

引用格式:游洪,佃松宜,蒲明.一类输入受限非线性系统的有限时间控制[J].电光与控制,2018,25(1):49-54,69. YOU H, DIAN S Y, PU M. Finite-time control for a class of nonlinear systems with input constraints[J]. Electronics Optics & Control, 2018, 25(1):49-54, 69.

一类输入受限非线性系统的有限时间控制

游洪¹, 佃松宜¹, 蒲明²

(1. 四川大学,成都 610065; 2. 成都信息工程大学,成都 610225)

摘要:针对一类高阶非匹配不确定非线性系统,结合有限时间 Lyapunov 稳定性理论,提出了系统在输入受限情况下的一种有限时间稳定控制方案。首先利用加幂积分法,设计镇定系统的有限时间稳定控制器;然后当该控制器的输出超过给定的有界上限输出时,运用 Backstepping 回馈思路去证明系统在控制器达到饱和后也是有限时间稳定的,从而实现了输入受限问题的分段处理。数学上严格证明了在所提方案的作用下,闭环系统是有限时间稳定的,保证了基于加幂积分法设计的控制器的输出量始终在给定的允许饱和限度内,同时被控系统是有有限时间稳定的。仿真结果验证了该方法的有效性。

关键词:非线性系统;有限时间控制;输入受限;控制器分段;高阶非匹配不确定

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-637X.2018.01.011

Finite-time Control for a Class of Nonlinear Systems with Input Constraints

YOU Hong¹, DIAN Song-yi¹, PU Ming²

(1. Sichuan University, Chengdu 610065, China; 2. Chengdu Information Engineering University, Chengdu 610225, China)

Abstract: A finite-time control scheme under input constraints is proposed for a class of nonlinear systems with high-order mismatched uncertainties, based on finite-time Lyapunov stability theory. First of all, a finite-time controller is designed by utilizing the technique of adding a power integrator. Then, when the output of the controller exceeds the bounded upper output, the Backstepping feedback idea is used to verify that the system is stable in finite time after the controller reaches saturation, thus to realize the segmentation of the input constrained problem. It is proved mathematically that with the proposed scheme, the closed loop system is stable in finite time, which ensures that the output of the controller designed with the proposed method is always within the given allowable saturation limit, and the controlled system is stabilized in finite time. Simulation results have proved the effectiveness of the proposed method.

Key words: nonlinear system; finite-time control; input constraints; controller segment; high-order mismatched uncertainty

0 引言

近年来,非线性系统的控制问题,特别是高阶非线性系统控制器的设计问题^[1-4]得到了广泛的关注和研究。一般情况下,工程应用中的系统总是存在外干扰和不确定情况的,而基于有限时间理论的控制方法能很好地满足系统的收敛性能和抗扰动性能^[5]。文献[1-4, 6]分别基于加幂积分法和滑模控制法,实现了一类高阶非线性系统有限时间稳定控制器的设计问题,其中,

文献[6]针对一类不确定非线性系统,提出了一种新的高阶滑模控制器设计方法,有效地减小了系统的抖振问题。文献[1]基于参数分离理论和加幂积分方法,给出了一类参数不确定的随机非线性系统状态有限时间收敛到原点的控制器构造方法。基于加幂积分方法和嵌套饱和方法,文献[4]考虑了一类高阶非线性全矩阵形式系统的全局渐进稳定和有限时间镇定问题。但连续有限时间控制方法易导致高阶非线性的闭环系统出现不满足 Lipschitz 连续条件,稳定性分析复杂等问题^[7]。以研究最早,也最为成熟的有限时间稳定滑模控制(即终端滑模控制)为例,当其运用于2阶或高阶系统时,控制器将会出现奇异性^[8]。现有文献的解决方案总是在

收稿日期:2017-03-27 修回日期:2017-11-01

作者简介:游洪(1990—),男,四川广安人,硕士生,研究方向为智能机器人及其应用。

控制器非奇异性和稳态精度之间平衡,尚无根本解决方案。相对之下,在高阶非线性系统的研究中,由加幂积分方法设计得到的控制器在保证系统有限时间稳定的同时还确保了闭环系统在平衡点处是非奇异的。

但在上述有关高阶非线性系统的有限时间控制中,均未考虑控制输入受限问题。而对该问题的研究,能很好地满足实际工程应用的需要,即控制输入总是有界的。与此同时,现有受限问题的研究方法可分为线性饱和、嵌套饱和、转化饱和函数等。其中,线性饱和和适用于低阶系统^[9],嵌套饱和则主要用于处理高阶系统^[10],而转化饱和函数则是对饱和函数近似拟合^[11],虽然简化了受限系统的结构,但增大了系统的误差。上述几种方法虽然在一定程度上解决了系统受限问题,但现有文献很少关注简单的、计算更加简便的输入受限处理方法,如控制器分段。

针对以上问题,在上述已有研究成果的基础上,本文的工作主要体现在以下几个方面:1)针对高阶非匹配不确定非线性系统输入受限问题,设计系统的全局有限时间稳定控制器,首先,在不考虑系统输入受限的条件下,运用加幂积分方法,设计镇定系统非饱和有限时间稳定控制器,然后,当系统控制输入达到给定的有界上限输出 u_{\max} 时,采用 Backstepping 回馈思路去证明在 u_{\max} 的作用下,系统也是有限时间稳定的。从而实现对输入受限问题的分段处理,简化该类问题的运算过程。2)本文放宽了针对非匹配不确定非线性项处理的假设条件,与文献[7,12]相比,本文研究的系统更具一般性。3)与用于处理高阶非线性问题的终端滑模相比,本文采用的加幂积分法在保证系统有限时间稳定的同时还兼顾系统的奇异性,保证了闭环系统在平衡点处是非奇异的。

