能,本文基于 S 函数曲线特点提出一种新的改进变步长 LMS 自适应滤波算法,该算法能够兼顾收敛速度和稳态误差,且具有一定的抗干扰能力。

1 LMS 自适应滤波算法

自适应滤波算法原理如图 1 所示。其中, $x(n)$ 和 $y(n)$ 为输入信号和输出信号, $v(n)$ 为噪声信号, $d(n)$ 为期望输出信号, $e(n)$ 为误差估计信号。该算法最广泛使用的算法形式为下降算法,实现方式主要有自适应梯度算法和自适应高斯-牛顿算法。

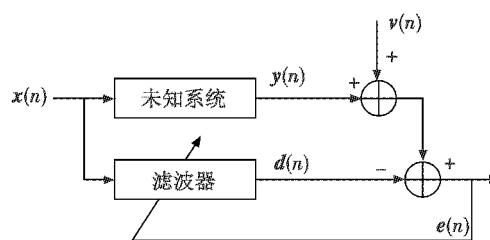


图 1 自适应滤波算法原理图

Fig. 1 Schematic of the adaptive filtering algorithm

LMS 自适应滤波算法属于自适应梯度算法,该算法根据权值的梯度估计值搜索出最优权值,计算出滤波器输出信号与期望信号之间的误差,并以误差方差最小作为判据修改权值系数。算法迭代算式为

$$e(n) = d(n) - \mathbf{x}^T(n) \mathbf{W}(n) \quad (1)$$

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + \mathbf{u}e(n)\mathbf{x}(n) \quad (2)$$

式中: $\mathbf{W}(n)$ 为滤波器在 n 时刻的权值向量; \mathbf{u} 为步长因子,其取值将影响算法的收敛性和稳定性,使算法收敛的步长因子 \mathbf{u} 的取值需满足条件 $0 < \mathbf{u} < 1/\lambda_{\max}$, λ_{\max} 为输入信号自相关矩阵的最大特征值。

2 改进 LMS 自适应滤波算法

2.1 机理分析

根据变步长 LMS 自适应滤波算法对步长因子调整的特点,结合 S 函数(如式(3))及其曲线(如图 2)来构造算法的步长因子模型。

$$f(n) = \frac{1}{1 + \exp(-x)} \quad (3)$$

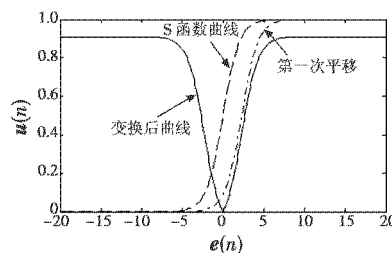


图 2 改进 LMS 算法步长因子表达式的构造过程

Fig. 2 The construction process of the step-size factor for improved LMS algorithm

首先将 S 函数表达式分母的指数项乘以系数 β ($\beta > 0$),实现函数曲线水平方向上的第一次平移,再把平移后的曲线在竖直方向向下平移 $\Delta = 1/(1 + \beta)$ 个单位,然后对函数取绝对值得到变换后的曲线,如图 2 所示,该曲线对应的 $u(n)$ 与 $e(n)$ 的函数关系为

$$u(n) = \frac{1}{1 + \beta e^{-|\epsilon(n)|}} - \frac{1}{1 + \beta} \quad (4)$$

根据 S 函数变换后得到的曲线分析可知:当误差值较大时,对应的步长因子可以取得较大值;而当误差值

减小到 $-5 < e(n) < 5$ 范围内,步长因子取值大小会随着绝对误差值的减小而减小。可见变换后得到的曲线特点满足变步长 LMS 算法对步长因子的调整原则。

为了提高算法的可控性,在表达式(4)中引入参数 α, γ 和 m ,得到步长因子 $u(n)$ 与误差 $e(n)$ 之间的非线性函数关系式为

$$u(n) = a \left[\frac{1}{1 + \beta e^{-r|e(n)|^m}} - \frac{1}{1 + \beta} \right] \quad (5)$$

