

引用格式:罗庚,谢宇,赵伟庆,等.弹载机电产品贮存环境试验最小试验样本量设计[J].电光与控制,2017,24(8):66-70. LUO G, XIE Y, ZHAO W Q, et al. Minimum sample size design for missile-borne electromechanical products in storage environmental test[J]. Electronics Optics & Control, 2017, 24(8):66-70.

弹载机电产品贮存环境试验最小试验样本量设计

罗庚¹, 谢宇¹, 赵伟庆¹, 胡亚峰¹, 王永南², 梁继文¹

(1. 中国华阴兵器试验中心, 陕西 华阴 714200; 2. 中国人民解放军 66352 部队, 北京 101508)

摘要:为解决弹载机电产品贮存环境试验最小试验样本量确定的问题,提出一套适合工程应用的设计方法。针对自然贮存试验的统计数据,首先采用基于保序回归的倒挂数据处理方法(PAVA 算法)进行数据预处理,然后采用基于极小卡方估计和拟合优度检验相结合的贮存可靠性评估方法建立寿命分布模型。最后针对所得模型,提出以估计量的相对偏差作为精度指标,计算在一定精度指标和置信水平下最小样本数量。结果表明,该方法可以得到符合条件的最小样本量,满足工程应用。

关键词:弹载机电产品; 贮存环境试验; 最小样本量; 保序回归; “倒挂”数据; 拟合优度检验

中图分类号: TP114.3

文献标志码: A

doi:10.3969/j.issn.1671-637X.2017.08.014

Minimum Sample Size Design for Missile-Borne Electromechanical Products in Storage Environmental Test

LUO Geng¹, XIE Yu¹, ZHAO Wei-qing¹, HU Ya-feng¹, WANG Yong-nan², LIANG Ji-wen¹

(1. Ordnance Test Center, Huayin 714200, China; 2. No. 66352 Unit of PLA, Beijing 101508, China)

Abstract: A method suitable for engineering application is presented to determine the minimum sample size of missile-borne electromechanical products in storage environmental test. Firstly, PAVA, a method for processing “reversal” data based on isotonic regression, is used for data pre-processing. Then, the lifetime distribution model is established by using the storage reliability evaluation method combining minimum chi-square estimation with goodness-of-fit test. Finally, the relative deviation of estimator is used as the precision index, the minimum sample size under given precision requirement and confidence level is calculated out. A formula indicating the relation among sample size, precision index, confidence level and distribution parameters is derived. The result shows that the minimum sample size is fit for engineering application.

Key words: missile-borne electromechanical product; storage environmental test; minimum sample size; isotonic regression; “reversal” data; goodness-of-fit test

0 引言

弹载机电产品作为弹药产品的“大脑和中枢神经”,是全弹正常发挥功能的关键,由于其构造复杂,往往也是弹药产品长期自然贮存过程中的薄弱环节,为验证其可靠性,需进行贮存环境试验,试验样本的数量直接影响着产品可靠性评估的精度,样本量愈大,贮存环境试验得到的试验数据愈多,被试品可靠性评估愈精确。

然而由于试验时间和费用等方面的限制,贮存环境试验要求在保证一定精度的前提下,试验样本数量最小,尤其对于单个价值高的产品。在传统试验工作中,主要是根据经验来确定试件数,缺乏必要的理论依据,因而带有很大的主观随意性和盲目性。文献[1-5]根据可靠性统计推断理论,研究了一些如何确定最少试件数的问题,但是这些研究都是在产品服从特定分布的前提下进行的,不适用于分布未知的产品。

为解决弹载机电产品贮存环境试验最小试验样本量确定的问题,本文提出一种结合数据预处理、分布拟合、最小样本量确定的适合工程应用的最小样本量确定方法,可以为贮存环境试验样本量的确定提供参照依据。

收稿日期:2016-07-21

修回日期:2016-09-23

基金项目:国家自然科学基金(61471385)

作者简介:罗庚(1990—),男,陕西咸阳人,硕士,工程师,研究方向为可靠性工程。

1 “倒挂”数据的处理

被试品可靠性评定研究的关键是该被试品贮存一段时间后是否仍然合格。因此对其检测时,若可靠性指标在预定范围之内,则判定为成功,反之为失败。针对每次的检测数据,其数据类型为成败型不完全数据^[6],因而检测信息可记为

$$D = \{(t_i, n_i, Y_i) | 1 \leq i \leq m, m \geq 1 \& m \in \mathbf{N}\} \quad (1)$$