在本文中, $\mathbf{R}_{\text{odd}}^{\geq 1} = \{p_1/p_2 \mid p_1 \text{ 和 } p_2 \text{ 为正奇数, 且 } p_1 \geq p_2\}$, $\mathbf{R}_{\text{odd}}^{> 0} = \{p_1/p_2 \mid p_1 \text{ 和 } p_2 \text{ 为正奇数, } p_1 > 0, p_2 > 0\}$ 。 \mathbf{R} , \mathbf{R}^+ 和 \mathbf{R}^n 分别为实数集、非负实数集和 n 维实空间,向量 \mathbf{x} 的 2 范数记为 $\|\mathbf{x}\|$ 。对 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, x_i 表示其第 i 个元素, $\bar{\mathbf{x}}_i$ 表示其前 i 个元素组成的列向量,即 $\bar{\mathbf{x}}_i = [x_1, \dots, x_i]^T$ 。

1 系统与问题描述

本文考虑如下高阶非匹配不确定非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, \mathbf{x})x_2^{r_1} + g_1(t, \mathbf{x}) + d_1(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(t, \mathbf{x})x_n^{r_{n-1}} + g_{n-1}(t, \mathbf{x}) + d_{n-1}(t, \mathbf{x}) \\ \dot{x}_n = f_n(t, \mathbf{x})u^r + g_n(t, \mathbf{x}) + d_n(t, \mathbf{x}) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$, 为系统可测状态且初始值

$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0; r_i \in \mathbf{R}_{\text{odd}}^{> 0}, i = 1, \dots, n$, 为系统幂次; u, y 分别为系统的控制输入和输出,且系统控制输入 u 受限,即具有给定的上限输出,记作 $u_{\max} > 0$ 。函数 $f_i(t, \mathbf{x}): \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}, i = 1, \dots, n$, 是未知的连续函数, \mathbf{R}, \mathbf{R}^+ 分别为实数集和非负实数集,且 $f_i(t, \mathbf{x})$ 连续有界; 函数 $g_i(t, \mathbf{x}): \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, i = 1, \dots, n$, 为局部 Lipschitz 连续的非匹配不确定非线性项 $d_i(t, \mathbf{x}): \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, i = 1, \dots, n$, 系统所受的外部干扰。

假设 1 对一类具有非匹配不确定和外干扰的任意阶非线性系统(1),考虑其控制输入受限, $\exists u_{\max} > 0$,使得对 $\forall t > 0, u(t, \mathbf{x}) = \{u_i(t, \mathbf{x})\}, |u_i(t, \mathbf{x})| \leq u_{\max}, i = 1, 2, \dots, m$ 成立,其中, $u_i(t, \mathbf{x})$ 为第 i 个状态时对应的控制器输出, $\mathbf{x} \in \Omega_n, \Omega_n$ 为 n 维状态论域空间。

令 \mathbf{v} 为采用加幂积分方法计算得到的控制量,则系统(1)的控制输入又可记为

$$u = \begin{cases} u_{\max} \text{sgn}(|\mathbf{v}| - u_{\max}) & |\mathbf{v}| > u_{\max} \\ \mathbf{v} & |\mathbf{v}| \leq u_{\max} \end{cases} \quad (2)$$

假设 2 初始状态 \mathbf{x}_0 足够大,使得加幂积分法解算得到的控制器在初始点 $u_i(t, \Theta(\mathbf{x}_0)) > u_{\max}, \forall t > 0, \forall i$ 成立。

假设 3 存在常数 $q_i \in \mathbf{R}_{\text{odd}}^{\geq 1}, i = 1, 2, \dots, n+1$,使得

$$\begin{cases} q_1 = 1 \\ 1 + \frac{r_i}{q_{i+1}} = \tau + \frac{1}{q_i} \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3)$$

式中, $\tau \in (0, 1)$ 为互质奇数相除的形式。

假设 4 对任意 $f_i(\cdot), i = 1, \dots, n$, 存在未知的正常数 η_e 和 η_m , 以及已知的 K 类函数 $e_i(\cdot): \mathbf{R}^i \rightarrow \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$ 和 $m_i: \mathbf{R}^i \rightarrow \mathbf{R}^+ \setminus \{0\}$, 使得对任意 $t \in \mathbf{R}^+, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 有

$$0 < \eta_e e_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \leq |f_i(t, \mathbf{x})| \leq \eta_m m_i(\bar{\mathbf{x}}_i) \quad (4)$$

假设 5 对任意 $g_i(\cdot), d_i(\cdot), i = 1, \dots, n$, 分别存在未知常向量 $\theta_g \in \mathbf{R}^n, \theta_d \in \mathbf{R}^n$ 和已知的 K 类函数 $\bar{g}_i(\cdot): \mathbf{R}^i \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+, \bar{d}_i(\cdot): \mathbf{R}^i \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+$ 使得对任意 $t \in \mathbf{R}^+, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, 有

$$\begin{cases} |g_i(t, \mathbf{x})| \leq \bar{g}_i(\bar{\mathbf{x}}_i, \theta_g) \sum_{k=1}^i |x_k|^{r_k/q_{k+1}} \\ |d_i(t, \mathbf{x})| \leq \bar{d}_i(\bar{\mathbf{x}}_i, \theta_d) \sum_{j=1}^i |x_j|^{r_j/q_{j+1}} \end{cases} \quad (5)$$

由假设 3 可得 $\frac{r_i}{q_{i+1}} = \tau - 1 + \frac{1}{q_i}, 2 - \frac{1}{q_i} < 1 + \tau$ 以及 $q_i > 0$, 可得

$$0 < \frac{r_i}{q_{i+1}} \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

由假设 4 可知, $f_i(\cdot) > 0, i = 1, \dots, n$ 。由假设 5 可知, 干扰 $d_i(\cdot)$ 存在上界, 且 $g_i(t, 0) = 0, d_i(t, 0) = 0, i = 1, \dots, n, \forall t \in \mathbf{R}^+$, 从而得出系统(1)的平衡点为