2.2 参数对 $u(n)$ 的影响分析

下面分析步长因子表达式中的 4 个参数对步长因子调整的影响。

1) 参数 m 的分析。

分别取 $\alpha = 0.1, \beta = 10, \gamma = 10$, 得到 m 为 1, 2, 3 时 $e(n)$ 与 $u(n)$ 的曲线,如图 3 所示。

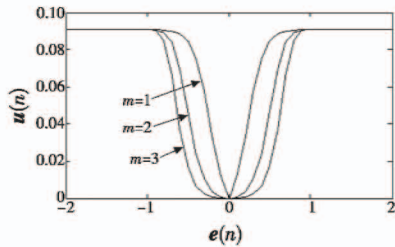


图 3 m 变化时的步长因子曲线

Fig. 3 The step-size factor curve when m changes

可以看出,当误差值接近零时, m 取值越大,步长因子变化就越趋于平缓;当误差值为 0 时,步长因子取值也变为 0。而在 LMS 算法中,收敛阶段步长变化的快慢对稳态误差和稳态失调量有较大的影响,步长因子变化快容易引发振荡现象。从图中还可看出, m 取值越大,步长因子在误差接近 0 的过程中变化速度越慢,对稳态误差和稳态失调量的调整就越好。但另一方面,若 m 取值过大,将出现误差取值较大时步长因子就开始减小的现象,例如当误差值约为 0.5 时, $m = 3$ 对应的曲线已经下降到步长因子幅值约为 0.02 处,而 $m = 1$ 对应的步长因子幅值仍约为 0.09。这样, m 取值过大,将会降低算法的收敛速度。此外, m 取值过大将使得计算量增大,增加算法处理数据的时间。因此,本文算法对步长因子中参数 m 的取值为 2,进一步得到的 $u(n)$ 与 $e(n)$ 的函数关系为

$$u(n) = a \left[\frac{1}{1 + \beta e^{-r|e(n)|^2}} - \frac{1}{1 + \beta} \right] \quad (6)$$

2) 参数 α 的分析。

分别取 $\beta = 10, \gamma = 10, m = 2$, 得到 α 为 0.1, 0.3, 0.5 时 $e(n)$ 与 $u(n)$ 的曲线,如图 4 所示。可以看出,参数 α 的取值对 $u(n)$ 幅值的影响较大。 α 取值越大, $u(n)$ 的幅值越大,算法的收敛速度就越快。其中, $u(n)$ 的

最大极限值为 $u(n)_{\max} = a[1 - 1/(1 + \beta)]$,这里也可以看出,当 α 取定值, β 越大,对应的 $u(n)_{\max}$ 越大。但 α 的取值不能无限大,需满足 LMS 自适应算法收敛对 $u(n)$ 的取值要求。

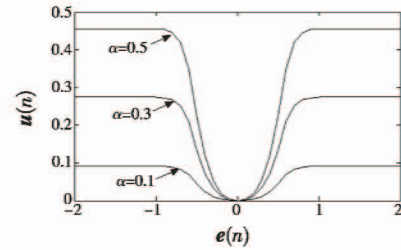


图 4 α 变化时的步长因子曲线

Fig. 4 The step-size factor curve when α changes

3) 参数 β 的分析。

分别取 $\alpha = 0.5, \gamma = 10, m = 2$, 得到 β 为 1, 5, 10, 15 时 $e(n)$ 与 $u(n)$ 的曲线,如图 5 所示,相应的 $u(n)$ 最大值 $u(n)_{\max}$ 如表 1 所示。根据图 5 可以看出, β 取值越大, $u(n)$ 在误差值接近 0 附近的变化趋势越平缓。又由表 1 可知,当 $\beta \geq 5$ 时,随着 β 取值逐渐增大, $u(n)_{\max}$ 受到的影响逐渐减小。但若 β 取值较大,会出现在误差值还较大时 $u(n)$ 就开始减小的现象,将会降低算法的收敛速度。