它表示在贮存了 t_i 年的某被试品母体中,抽取 n_i 个样本进行性能检测,恰好有 Y_i 个样品处于良好状态,其中, m 为时点个数。

设 T 为该被试品的可靠性寿命,则 X 的失效分布函数为

$$F(t) = P(T < t) = 1 - R(t) \quad (2)$$

式中, $R(t)$ 为贮存可靠度函数。

记

$$p'_i = Y_i/n_i \quad (3)$$

称 p'_i 是 p_i 的强相合估计。该估计为 $R(t)$ 的一致最小方差无偏估计,可用作为 $R(t)$ 点估计值。

一般来讲,被试品的可靠度是关于时间的减函数,但由于贮存检测地域环境、被试品自身性质和人员因素等影响,出现贮存时间短的可靠度的点估计值反而比贮存时间长的可靠度的点估计值小的现象,称之为“倒挂”现象^[7],即 $p'_i < p'_j (i < j)$ 。“倒挂”现象与可靠度随时间增加而降低的自然规律相悖,严重的数据倒挂会使计算结果产生很大偏差,甚至错误。因此有必要进行相应的处理。

保序回归^[8] PAVA 算法完全从数据的角度出发,充分考虑了所有的数据点,逐“块”对数据进行修正,从根本上排除了人为主观性对修正效果的影响,且选择的修正权重也能够很好地体现原始数据(样本量和失效数)对结果的影响。基于此,采用 PAVA 算法对试验数据进行处理。

检测信息可记为 $D = \{(t_i, n_i, X_i) | 1 \leq i \leq m, m \geq 1 \& m \in \mathbf{N}\}$, 则 t_i 时刻检测样本的失效频率可表达为 $f_i = 1 - \frac{Y_i}{n_i}$ 。

令 $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ 为一个有限集合, $f = (f_1, \dots, f_m)$ 为定义在 T 上的一个有界函数。在 T 上定义一种半序关系“ $<$ ”,对任意的 $t < t_j (t_i \in T, t_j \in T; 1 \leq i < j \leq m)$, 存在 $f_i^* = f^*(t_i) \leq f_j^* = f^*(t_j)$, 则称函数 $f^* = (f_1^*, \dots, f_m^*)$ 为定义在 T 上相对于“ $<$ ”的保序函数。记 G 为保序函数的全体,若存在 $f^* \in G$, 满足

$$\sum_{i=1}^m (f_i - f_i^*)^2 \omega_i = \min_{\forall g \in G} \sum_{i=1}^m (f_i - g_i)^2 \omega_i \quad (4)$$

则称 $f^* = (f_1^*, \dots, f_m^*)$ 为 f 的保序回归,其中, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, $\omega_i > 0$, 是一个给定的权函数,具体权重可取 $\omega_i = n_i$ 或者 $\omega_i = f_i(1 - \frac{f_i}{n_i})$, 这两个权重值均可由样本信息获得,且能够体现样本量和失效率对调整过程的影响。

下面通过 PAVA 算法,可以将“倒挂”的原始失效频率调整为满足序约束条件的频率值序列,其步骤为:

1) 如果 $f \in G$, 则 $f^* = f$;

2) 若存在 j 使得 $f_j > f_{j+1}$, 令 $B = \{j, j+1\}$, $f_B =$

$$A_V(B) = \frac{\sum_{i \in B} f_i \omega_i}{\sum_{i \in B} \omega_i}, \omega_B = \omega_j + \omega_{j+1}, \text{并且令 } \tilde{f} = (f_1, \dots,$$

$$f_{j-1}, f_B, f_{j+2}, \dots, f_m)', \tilde{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{j-1}, \omega_B, \omega_{j+2}, \dots, \omega_m)';$$

3) 重复步骤 2), 直到把下标集 K 分解为 l 个块 B_1, B_2, \dots, B_l , 满足 $A_V(B_1) < A_V(B_2) < \dots < A_V(B_l)$, 则 $f_i^* = A_V(B_i), i \in B_i, i = 1, 2, \dots, l$ 。

2 分布拟合

2.1 分布类型

相关的贮存可靠性研究表明,弹载机电产品寿命符合特定的寿命分布族,假设 $H_0: F \in P_0, P_0 = \{F(\cdot; \theta), \theta \in \Theta\}$ 是分布族, Θ 是参数空间,其常见的寿命分布族有如下 4 种。