$\mathbf{x} = 0$ 。

引理 1 对满足假设 1 和假设 2 的一类非匹配不确定和外干扰的任意阶非线性系统 (1), 在输入受限的情况下, 总存在

$$\Omega_{0i} \subset \Omega_n, \Omega_{0i} = \{\mathbf{x} | u_i(t, \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})) = u_{\max}\} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

$$\Omega_{ui} \subset \Omega_n, \Omega_{ui} = \{\mathbf{x} | u_i(t, \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})) > u_{\max}\} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

$$\Omega_{li} \subset \Omega_n, \Omega_{li} = \{\mathbf{x} | u_i(t, \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x})) < u_{\min}\} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (9)$$

引理 2^[13] 若 $p = p_1/p_2 \leq 1$, 其中, $p_1 > 0, p_2 > 0$ 为正奇数, 则对任意的 $x', y' \in \mathbf{R}$ 有 $|x'^p - y'^p| \leq 2^{1-p} \cdot |x' - y'|^p$ 。

引理 3^[14] 对任意 $x' \in \mathbf{R}, y' \in \mathbf{R}, c > 0, d > 0$ 及非负实函数 $\gamma(x', y')$, 有不等式成立 $|x'|^c |y'|^d \leq \frac{c}{c+d} |x'|^{c+d} + \frac{d}{c+d} |y'|^{c+d}$ 。

$$\gamma |x'|^{c+d} + \frac{d}{c+d} \gamma^{-c/d} |y'|^{c+d}。$$

引理 4^[7] 若 $x_k \in \mathbf{R}, k = 1, \dots, i-1$, 存在正常数 c_{ik} , 使得 $\left| \frac{\partial(x_i^{*q_i})}{\partial x_k} \right| \leq c_{ik} (\xi_1^{1-1/q_k} + \xi_2^{1-1/q_k} + \dots + \xi_{i-1}^{1-1/q_k})$ 。

2 非饱和和有限时间控制器设计

本节采用加幂积分方法, 在文献 [7] 的基础上, 设计系统 (1) 的非饱和和有限时间控制器。下面给出具体设计过程。

定理 1 由引理 2、引理 4, 在假设 3、假设 4 存在的条件下, 存在常数 $\beta_i > 0, i = 1, \dots, n$ 和控制器

$$\mathbf{v} = x_{n+1}^* = -\beta_n (x_n^{q_n} - x_n^{*q_n})^{1/q_{n+1}} \quad (10)$$

使得闭环系统 (1) 是有限时间稳定的, 其中, 虚拟控制器 $x_1^* = 0, x_i^* = -\beta_{i-1} (x_{i-1}^{q_{i-1}} - x_{i-1}^{*q_{i-1}})^{1/q_i}, i = 2, \dots, n$ 。

证明 下面利用归纳假设法给出具体的证明过程。

取 Lyapunov 函数 $V_1(x_1) = x_1^2/2$, 求得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_1) &= x_1 \dot{x}_1 = x_1 (f_1(t, \mathbf{x}) x_1^{q_1} + g_1(t, \mathbf{x}) + d_1(t, \mathbf{x})) = \\ &f_1(t, \mathbf{x}) x_1 x_1^{q_1} + g_1(t, \mathbf{x}) x_1 + d_1(t, \mathbf{x}) x_1 = f_1(t, \mathbf{x}) x_1 (x_1^{q_1} - x_2^{*q_1}) + \\ &g_1(t, \mathbf{x}) x_1 + d_1(t, \mathbf{x}) x_1 + f_1(t, \mathbf{x}) x_1 x_2^{*q_1} \end{aligned} \quad (11)$$

由假设 4、假设 5 可知, $\bar{g}_i(\cdot), \bar{d}_i(\cdot)$ 为已知的 K 类函数, 根据闭区间内连续函数的性质: 存在正常数 k_i, h_i, l_i, p_i 使得

$$\begin{cases} \max_{|\xi_i| \leq \gamma_i, k=1, \dots, i, \|\boldsymbol{\theta}_g\| \leq \lambda_1} \bar{g}_i(\xi_i, \boldsymbol{\theta}_g) \leq k_i \\ \max_{|\xi_i| \leq \alpha_i, k=1, \dots, i, \|\boldsymbol{\theta}_d\| \leq \lambda_2} \bar{d}_i(\xi_i, \boldsymbol{\theta}_d) \leq h_i \\ \min_{|\xi_i| \geq \phi_i, k=1, \dots, i, \|\boldsymbol{\theta}_g\| \geq \delta_1} \bar{g}_i(\xi_i, \boldsymbol{\theta}_g) \geq l_i \\ \min_{|\xi_i| \geq \phi_i, k=1, \dots, i, \|\boldsymbol{\theta}_d\| \geq \delta_2} \bar{d}_i(\xi_i, \boldsymbol{\theta}_d) \geq p_i \end{cases} \quad (12)$$

式中, k_i 的求值问题是在 $|\xi_i| \leq \gamma_i$ 和 $\|\boldsymbol{\theta}_g\| \leq \lambda_1$ 的约束下, 求 $\bar{g}_i(\xi_i, \boldsymbol{\theta}_g)$ 的最大值问题, 同理, h_i 的求值问题是在 $|\xi_i| \leq \alpha_i$ 和 $\|\boldsymbol{\theta}_d\| \leq \lambda_2$ 的约束下, 求 $\bar{d}_i(\xi_i, \boldsymbol{\theta}_d)$ 的

最大值问题, 而对应的最小值问题也可以类似地得到解决。在实际中, 这类问题可用数学规划中的惩罚法^[15]来解决。而由于 $e_i(\cdot), m_i(\cdot)$ 为已知的 K 类函数, 所以, 存在正常数 σ'_i, ρ'_i 使得

$$\sigma'_i \leq \min_{|\xi_i| \leq \gamma_i} e_i(\xi_i) \leq \max_{|\xi_i| \leq \gamma_i} m_i(\xi_i) \leq \rho'_i \quad (13)$$