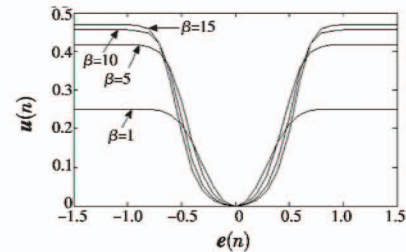


图 5 β 变化时的步长因子曲线

Fig. 5 The step-size factor curve when β changes

表 1 不同 β 取值对应的 $u(n)_{\max}$

Table 1 The values of $u(n)_{\max}$ under different β

β	1	5	10	15
$u(n)_{\max}$	0.25	0.42	0.45	0.47

4) 参数 γ 的分析。

分别取 $\alpha = 0.5, \beta = 10, m = 2$, 得到 γ 为 5, 10, 15 时 $e(n)$ 与 $u(n)$ 的曲线,如图 6 所示。可以看出, $\gamma = 5$ 时对应的曲线在误差取值逐渐接近 0 时, $u(n)$ 的变化速度最慢,而其对应的曲线在误差取值约为 1.3 时,幅值就开始减小,而另外两条曲线在误差分别为 0.6 和 0.8 时曲线幅值才出现减小的趋势。可见, γ 取值越小,在误差取值逐渐接近 0 时, $u(n)$ 变化速度越慢,有利于减小算法的稳态误差;但 γ 取值较小,不能满足在误差较大时 $u(n)$ 也要求取得较大值的调整原则。

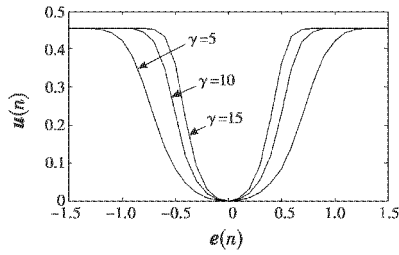


图 6 γ 变化时的步长因子曲线

Fig. 6 The step-size factor curve when γ changes

通过上述各参数变化对步长因子影响的曲线及分析得出,固定参数 $m=2$ 后,参数 α 变化主要影响 $u(n)$ 的幅值调整,可用于控制算法的收敛速度,且可控性较好;参数 γ 的变化主要影响 $u(n)$ 在接近稳态时的幅值变化速度,用于调整算法的稳态误差。参数 β 取值可同时影响收敛速度和稳态误差,但当 β 取较大值时,参数 β 对 $u(n)$ 幅值的影响较小,因此其作用主要是稳态误差的微调。

在实际中,外界对系统的干扰具有随机性和任意性的特点。因此,为了增强算法的抗干扰能力,在步长因子模型中引入误差向量自相关值 $e(n)e(n-1)$ 来调节步长因子取值。经过整理,最后得到本文提出的基于 S 函数的改进变步长 LMS 自适应滤波算法的流程如下。

$$e(n) = d(n) - \mathbf{x}^T(n) \mathbf{W}(n) \quad (7)$$

$$u(n) = a \left[\frac{1}{1 + \beta e^{-\gamma |e(n)e(n-1)|}} - \frac{1}{1 + \beta} \right] \quad (8)$$

$$\mathbf{W}(n+1) = \mathbf{W}(n) + u(n) e(n) \mathbf{x}(n) \quad (9)$$

2.3 算法抗干扰性分析

本文提出的算法通过在步长因子模型中引入误差向量自相关值来增强算法的抗干扰能力,下面分析该量的引入对外界扰动的抑制机理。

由式(7)有

$$d(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{W}(n) + e(n) \quad (10)$$

根据自适应原理有

$$d(n) = \mathbf{x}^T(n) \mathbf{W}^*(n) + v(n) \quad (11)$$

式中:噪声信号 $v(n)$ 与输入信号 $\mathbf{x}(n)$ 不相关; $\mathbf{W}^*(n)$ 为自适应滤波器的最优权系数。假设权系数偏差为 $\Delta \mathbf{W}(n)$, 则

$$\Delta \mathbf{W}(n) = \mathbf{W}(n) - \mathbf{W}^*(n) \quad (12)$$

由式(7)~式(12)有

$$e(n)e(n-1) = v(n)v(n-1) - \Delta \mathbf{W}^T(n) \mathbf{x}(n) v(n-1) - v(n) \Delta \mathbf{W}^T(n-1) \mathbf{x}(n-1) + \Delta \mathbf{W}^T(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n-1) \Delta \mathbf{W}(n-1) \quad (13)$$