1) 指数分布族

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{\theta} t\right) \quad t \geq 0 \quad (5)$$

2) 威布尔分布族

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right] \quad t \geq 0 \quad (6)$$

3) 极值分布族

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right] \quad t \geq 0 \quad (7)$$

4) 对数正态分布族

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-\frac{(\ln x - u)^2}{2\sigma^2}} dx \quad t \geq 0 \quad (8)$$

2.2 模型参数确定

在 $F \in P_0$ 的假设下,基于成败型不完全数据 $(n_i, Y_i, t_i), 1 \leq i \leq m$ 来估计 $F(x, \theta)$ 中的未知参数 θ 。令

$$\chi^2(\theta) = \sum_{i=1}^m \frac{n_i(\hat{p}_i - p_i(\theta))^2}{p_i(\theta)(1 - p_i(\theta))} \quad (9)$$

易见,若真实参数为 θ_0 , 当 $n_i \rightarrow \infty, 1 \leq i \leq m$ 时, $\chi^2(\theta_0)$ 渐近于自由度为 m 的 χ^2 分布。若 $\hat{\theta}_n$ 满足

$$\chi^2(\hat{\theta}_n) = \inf_{\theta \in \Theta} \chi^2(\theta) \quad (10)$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 是 θ 的极小 χ^2 估计,可以将极小 χ^2 估计 $\hat{\theta}_n$ 作为

θ 的估计。

具体步骤可分为以下两步。

1) 构造 χ^2 统计量。

假定可靠性寿命 X 的分布函数 $F(t, \theta)$ 为某个分布族, 基于数据 $(n_i, Y_i, t_i), 1 \leq i \leq m$, 由式(2)可以得到在 t_i 时刻的 $\hat{\rho}_i$ 值, 再将式(1)与所得 $\hat{\rho}_i$ 值代入式(9), 即可算得 χ^2 统计量表达式。

2) 求出 χ^2 统计量的最小值 $\chi^2(\hat{\theta}_n)$ 。

对上述 χ^2 统计量关于 θ 求最小值, 得到极小 χ^2 估计 $\hat{\theta}_n$ 以及极小 χ^2 统计量 $\chi^2(\hat{\theta}_n)$ 。但是此方法只能对产品失效分布作粗略选择, 而且不同自由度下的 χ^2 统计量之间也不方便比较。为了解决这个问题, 在此引出检验的拟合优度。假设上述 χ^2 统计量分布符合自由度为 $m-s$ 的 $\chi^2(m-s)$ 分布, 其中, m 为年数, s 为参数的个数, 则有

$$p = P(\chi^2(m-s) > \chi^2(\hat{\theta}_n)) \quad (11)$$

p 值称为检验的拟合优度, 它衡量了假定的分布与数据的拟合程度。一般说来, p 值越大, 拟合程度越好。

3 最小样本量设计

3.1 服从威布尔分布

令 R 表示可靠性寿命 T 对应的可靠性, 即 $R = 1 - F(T)$, 对式(6)进行相应变化, 可得

$$\ln(1/R) = (\eta/T)^{-\alpha} \quad (12)$$

其特征寿命 β 可由最大似然估计为^[9]

$$\hat{\beta} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^\alpha \right)^{1/\alpha} \quad (13)$$

为更准确, 令 β_d 为其对置信水平 $1-\gamma$ 的置信下限 $\beta_d = \hat{\beta}/S_c$, 则

$$P\{\beta > \beta_d\} = P\left\{\beta > \frac{\hat{\beta}}{S_c}\right\} = 1 - \gamma \quad (14)$$

式中, S_c 为置信系数, 其满足

$$P\left\{S_c > \frac{\hat{\beta}}{\beta}\right\} = 1 - \gamma \quad (15)$$

Feller 证明了 $2n\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^\alpha \sim \chi^2(2n)$ 。令 $Z = \frac{\hat{\beta}}{\beta}$, 则 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z) = \frac{\alpha n^\alpha}{\Gamma(n)} z^{\alpha n - 1} \exp(-nz^\alpha) \quad (16)$$

故

$$\int_0^{S_c} f_Z(z) dz = 1 - \gamma \quad (17)$$

将真值与估计值相对偏差期望值的绝对值记为 δ , 并将其作为精度指标, 则有

$$\delta = \left| E\left(\frac{\beta - \beta_d}{\beta}\right) \right| = \left| 1 - \frac{E(\hat{\beta})}{S_c \beta} \right| \quad (18)$$