而由假设 4 及 $\eta_e \geq \lambda^{-1}, \eta_m \leq \lambda$ 可得 $\sigma_i \leq f_i(t, \mathbf{x}) \leq \rho_i$, 其中, $\sigma_i = \sigma'_i \lambda^{-1}, \rho_i = \rho'_i \lambda$ 。而又由 $x_1 = \xi_1$, 且 $x_2^* = -\beta_1 x_1^{1/q_2} = -\beta_1 \xi_1^{1/q_2}, \beta_1 = (\sigma_1^{-1} (n + k_1 + h_1))^{1/r_1}$ 所以式 (11) 可化为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(x_1) &= (g_1(t, \mathbf{x}) + d_1(t, \mathbf{x})) \xi_1 + f_1(t, \mathbf{x}) \cdot \\ &\xi_1 (x_2^{q_1} - x_2^{*q_1}) - f_1(t, \mathbf{x}) \beta_1 \xi_1^{1+\tau} \leq (k_1 + h_1) \xi_1^{1+\tau} + \\ &f_1(t, \mathbf{x}) \xi_1 (x_2^{q_1} - x_2^{*q_1}) - (n + k_1 + h_1) \xi_1^{1+\tau} \leq \\ &-n \xi_1^{1+\tau} + f_1(t, \mathbf{x}) \xi_1 (x_2^{q_1} - x_2^{*q_1}) \end{aligned} \quad (14)$$

假设第 $i-1$ 步存在 Lyapunov 函数 $V_{i-1}(x_{i-1})$ 和虚拟控制器

$$\begin{cases} x_1^* = 0 \\ x_2^* = -\beta_1 \xi_1^{1/q_2} \\ \vdots \\ x_i^* = -\beta_{i-1} \xi_{i-1}^{1/q_i} \\ \xi_1 = x_1^{q_1} - x_1^{*q_1} \\ \xi_2 = x_2^{q_2} - x_2^{*q_2} \\ \vdots \\ \xi_i = x_i^{q_i} - x_i^{*q_i} \end{cases} \quad (15)$$

由步骤 1 可得, $\beta_k > 0, k = 1, \dots, i-1$, 从而有

$$\begin{aligned} \dot{V}_{i-1}(x_{i-1}) &\leq -(n-i+2) (\xi_1^{1+\tau} + \dots + \xi_{i-1}^{1+\tau}) + \\ &f_{i-1}(t, \mathbf{x}) \xi_{i-1}^{2-1/q_{i-1}} (x_{i-1}^{q_{i-1}} - x_{i-1}^{*q_{i-1}}) \end{aligned} \quad (16)$$

下面将证明式 (16) 在第 i 步也成立, 设 Lyapunov 函数为

$$V_i(x_i) = V_{i-1}(x_{i-1}) + W_i(x_i) \quad (17)$$

而 $W_i(x_i)$ 的表达式为

$$W_i(x_i) = \int_{x_i^*}^{x_i} (s^{q_i} - x_i^{*q_i})^{2-1/q_i} ds \quad (18)$$

对式 (17) 沿时间 t 方向求导可得

$$\dot{V}_i(x_i) = \dot{V}_{i-1}(x_{i-1}) + \left(\sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial W_i(x_i)}{\partial x_k} \dot{x}_k + \frac{\partial W_i(x_i)}{\partial x_i} \dot{x}_i \right) \quad (19)$$

下面证明式 (19) 也具有式 (16) 的形式, 同时得到系统 (1) 有限时间稳定的控制器。

由引理 2 可知

$$x_i^{r_{i-1}} - x_i^{*r_{i-1}} \leq 2^{1-r_{i-1}/q_i} |\xi_i|^{r_{i-1}/q_i} \quad (20)$$

结合引理 3 可得

$$\begin{aligned} \xi_{i-1}^{2-1/q_{i-1}} (x_{i-1}^{q_{i-1}} - x_{i-1}^{*q_{i-1}}) &\leq 2^{1-r_{i-1}/q_i} |\xi_{i-1}|^{2-1/q_{i-1}} |\xi_i|^{r_{i-1}/q_i} \leq \\ &(\xi_1^{1+\tau} + \dots + \xi_{i-1}^{1+\tau})/2 + c_{i1} \xi_i^{1+\tau} \end{aligned} \quad (21)$$

式中, 对常数 c_{i1} 有 $c_{i1} > 0$ 。

由引理2和引理4,将式(21)代入式(19)得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x_i) \leq & -(n-i+2)(\xi_1^{1+\tau} + \dots + \xi_{i-1}^{1+\tau}) + c_{i2}\xi_i^{1+\tau} + \\ & f_{i-1}(t, \mathbf{x})\xi_{i-1}^{2-1/q_{i-1}}(x_i^{r_{i-1}} - x_i^{*r_{i-1}}) + (\xi_1^{1+\tau} + \dots + \xi_{i-1}^{1+\tau})/2 + \\ & \xi_i^{2-1/q_i}(f_i(t, \mathbf{x})x_{i+1}^{r_i} + g_i(t, \mathbf{x}) + d_i(t, \mathbf{x})) - (n-i+1) \cdot \\ & (\xi_1^{1+\tau} + \dots + \xi_{i-1}^{1+\tau}) + c_{i3}\xi_i^{1+\tau} + c_{i2}\xi_i^{1+\tau} + f_i(t, \mathbf{x})\xi_i^{2-1/q_i}x_{i+1}^{r_i} + \\ & \xi_i^{2-1/q_i}(g_i(t, \mathbf{x}) + d_i(t, \mathbf{x})) \end{aligned} \quad (22)$$

设计虚拟控制器为 $x_{i+1}^* = -\beta_i \xi_i^{1/q_{i+1}}$, 其中 $\beta_i \geq (\sigma_i^{-1}(n-i+1+c_{i2}+c_{i3}+k_i+h_i))^{1/r_i}$ 为正常数, c_{i3} 为正常数。

由假设4和假设5可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x_i) \leq & -(n-i+1)(\xi_1^{1+\tau} + \xi_2^{1+\tau} + \dots + \xi_i^{1+\tau}) + \\ & f_i(t, \mathbf{x})\xi_i^{2-1/q_i}(x_{i+1}^{r_i} - x_{i+1}^{*r_i}) \end{aligned} \quad (23)$$