由于 $v(n)$ 均值为零,且与 $\mathbf{x}(n)$ 不相关,故有

$$E[e(n)e(n-1)] = E[\Delta \mathbf{W}^T(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n-1) \Delta \mathbf{W}(n-1)] \quad (14)$$

$$E[e^2(n)] = E[v^2(n)] + E[\Delta \mathbf{W}^T(n) \mathbf{x}(n) \mathbf{x}^T(n) \Delta \mathbf{W}(n)] \quad (15)$$

通过式(14)与式(15)的对比容易看出,利用式(8)调整 LMS 算法的步长,在强干扰信号下,算法性能受干扰信号 $v(n)$ 的影响较小,并且在收敛阶段权系数偏差 $\Delta \mathbf{W}(n)$ 较小。可见,误差向量的引入可增强算法的抗干扰能力。

2.4 参数对滤波性能的影响分析

根据本文算法,通过仿真得出步长因子模型中参数 α, β 和 γ 取不同值对滤波性能的影响学习曲线,如图 7~图 9 所示。仿真条件:输入信号为以 +1, -1 等概率交替的信号,并叠加与输入信号不相关、均值为 0、方差为 0.01 的高斯白噪声信号,滤波器阶数为 2,采样点数为 1000,分别做 400 次独立仿真。

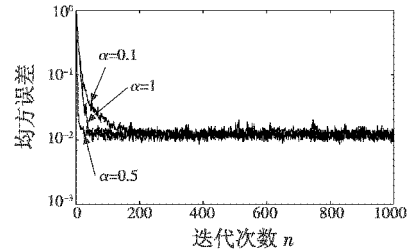


图 7 α 变化时的算法收敛曲线

Fig. 7 Convergence curve of the algorithm when α changes

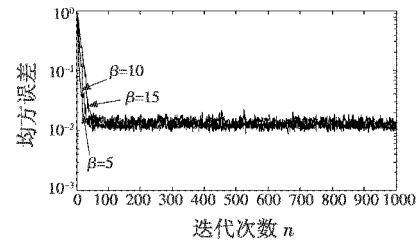


图 8 β 变化时的算法收敛曲线

Fig. 8 Convergence curve of the algorithm when β changes

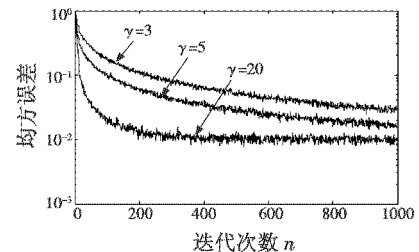


图 9 γ 变化时的算法收敛曲线

Fig. 9 Convergence curve of the algorithm when γ changes

图 7 的仿真结果表明, $\alpha = 0.5$ 时算法的收敛速度最快,即在步长因子所含参数中,当 β, γ 和 m 取固定值时,并不是 α 越大算法性能越优。图 8 中, β 为 5 对应算法的收敛速度较快,但收敛后的稳态误差较大;这是因为误差值较大时, β 分别为 10, 15 对应的步长因子幅值下降速度比 β 为 5 时对应幅值下降速度快,并

且在稳态时 β 分别为10,15的曲线斜率较小,步长因子幅值变化速度较慢。由图9可以看出, γ 取值较大时对应的算法收敛速度快,且稳态误差较小,但根据上节 γ 对步长因子的影响分析可知, γ 取值不宜过大。

综上,本文提出的基于S函数的改进变步长LMS算法中步长因子所含参数值的求取可通过多次实验来获得,以实现算法性能最优。

3 仿真对比与分析

采用上文参数对滤波性能的影响分析中的仿真条件,并假设在迭代次数 $n=500$ 时系统发生时变,权系数变为 $w=[0.4,0.2]$,得到SVSLMS算法、文献[15]算法和本文算法对应的学习曲线如图10所示。