由此可得 $\hat{\beta}$ 的数学期望 $E(\hat{\beta})$ 为

$$E(\hat{\beta}) = \frac{\Gamma(n+1/\alpha)}{\Gamma(n) S_c^\alpha \sqrt{n}} \beta \quad (19)$$

则

$$\delta = 1 - \frac{\Gamma(n+1/\alpha)}{\Gamma(n) S_c^\alpha \sqrt{n}} \quad (20)$$

联立式(17)、式(20)即可求出在精度指标 δ 和置信水平 $1-\gamma$ 下, 被试品的最小试样数量 n_{\min} 。

3.2 服从指数分布

对于指数分布, 由于其等价于 $\alpha=1$ 的威布尔分布, 因此在精度指标 δ 和置信水平 $1-\gamma$ 下, 产品的最小试样数量 n_{\min} 可由式(21)方程组得出

$$\begin{cases} \int_0^{S_c} \frac{n^n}{\Gamma(n)} z^{n-1} \exp(-nz) dz = 1 - \gamma \\ \delta = 1 - \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n) S_c n} \end{cases} \quad (21)$$

3.3 服从极值分布

对于极值分布, 由于其等价于 $\alpha = \sigma^{-1}, \beta = \exp \mu$ 的威布尔分布。因此在精度指标 δ 和置信水平 $1-\gamma$ 下, 被试品的最小试样数量 n_{\min} 可由式(22)方程组得出

$$\begin{cases} \int_0^{S_c} \frac{\sigma^{-1} n^n}{\Gamma(n)} z^{\sigma^{-1} n - 1} \exp(-nz^{\sigma^{-1}}) dz = 1 - \gamma \\ \delta = 1 - \frac{\Gamma(n+1/\sigma^{-1}) \sigma \sqrt{n}}{\Gamma(n) S_c} \end{cases} \quad (22)$$

3.4 服从对数正态分布

对于对数正态分布, 设可靠性寿命 T 服从对数正态分布 $T \sim LN(\mu, \sigma^2)$ 。则有 $P(\ln T > \ln T_d) = 1 - \gamma$, 其中, $\ln T_d$ 为 $\ln T$ 的下限值, 且有 $\ln T_d = \mu + u_d \sigma$, 其中, u_d 为标准正态分布的上百分位点。从母体中随机抽取容量为 n 的样本, 可以得到下限 $\ln T_d$ 的估计量

$$\ln T_s = \hat{\mu} + u_d \hat{\sigma} = \ln \bar{T} + u_d k s \quad (23)$$

式中, $\ln \bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln T_i; s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - \bar{T})^2}; k = \sqrt{\frac{n-1}{2} \frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)}}$ 。

根据文献可知, $\ln T_s$ 为母体下限值 $\ln T_d$ 的无偏估计量, 而且近似服从正态分布 $\ln T_s \sim N(\mu_s, \sigma_s^2)$ 。其中, $\mu_s = \mu + u_d \sigma, \sigma_s^2 = \sigma^2 [(1/n) + u_d^2 (k^2 - 1)]$ 。设母体真实下限值和作为其估计量的子样下限值之间的相对误差限为精度指标即 $\delta = \left| \frac{\mu_s - \ln T_s}{\mu_s} \right|$ 。综上可得产品的最小试样数量为

$$n_{\min} = \left\{ u_d^2(1 - k^2) + \left[\frac{\ln \bar{T} \delta (1 + u_d k s / \ln \bar{T})}{s(t_{A/2}(n-1) + t_B(n-1))} \right]^2 \right\}^{-1} \quad (24)$$