归纳假设部分证毕。

由归纳假设结果,在第 n 步存在控制器 $\mathbf{v} = x_{n+1}^* = -\beta_n \xi_n^{1/q_{n+1}}$ 使得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n(x_n) \leq & -(\xi_1^{1+\tau} + \dots + \xi_n^{1+\tau}) + f_n(t, \mathbf{x})\xi_n^{2-1/q_n} \cdot \\ & (v^{r_n} - x_{n+1}^{*r_n}) \leq -(\xi_1^{1+\tau} + \dots + \xi_n^{1+\tau}) \end{aligned} \quad (24)$$

又因为

$$\begin{aligned} V_n(x_n) = & \frac{1}{2}x_1^2 + \sum_{i=2}^n \int_{x_i^*}^{x_i} (s^{q_i} - x_i^{*q_i})^{2-1/q_i} \leq \xi_1^2/2 + \\ & |x_2 - x_2^*| |\xi_2|^{2-1/q_2} + \dots + |x_n - x_n^*| |\xi_n|^{2-1/q_n} \leq \\ & 2(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) \end{aligned} \quad (25)$$

由有限时间 Lyapunov 稳定性判据,取 $c = 2^{-(1+\tau)/2}$, $\alpha = (1+\tau)/2$, 且 $\tau \in (0, 1)$, 结合式(24)和式(25)可得 $\dot{V}_n(x_n) + cV_n^\alpha(x_n) \leq 0$, 从而得到系统(1)是有限时间稳定的。

3 分段点 x_a 的存在性及参数 q_i 的选取

在非饱和有限时间稳定控制器的输出达到给定上限输出的过程中,存在一个分段点,满足系统(1)的控制器的定义。

定义1 对系统(1),在控制输入 u 受限的情况下,若存在一个状态 \mathbf{x}_a 使得由加幂积分法设计得到的控制器的输出等于给定的上限输出,即 $\mathbf{v} = u_{\max}$, 则称该状态为系统(1)在输入受限情况下有限时间稳定的分段点,其在 n 维空间内表达式为 $\mathbf{x}_a = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ 。

引理5 由引理1,在假设3存在条件下,当系统(1)的控制输入受限时,系统(1)一定存在一个分段点 \mathbf{x}_a , 使得由加幂积分法设计得到的控制器 \mathbf{v} 与系统给定的有界上限输出 u_{\max} 相等。

证明 对系统(1),在输入受限的情况下,由假设3可得,系统的初始状态 \mathbf{x}_0 是径向无界的,且由引理1可得,存在状态空间 Ω_{0i} 。从而,在加幂积分法设计的控制输入 \mathbf{v} 达到给定的有界上限输出 u_{\max} 时有

$$-\beta_a (\mathbf{x}_a^{q_a} - \mathbf{x}_a^{*q_a})^{1/q_{a+1}} = u_{\max} \operatorname{sgn}(|\mathbf{v}| - u_{\max}) \quad (26)$$

从而可得

$$(\mathbf{x}_a^{q_a} - \mathbf{x}_a^{*q_a}) = (-u_{\max} \operatorname{sgn}(|\mathbf{v}| - u_{\max})/\beta_a)^{q_{a+1}} \quad (27)$$

由 $\beta_a \geq (\sigma_a^{-1}(n-a+1+c_{a2}+c_{a3}+k_a+h_a))^{1/r_a} > 0$, $u_{\max} > 0$, $q_{a+1} > 0$ 得,式(31)右边是不为0且有界的数,从而有

$$\mathbf{x}_a^{q_a} - \mathbf{x}_a^{*q_a} \neq 0 \quad (28)$$

即分段点 \mathbf{x}_a 一定存在。

当定理成立时,参数 q_i 的选取对参数 τ 具有一定的要求,此处给出了 q_i 的选取条件。

引理6 若常数 τ 存在且满足

$$\frac{r_1 r_2 \dots r_{n-1}}{1+r_1+r_1 r_2+\dots+r_1 r_2 \dots r_{n-1}} < \tau <$$

$$\min\left(1, r_1, \frac{r_1 r_2}{1+r_1}, \dots, \frac{r_1 r_2 \dots r_n}{1+r_1+\dots+r_1 \dots r_{n-1}}\right) \quad (29)$$

式中, $\tau \in \mathbf{R}_{\text{odd}}^{>0}$, 则存在 $q_i \in \mathbf{R}_{\text{odd}}^{\geq 1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 使得假设3成立。

证明 由假设2,取对应的 q_i 为

$$\begin{cases} q_1 = 1 \\ q_2 = \frac{r_1}{\tau} \\ q_i = (r_1 r_2 \dots r_{i-1}) / [(1+r_1+\dots+r_1 \dots r_{i-2})\tau - (r_1+\dots+r_1 r_2 \dots r_{i-2})] \end{cases} \quad i = 3, \dots, n+1 \quad (30)$$

可以看到,式(30)满足假设3。而当 τ 满足式(29)时,由 q_i 的取值过程可知, q_1 和 q_2 满足 $q_i \in \mathbf{R}_{\text{odd}}^{\geq 1}$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, 所以只需验证当 $3 \leq i \leq n+1$ 时, $q_i \in \mathbf{R}_{\text{odd}}^{\geq 1}$ 成立。由式(29)有

$$\begin{aligned} \frac{r_1 r_2 \dots r_{i-2}}{1+r_1+\dots+r_1 \dots r_{i-2}} & \leq \frac{r_1 r_2 \dots r_{n-1}}{1+r_1+\dots+r_1 \dots r_{n-1}} < \tau < \\ & \frac{r_1 r_2 \dots r_{i-1}}{1+r_1+\dots+r_1 \dots r_{i-2}} \end{aligned} \quad (31)$$