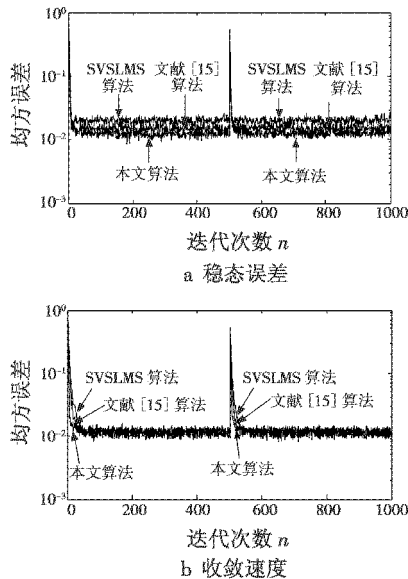


图10 本文算法与其他算法的比较

Fig. 10 Comparison between the proposed algorithm and other algorithms

由图10a可以看出,在收敛速度相同的情况下,本文算法稳态误差更小。图10b中,在相同误差条件下,本文算法具有较快的收敛速度。此外,在系统发生时变后,本文算法能够对信号进行快速跟踪,且收敛速度最快,说明算法具备一定的抗干扰能力。综上,本文算法与SVSLMS算法和文献[15]算法相比性能更优。

4 结束语

本文对现有变步长LMS自适应滤波算法进行研究,根据算法中步长因子的调整原则以及S函数曲线的特点,提出一种基于S函数的改进变步长LMS自适应算法,并分析了步长因子中各参数的取值对算法性能的影响。

与现有算法进行的仿真对比表明,本文所提改进算法在满足快速收敛的同时,收敛后的稳态误差也较小,且抗干扰能力较强,改善了现有算法的性能。

参考文献

- [1] 张帆,徐华中,向云. 针对含噪信号的自适应跟踪微分器改进研究[J]. 电光与控制,2017,24(3):60-63.
- [2] 张贤达. 现代信号处理[M]. 北京:清华大学出版社,2002.
- [3] 田福庆,罗荣,李克玉,等. 基于改进的双曲正切函数变步长LMS算法[J]. 系统工程与电子技术,2012,34(9):1758-1763.
- [4] 耿妍,张端金. 自适应滤波算法综述[J]. 信息与电子工程,2008,6(4):315-320.
- [5] 张红梅,韩万刚. 一种新的变步长LMS自适应滤波算法研究及其应用[J]. 仪器仪表学报,2015,36(8):1822-1830.
- [6] 陈泳,田金鹏,刘燕平. 一种新的变步长LMS自适应滤波算法[J]. 电子测量技术,2015,38(4):27-31.
- [7] 王敏强,胡贵龙,郑宝玉. 一种新的可变步长LMS自适应滤波算法[J]. 南京邮电学院学报,2003,23(4):12-16.
- [8] WAGNER K T, DOROSLOVACKI M. Complex proportionate-type normalized least mean square algorithms [J]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2012, 3285-3288.
- [9] WIDROW B, MCCOOL J M, ARIMOER M G. Stationary and non-stationary learning characteristics of the LMS adaptive filter[J]. Proceedings of the IEEE, 1976, 64(8): 1151-1162.
- [10] 李宁. 自适应滤波算法的收敛性能研究与应用[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学,2009.
- [11] 刘建成,全厚德,赵宏志,等. 基于迭代变步长LMS的数字域自干扰抵消[J]. 电子学报,2016,44(7):1530-1538.
- [12] 覃景繁,欧阳景正. 一种新的变步长LMS自适应滤波算法[J]. 数据采集与处理,1997,12(3):171-174.
- [13] 高鹰,谢胜利. 一种变步长LMS自适应滤波算法及分析[J]. 电子学报,2001,29(8):1094-1097.
- [14] 罗小东,贾振红,王强. 一种新的变步长LMS自适应滤波算法[J]. 电子学报,2006,34(6):1123-1126.
- [15] 邓江波,侯新国,吴正国. 基于簧舌线的变步长LMS自适应算法[J]. 数据采集与处理,2004,19(3):282-285.