式中, A, B 分别为假设检验中发生第一类错误和第二类错误的概率。

4 算例分析

实例 1 某机电引信其寿命分布模型通过查阅相关资料可知服从威布尔分布(20 ℃), 即 $F(t) = 1 - \exp$

$$\left[- \left(\frac{t}{167.2367} \right)^{2.2032} \right], t \geq 0。$$

由 3.1 节可知, 当精度指标 δ 为 0.05 时, 其样本量 n 与置信水平 $1 - \gamma$ 的关系如表 1 所示。

表 1 计算结果

Table 1 The result of computation

置信水平	样本量				
	50	51	52	53	54
0.794	0.797	0.799	0.801	0.803	

由 GJB 2005 可知, 置信度要求不低于 0.8, 故确定该引信进行贮存环境试验的样本量为 53。

实例 2 某加速度计是为某惯导平台提供运动载体加速度信息的关键部件^[1], 其寿命分布模型未知, 但已知其自然环境贮存条件(20 ℃)下的可靠性数据如表 2 所示, 存在明显的失效频率“倒挂”现象, 采用 PAVA 算法修正数据中的倒挂, 适当选取权重 $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)'$, $\omega_i > 0, \omega_i = f_i(1 - \frac{f_i}{n_i})$, 求出 $\{f_i = \frac{x_i}{n_i}\}$ 关于权重值的保序回归 f_i^* (及其失效数 x_i^*), 结果如表 2 最后一列所示。

表 2 加速度计自然贮存数据

Table 2 The natural storage data of accelerometer

贮存时间/月	样本量			
	样本量	失效数	失效频率	修正后失效频率
30	n_1	x_1	0	0
42	n_2	x_2	0	0
47	n_3	x_3	0.002 286	0.002 286
48	n_4	x_4	0.006 198	0.005 468
54	n_5	x_5	0	0.005 468
59	n_6	x_6	0.001 992	0.005 468
66	n_7	x_7	0	0.005 468
68	n_8	x_8	0.008 969	0.007 758
74	n_9	x_9	0.000 651	0.007 758
78	n_{10}	x_{10}	0	0.007 758
84	n_{11}	x_{11}	0	0.007 758
88	n_{12}	x_{12}	0.003 080	0.007 758
90	n_{13}	x_{13}	0	0.007 758
91	n_{14}	x_{14}	0.013 158	0.011 280
96	n_{15}	x_{15}	0	0.011 280
97	n_{16}	x_{16}	0.003 597	0.011 280
102	n_{17}	x_{17}	0	0.011 280
113	n_{18}	x_{18}	0.009 269	0.011 280

根据表 2 的试验数据, 采用基于极小卡方估计和

拟合优度检验相结合的贮存可靠性评估方法^[10], 可以得出不同分布类型相应的 χ^2 统计量值、拟合优度 p 值以及失效分布函数中的未知参数值, 具体结果如表 3 所示。

表 3 未知参数计算结果

Table 3 Computation result of unknown parameters

	分布类型	χ^2 统计量	分布参数	拟合优度
修正前	指数分布	27.170 6	$\hat{\theta} = 2\ 326.99$	0.007 3
	威布尔分布	24.536	$\hat{\eta} = 101.736\ 0$ $\hat{m} = 2.685\ 3$	0.010 6
	极值分布	38.815 0	$\hat{\mu} = 36.196\ 3$ $\hat{\sigma} = 5.227\ 6$	0.001 2
	对数正态分布	70.698 1	$\hat{\mu} = 16.352\ 1$ $\hat{\sigma} = 5.786\ 3$	0
PAVA 修正后	指数分布	7.146 8	$\hat{\theta} = 838.99$	0.970 3
	威布尔分布	5.454 8	$\hat{\eta} = 73.597\ 9$ $\hat{m} = 3.102\ 4$	0.987 5
	极值分布	7.281 6	$\hat{\mu} = 27.815\ 9$ $\hat{\sigma} = 4.330\ 6$	0.967 4
	对数正态分布	50.877 1	$\hat{\mu} = 10.647\ 7$ $\hat{\sigma} = 3.757\ 9$	0

由表 3 可得, 采用 PAVA 算法修正的数据计算的拟合优度明显高于原始数据, 因此可知加速度计的寿命分布服从威布尔分布, 即 $F(t) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{t}{73.5979} \right)^{3.1024} \right], t \geq 0。$

由于该加速度计价格昂贵, 考虑到试验成本, 适当降低精度指标, 由 3.1 节可知, 当精度指标 δ 为 0.1 时, 其样本量 n 与置信水平 $1 - \gamma$ 的关系如表 4 所示。

表 4 小子样条件的置信水平

Table 4 Confidence level of small samples

置信水平	样本量					
	3	4	5	6	7	8
0.716	0.748	0.773	0.796	0.815	0.831	

由 GJB 2005 可知, 该加速度计进行贮存环境试验的样本量为 7。

5 总结

1) 贮存环境试验中, 试验样本量的确定方法有很多种, 一个比较理想的方法就是利用统计推断理论, 合理确定贮存环境试验中所需的最小样本量。

2) 本文提出以估计量的相对偏差作为精度指标 δ , 确定被试品服从常见寿命分布时进行贮存环境试验所需最小样本量的方法, 并结合实例, 给出了实例所需的最小样本量。