由式(30),结合式(31)可以得出 $q_i \in \mathbf{R}_{\text{odd}}^{\geq 1}$ 。

4 控制器 \mathbf{v} 饱和时有限时间证明

本节考虑当式(1)由加幂积分法设计得到的控制器 \mathbf{v} 的输出达到给定的上限输出,即式(1)的控制输入为 $u = u_{\max} \operatorname{sgn}(|\mathbf{v}| - u_{\max})$, 采用 Backstepping 回馈思路来证明系统此时也是有限时间稳定的。此时式(1)等效为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, \mathbf{x})x_2^{r_1} + g_1(t, \mathbf{x}) + d_1(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{i-1} = f_{i-1}(t, \mathbf{x})x_i^{r_{i-1}} + g_{i-1}(t, \mathbf{x}) + d_{i-1}(t, \mathbf{x}) \\ \dot{x}_n = f_n(t, \mathbf{x})u_1^{r_n} + g_n(t, \mathbf{x}) + d_n(t, \mathbf{x}) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (32)$$

选择如下的坐标变换

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - y_d \\ z_i = F_{i-1}(t, \mathbf{x}) - \alpha_{i-1} \end{cases} \quad i=2,3,\dots,n \quad (33)$$

式中： α_i 为第 i 个子系统的虚拟控制器； $F_i(t, \mathbf{x}) = f_i(t, \mathbf{x})x_{i+1}^r$ 。由假设 4 得 $0 < \eta_e e_i(\bar{\mathbf{x}})_i \leq |f_i(t, \mathbf{x})| \leq \eta_m \cdot m_i(\bar{\mathbf{x}})_i$ 。

Step 1 对 z_1 沿时间 t 求导有

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_d = F_1(t, \mathbf{x}) + g_1(t, \mathbf{x}) + d_1(t, \mathbf{x}) - \dot{y}_d \\ \dot{y}_d &= z_2 + \alpha_1 + g_1(t, \mathbf{x}) + d_1(t, \mathbf{x}) - \dot{y}_d \end{aligned} \quad (34)$$

设计虚拟控制器 α_1 为

$$\alpha_1 = -\mu_1 z_1 - g_1(t, \mathbf{x}) - d_1(t, \mathbf{x}) + \dot{y}_d \quad (35)$$

式中， μ_1 为正常数。结合式(34)和式(35)可得

$$z_1 \dot{z}_1 = -\mu_1 z_1^2 + z_1 z_2 \quad (36)$$

Step 2 对 z_2 沿时间 t 求导

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= \frac{\partial F_1(t, \mathbf{x})}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F_1(t, \mathbf{x})}{\partial x_2} \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = \\ &= \frac{\partial F_1(t, \mathbf{x})}{\partial x_1} (F_1(t, \mathbf{x}) + g_1(t, \mathbf{x}) + d_1(t, \mathbf{x})) + \\ &+ \frac{\partial F_1(t, \mathbf{x})}{\partial x_2} (z_3 + \alpha_2 + g_2(t, \mathbf{x}) + d_2(t, \mathbf{x})) - \dot{\alpha}_1 \end{aligned} \quad (37)$$

设计虚拟控制器 α_2 为

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{\left(-\mu_2 z_2 - z_1 - \left(\frac{\partial F_1(t, \mathbf{x})}{\partial x_1} (F_1(t, \mathbf{x}) + g_1(t, \mathbf{x})) \right) \right)}{\frac{\partial F_1(t, \mathbf{x})}{\partial x_2}} + \\ &+ \frac{\left(\frac{\partial F_1(t, \mathbf{x})}{\partial x_1} d_1(t, \mathbf{x}) + \dot{\alpha}_1 \right)}{\frac{\partial F_1(t, \mathbf{x})}{\partial x_2}} - (g_2(t, \mathbf{x}) + d_2(t, \mathbf{x})) \end{aligned} \quad (38)$$

式中， μ_2 为正常数。结合式(37)和式(38)可以得到

$$z_2 \dot{z}_2 = \mu_2 z_2^2 - z_1 z_2 + \partial F_1(t, \mathbf{x}) z_2 z_3 / \partial x_2 \quad (39)$$

Step i ($3 \leq i \leq n-1$) 对 z_i 沿时间 t 求导

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial F_{i-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial F_{i-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} \dot{x}_i - \dot{\alpha}_{i-1} = \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial F_{i-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} (F_j(t, \mathbf{x}) + g_j(t, \mathbf{x}) + d_j(t, \mathbf{x})) + \\ &+ \frac{\partial F_{i-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} (z_{i+1} + \alpha_i + g_i(t, \mathbf{x}) + d_i(t, \mathbf{x})) \end{aligned} \quad (40)$$

设计虚拟控制器 α_i 为

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\left(-\mu_i z_i - \frac{\partial F_{i-2}(t, \mathbf{x})}{\partial x_{i-1}} z_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial F_{i-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} F_j(t, \mathbf{x}) \right)}{\frac{\partial F_{i-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i}} - \\ &+ \frac{\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial F_{i-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} (g_j(t, \mathbf{x}) + d_j(t, \mathbf{x}))}{\frac{\partial F_{i-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_i}} - g_i(t, \mathbf{x}) - d_i(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (41)$$

式中， μ_i 为正常数。由式(40)和式(41)可得

$$z_i \dot{z}_i = -\mu_i z_i^2 - \frac{\partial F_{i-2}(t, \mathbf{x}) z_{i-1} z_i}{\partial x_{i-1}} + \frac{\partial F_{i-1}(t, \mathbf{x}) \partial x_i}{z_i z_{i+1}} \quad (42)$$

Step n 对 z_n 沿时间 t 求导

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F_{n-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} \dot{x}_j + \frac{\partial F_{n-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_n} \dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1} = \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F_{n-1}(t, \mathbf{x}) (F_j(t, \mathbf{x}) + g_j(t, \mathbf{x}) + d_j(t, \mathbf{x}))}{\partial x_j} - \\ &+ \frac{\partial F_{n-1}(t, \mathbf{x}) (f_n(t, \mathbf{x}) u_1 + g_n(t, \mathbf{x}) + d_n(t, \mathbf{x}))}{\partial x_n} \end{aligned} \quad (43)$$