3) 本文给出的是贮存环境试验中确定所需最小样本量的理论方法及公式, 得到的样本量可为实际问题作参考和比较, 在实际工程问题中, 需综合考虑可靠度、精度指标 δ 、置信水平 $1 - \gamma$ 以及试验成本等参数

指标,确定贮存环境试验需要的样本量。

参 考 文 献

[1] 冯振宇,诸德培.可靠性试验中最小子样容量的确定[J].机械强度,1999,21(3):186-191.

[2] 郑波,柳维旗,许和贵,等.一种确定火工品贮存可靠性试验样本量的方法[J].火工品,2005(2):28-30.

[3] DEVORE J L. Probability and statistics for engineering and the sciences[M]. 9th ed. Monterey:Brooks/Cole Publishing Company, 1982.

[4] ADCOCK C J. Sample size determination: a review[J]. Journal of the Royal Statistical Society Series D(The Statistician), 1997, 46(2):261-283.

[5] 崔卫民,薛红军,喻天翔,等.试验数据服从 Weibull 分布时可靠性试验最少试件数的确定[J].机械工程学报,2008,44(1):51-55.

[6] 罗赓,穆希辉,牛跃听,等.温度应力下的加速度计贮存寿命评定[J].装甲兵工程学院学报,2014,28(3):27-30.

[7] 罗赓,穆希辉,牛跃听,等.某装备系统机电产品贮存可靠性评估方法[J].火力与指挥控制,2015,40(4):176-180.

[8] BARLOW R E, BARTHOLOREMEW D J, BREMNER J M, et al. Statistical inference under order restrictions: the theory and application of isotonic regression [M]. New York:Wiley, 1972.

[9] 周希沅.国产材料疲劳寿命分布参数 α 的初步估计[J].航空学报,1990,11(10):B488-B491.

[10] 罗赓,穆希辉,牛跃听,等.小子样条件下某型加速度计步降加速寿命试验优化设计[J].中国惯性技术学报,2015,23(5):696-700.

(上接第 65 页)

GM-PHD 滤波由于采用随机集合为模型而无法实现目标编批的困难,实现了目标航迹编批功能。算法仿真表明,改进优化后的 PHD 滤波算法能够应用于红外预警系统进行多目标跟踪,能够实现目标自动起始,具有较好的杂波抑制效果。

参 考 文 献

[1] 周宏仁,敬忠良,王培德.机动目标跟踪[M].北京:国防工业出版社,1991.

[2] SINGER R, SEA R. A new filter for optimal tracking in dense multi-target environment [C]//The 9th Allerton Conference Circuit and System Theory, Urbana-Champaign, USA, 1971:201-211.

[3] FORTMANN T, BAR-SHALOM Y, SCHEFFE M. Sonar tracking of multiple target using joint probabilistic data association [J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 1983, 8(3):173-184.

[4] BLACKMAN S S. Multiple hypothesis tracking for multi-target tracking[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2004, 19(1):5-18.

[5] CLARK D, VO B-N. Convergence analysis of the Gaussian mixture PHD filter[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(4):1204-1212.

[6] VO B-T, VO B-N, CANTONI A. The cardinality balanced

multi-target multi-Bernoulli filter and its implementations [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(2):409-423.

[7] 王晓,韩崇昭.用于机动目标跟踪的多模型概率假设密度滤波器[J].西安交通大学学报,2011,45(12):1-5.

[8] GRANSTROM K, ORGUNER U. On spawning and combination of extended/group targets modeled with random matrices [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(3):678-692.

[9] MAHLER R. Global integrated data fusion [C]//Proceedings of the 7th National Symposium on Sensor Fusion, 1994, 1:187-199.

[10] 连峰.基于随机有限集的多目标跟踪方法研究[D].西安:西安交通大学,2009.

[11] MAHLER R. Multi-target Bayes filtering via first-order multi-target moments [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2003, 39(4):1152-1178.

[12] MAHLER R. PHD filters of higher order in target number [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(4):1523-1543.

[13] 张洪建.基于有限集统计学的多目标跟踪算法[D].上海:上海交通大学,2009.

[14] 周承兴.基于随机有限集的多目标跟踪[D].西安:西安电子科技大学,2011.