设计实际的控制律 u_1 为

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-\mu_n z_n - \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_{n-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} (g_j(t, \mathbf{x}) + d_j(t, \mathbf{x}))}{\frac{\partial F_{n-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_n} f_n(t, \mathbf{x})} - \\ &+ \frac{\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F_{n-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_j} F_j(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial F_{n-2}(t, \mathbf{x})}{\partial x_{n-1}} z_{n-1} - \dot{\alpha}_{n-1}}{\frac{\partial F_{n-1}(t, \mathbf{x})}{\partial x_n} f_n(t, \mathbf{x})} \end{aligned} \quad (44)$$

式中， μ_n 为正常数。由式(43)和式(44)可得

$$z_n \dot{z}_n = -\mu_n z_n^2 - \frac{\partial F_{n-2}(t, \mathbf{x}) z_{n-1} z_n}{\partial x_{n-1}} \quad (45)$$

定理 2 对给定的式(1)系统，由加幂积分法设计得到的系统控制输入 \mathbf{v} 的值达到给定的上限输出 u_{\max} 时，且 u_{\max} 为

$$u_{\max} = \min \{ \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, u_1 \} \quad (46)$$

在 u_{\max} 作用下，式(1)系统是有限时间稳定的。

证明 选取 Lyapunov 函数为

$$V(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n z_i^2 / 2 \quad (47)$$

结合 Backstepping 回馈思路的推导过程有

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n z_i \dot{z}_i = -\sum_{i=1}^n \mu_i z_i^2 \leq -\beta V(t, \mathbf{x}) \quad (48)$$

式中， $\beta = \min \{ 2\mu_1, \dots, 2\mu_n \}$ ，由 $\dot{V}(t, \mathbf{x}) < 0$ 得出系统的跟踪误差是渐进稳定的。

式(48)两边同时对 t 积分得

$$\ln V(t, \mathbf{x}) \leq -\beta t \quad (49)$$

即

$$t \leq -\frac{\ln V(t, \mathbf{x})}{\beta} \quad (50)$$

即式(32)系统的跟踪误差是有限时间稳定的。

由式(1)系统的跟踪误差 $z = y - y_d = x_1 - x_d$ 和 y_d 有界且有限时间稳定，可以推出系统的状态 x_1 有界且有限时间稳定。又由式(33)可得虚拟控制律 α_1 有界，从而 $\dot{\alpha}_1$ 有界。而由 $z_2 = F_1(t, \mathbf{x}) - \alpha_1$ 有界且有限时间稳定知，系统状态 x_2 有界且有限时间稳定。同理，依次可推得系统所有状态 x_1, x_2, \dots, x_n 都是有界且有限

时间稳定的。

而当系统的控制输入 $|u| < u_{\max}$ 时,采用加幂积分法设计得到的控制器 v 保证了系统此时也是有限时间稳定的。从而理论上证明了在系统控制输入受限的情况下,采用控制器分段方法的有效性。

5 仿真

考虑如下非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \theta_1 x_2^{7/5} + \theta_2 x_1^{7/5} e^{x_1} + \theta_3 x_1^{7/5} \sin x_1 \\ \dot{x}_2 = \theta_4 u^{7/5} \end{cases} \quad (51)$$

式中: $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$ 为系统的状态; u 为系统的控制输入,且 u 具有如式(2)所示的表达式; $\theta_1 > 0, \theta_4 > 0, \theta_2$ 和 θ_3 为未知的常数。

由式(31)可得, $r_1 = \frac{7}{5}, r_2 = \frac{7}{5}$ 。由引理 6 得 $\frac{7}{12} < \tau < \frac{49}{60}$ 。选取 $\tau = 2/3$, 由假设 3 可得 $q_1 = 1, q_2 = \frac{21}{10}, q_3 = \frac{49}{5}$ 。由定理 1, 系统有限时间非饱和和控制器设计为

$$v = -\beta_2 (x_2^{21/10} + \beta_1^{21/10} x_1)^{5/49} \quad (52)$$

式中,

$$\begin{cases} \beta_1 = (\sigma_1^{-1} (2 + k_1 + h_1))^{5/7} \\ \beta_2 \geq (\sigma_2^{-1} (1 + c_{22} + c_{23} + k_2 + h_2))^{5/7} \end{cases} \quad (53)$$

其值由数学规划中惩罚法以及式(12)和式(13)共同确定。选取系统的初始值 $x_1 = 0.5, x_2 = -1$, 由 Matlab 仿真得到图 1 ~ 图 3 所示结果。

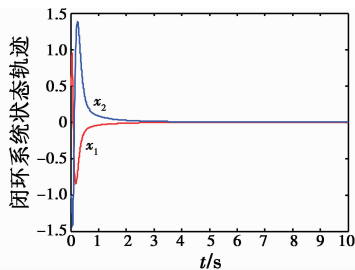


图 1 输入受限状态响应曲线

Fig. 1 Response curve with constrained state input

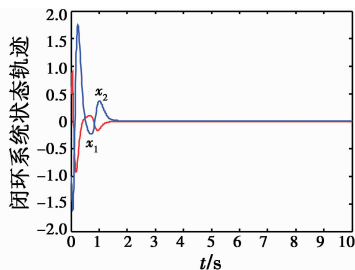


图 2 系统无输入受限状态响应曲线

Fig. 2 System response curve with no input state constrained

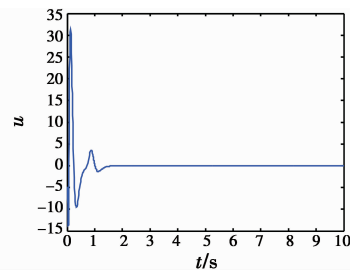


图 3 控制器响应曲线

Fig. 3 Response curve of controller

6 结论

针对一类输入受限非线性系统,本文利用加幂积分法和 Backstepping 回馈思路,考虑了其控制器分段问题。与现有研究结果相比,本文的主要工作体现在: 1) 采用比较简单的方法,实现了输入受限的分段处理,简化了该类问题的运算; 2) 在保证系统有限时间稳定的同时,消除了系统的奇异性。

参考文献

- [1] ZHA W T, ZHAI J Y, FEI S M. Global adaptive finite-time control for stochastic nonlinear systems via state feedback [J]. Circuits Systems, and Signal Processing, 2015, 34 (12): 3789-3809.
- [2] ZHA W T, ZHAI J Y, AI W Q, et al. Finite-time state-feedback control for a class of stochastic high-order nonlinear systems[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2015, 92(3): 643-660.
- [3] ZHANG X H, ZHANG K M, XIE X J. Finite-time output feedback stabilization of nonlinear high-order feedforward systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2016, 26(8): 1794-1814.
- [4] 周映江,王莉,孙长银. 一类非线性系统的全局渐近稳定和有限时间镇定[J]. 自动化学报,2013,39(5):664-672.
- [5] DING S H, LI S H, LI Q. Stability analysis for a second-order continuous finite-time control system subject to a disturbance[J]. Journal of Control Theory and Applications, 2009, 7(3): 271-276.
- [6] 陈杰,李志平,张国柱. 不确定非线性系统的高阶滑模控制器设计[J]. 控制理论与应用,2010,27(5):563-569.
- [7] 丁世宏,李世华. 输入饱和下的非线性积分系统的全局有限时间镇定[J]. 自动化学报,2011,37(10):1222-1231.
- [8] 廖卫中,宗群,马亚丽. 小型四旋翼无人机建模与有限时间控制[J]. 控制理论与应用,2015,32(10):1343-1350.

果,与传统 D-S 证据理论融合结果进行比较,得到对比实验结果如表 5 所示。

表 5 测试结果对照
Table 5 Comparison of test results %

缺陷类型	凹槽	缺孔	裂纹	无缺陷	识别率
传统 D-S	80	70	70	60	70
本文方法	90	86	81	70	81.3

由表 5 可以看出,利用本文方法对于 100 个未知缺陷的样本进行融合识别的准确率为 81.3%,高于利用传统 D-S 证据理论进行融合识别的准确率。通过对比实验表明,利用本文所用方法能够有效弥补单一证据源获得的信息不足、忽视证据可靠性不同所带来的局限,使所获得的证据更为客观、可信,从而提高了缺陷识别结果的准确率。

5 结束语

本文研究了一种基于 BP 神经网络和证据理论进行缺陷识别的方法,该方法构建了特征层和决策层的二级融合识别模型。在特征层融合中,主要利用 BP 神经网络进行缺陷数据的初步融合,并为决策层融合提供 4 种缺陷类型的基本概率分配。在决策层融合中,考虑到不同传感器获取数据的可靠性差异,给出获取诊断证据可靠性因子的方法。在传统 D-S 证据理论的基础上引入可靠性因子 λ ,对证据源进行可靠性评估后再进行融合决策。与传统 D-S 证据理论融合相比,该方法考虑了证据源的可靠性,提高了缺陷信息的利用率,降低了证据源冲突导致的决策失误率,最终实现了更加准确、可靠地进行超声检测缺陷类型的识别。但是,研究中并未区分证据的可靠性和重要性的不同意义,增加了证据获取及融合时的非精确性,因此下一步要考虑证据融合时重要性的不同。

参考文献

- [1] 张道富,曾燕,周晓军,等. 基于信息融合技术的无损检测缺陷模式识别[J]. 仪器仪表学报,2003,24(5):449-452.
- [2] OUKHELLOU L, DEBIOLLES A, DENOEU T, et al. Fault diagnosis in railway track circuits using Demster-Shafer classifier fusion[J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2010, 23(1):117-128.
- [3] SI X S, HU C H, YANG J B, et al. On the dynamic evidential reasoning algorithm for fault prediction[J]. Expert System with Applications, 2011, 38:5061-5081.
- [4] XU X B, LIU P, SUN Y B. Fault diagnosis based on the updating strategy of interval-valued belief structures[J]. Chinese Journal of Electronics, 2014, 23(4):753-760.
- [5] 潘泉,王增福,梁彦,等. 信息融合理论的基本方法与进展(II)[J]. 控制理论与应用,2012,29(10):1233-1244.
- [6] 韩崇昭,朱洪艳,段战胜,等. 多源信息融合[M]. 2版. 北京:清华大学出版社,2010:19-44.
- [7] 徐晓滨,王玉成,文成林. 评估诊断证据可靠性的信息融合故障诊断方法[J]. 控制理论与应用,2011,28(4):504-510.
- [8] 何友,王国宏. 多传感器信息融合及应用[M]. 2版. 北京:电子工业出版社,2010:59-63.
- [9] 周志杰,杨剑波,胡昌华,等. 置信规则库专家系统与复杂系统建模[M]. 北京:科学出版社,2011:9-30.
- [10] 徐晓滨,郑进,徐冬玲,等. 基于证据推理规则的信息融合故障诊断方法[J]. 控制理论与应用,2015,32(9):1170-1182.
- [11] YANG J B, XU D L. Evidence reasoning rule for evidence combination[J]. Artificial Intelligence, 2013, 205:1-29.
- [12] 胡文刚,刚铁. 基于多探头源数据融合的焊缝缺陷识别[J]. 焊接学报,2013,34(3):45-48.
- [13] LI S H, DING S H, LI Q. Global set stabilization of the spacecraft attitude control problem based on quaternion[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(1):84-105.
- [14] QIAN C J, LIN W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(7):1061-1079.
- [15] 黄红选. 运筹学:数学规划[M]. 北京:清华大学出版社,2011.
- [9] KOSUT R L. Design of linear systems with saturation linear control and bounded states[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1983, 28(1):121-124.
- [10] ZHOU B, DUAN G R. A novel nested non-linear feedback law for global stabilization of linear systems with bounded controls[J]. International Journal of Control, 2008, 81(9):1352-1363.
- [11] 王永超,张胜修,曹立佳,等. 输入受限的非线性系统自适应模糊 backstepping 控制[J]. 控制理论与应用, 2015,32(12):1669-1675.
- [12] 张恒俊,王朝立,陈华. 一类非线性系统的动态反馈有限时间饱和镇定[J]. 控制理论与应用,2013,30(3):355-359.

(上接第 54 页)