引用格式：马清亮，杨海燕，吴旭光. 多项式模糊系统混合 H_2/H_∞ 控制[J]. 电光与控制，2017，24(7)：1-6. MA Q L, YANG H Y, WU X G. Mixed H_2/H_∞ control of polynomial fuzzy systems[J]. Electronics Optics & Control, 2017, 24(7)：1-6.

多项式模糊系统混合 H_2/H_∞ 控制

马清亮[1]， 杨海燕[2]， 吴旭光[2]
（1. 火箭军工程大学控制工程系，西安 710025； 2. 西北工业大学航海学院，西安 710072）

摘　要：对于多项式模糊系统，提出一种具有公共 Lyapunov 矩阵的混合 H_2/H_∞ 性能准则。基于多项式 Lyapunov 函数与平方和分解技术，推导出多项式模糊系统混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器的存在条件。通过求解一个具有多项式平方和约束的参数极小化问题，给出了混合 H_2/H_∞ 模糊控制器优化设计方法。

关键词：多项式模糊系统；混合 H_2/H_∞ 控制；多项式 Lyapunov 函数；平方和优化
中图分类号：TP13　　**文献标志码**：A　　**doi**:10.3969/j.issn.1671－637X.2017.07.001

Mixed H_2/H_∞ Control of Polynomial Fuzzy Systems

MA Qing-liang[1]， YANG Hai-yan[2]， WU Xu-guang[2]
（1. Department of Control Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China;
2. School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China）

Abstract：A mixed H_2/H_∞ performance criterion with common Lyapunov matrix is proposed for polynomial fuzzy systems. Sufficient conditions for the existence of mixed H_2/H_∞ state feedback fuzzy controller are derived based on the polynomial fuzzy Lyapunov function and Sum-of-Squares（SOS）decomposation technique. The optimal H_2/H_∞ controller design approach is given by solving a parameter minimization problem with SOS constraints.

Key words：polynomial fuzzy system； mixed H_2/H_∞ control； polynomial Lyapunov function； sum-of-squares optimization

0 引言

多项式模糊模型是在 T-S 模糊模型基础上提出的一种用于描述非线性系统的新型模糊模型[1]。传统 T-S 模糊模型的后件采用线性方程描述，采用 T-S 模糊模型，能够逼近任意光滑的非线性系统。作为 T-S 模糊模型的推广，多项式模糊模型在整体结构上与 T-S 模糊模型类似。由于采用了多项式非线性方程作为模糊模型的后件，因此，运用多项式模糊模型能够更有效地描述复杂非线性系统。对于 T-S 模糊系统，通常采用二次 Lyapunov 函数和线性矩阵不等式(LMI)技术设计模糊控制器；而对于多项式模糊系统，则采用多项式 Lyapunov 函数与多项式平方和(SOS)优化技术设计模糊控制器，因而能够降低模糊控制器设计的保守性[2]。目前，已有学者针对多项式模糊系统的镇定控制、鲁棒控制以及保性能控制等问题展开研究，并已有较多的研究成果[2-7]。

混合 H_2/H_∞ 控制是具有 H_∞ 性能约束的 H_2 优化控制问题。在控制器设计过程中，混合 H_2/H_∞ 控制同时考虑系统的 H_2 性能和 H_∞ 性能，因而能够使闭环系统一方面具有较强的鲁棒性，另一方面又获得优良的调节性能。对于多项式模糊系统的混合 H_2/H_∞ 控制问题，目前相关研究成果尚不多见。

本文在文献[7]的基础上，进一步研究多项式模糊系统的混合 H_2/H_∞ 状态反馈控制器设计问题。首先提出一种具有公共 Lyapunov 矩阵的多项式模糊系统混合 H_2/H_∞ 性能准则；进而，基于多项式 Lyapunov 函数与平方和优化技术，给出了混合 H_2/H_∞ 状态反馈模糊控制器的存在条件和优化设计方法。

1 问题描述

考虑如下非线性系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=f(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{w}(t))\\ z_\infty(t)=g(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{w}(t))\end{cases}\qquad(1)$$

式中：$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 为状态向量；f 和 g 是光滑非线性函

收稿日期：2016-06-28　　修回日期：2017-04-13
基金项目：国家自然科学基金(61203007)
作者简介：马清亮(1974—)，男，河南商水人，博士，副教授，研究方向为智能控制、非线性控制等。

数;$\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 是控制输入;$\boldsymbol{w}(t)\in\mathbf{R}^p$ 是能量有界的外部干扰;$z_\infty(t)\in\mathbf{R}^q$ 是控制输出。

构建描述式(1)非线性系统的多项式模糊模型,第 i 条模糊规则如下[1]所述。

If $z_1(t)$ is M_{i1} and $\cdots$ and $z_p(t)$ is M_{ip}, then

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x}(t))\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{B}_{ui}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}(t)+\\ \qquad \boldsymbol{B}_{wi}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{w}(t)\\ z_\infty(t)=C_i(\boldsymbol{x}(t))\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t))+\boldsymbol{D}_{ui}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}(t)+\\ \qquad \boldsymbol{D}_{wi}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{w}(t)\end{cases} \tag{2}$$

式中:$i=1,2,\cdots,r$;r 为模糊规则数;$z_j(t),j=1,\cdots,p$ 为前件变量;M_i^j 为模糊集;$\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t))\in\mathbf{R}^N$ 是由 $\boldsymbol{x}(t)$ 的单项式构成的列向量;$\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x}(t))$,$\boldsymbol{B}_{ui}(\boldsymbol{x}(t))$,$\boldsymbol{B}_{wi}(\boldsymbol{x}(t))$,$\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{x}(t))$,$\boldsymbol{D}_{ui}(\boldsymbol{x}(t))$和$\boldsymbol{D}_{wi}(\boldsymbol{x}(t))$均为适维多项式矩阵。

为叙述简便,分别用$\boldsymbol{x}$,$\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$,$\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{w}$ 和 z_∞ 代替 $\boldsymbol{x}(t)$,$\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t))$,$\boldsymbol{u}(t)$,$\boldsymbol{w}(t)$和$z_\infty(t)$。

对式(2)的多项式模糊模型进行反模糊化处理,可得到全局多项式模糊系统

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\sum\limits_{i=1}^{r}h_i(z)[\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}_{ui}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{B}_{wi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}]\\ z_\infty=\sum\limits_{i=1}^{r}h_i(z)[\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{D}_{ui}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{D}_{wi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}]\end{cases} \tag{3}$$

式中,$h_i(z(t))=\dfrac{\prod\limits_{j=1}^{p}M_{ij}(z_j(t))}{\sum\limits_{i=1}^{r}\prod\limits_{j=1}^{p}M_{ij}(z_j(t))}$,且 $h_i(z)\geqslant 0$,$\sum\limits_{i=1}^{r}h_i(z)=1$。

根据平行分布补偿原理,对于式(3)的多项式模糊系统,可设计如下形式的状态反馈模糊控制器,即

$$\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^{r}h_i(z)\boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) 。\tag{4}$$

结合式(3)和式(4),可得相应的闭环多项式模糊系统为

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{r}h_i(z)h_j(z)\{[\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}_{ui}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{K}_j(\boldsymbol{x})]\cdot\\ \quad\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}_{wi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}\}\\ z_\infty=\sum\limits_{i=1}^{r}h_i(z)\{[\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{D}_{ui}(\boldsymbol{x})K_j(\boldsymbol{x})]\cdot\\ \quad\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{D}_{wi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}\}\end{cases} 。\tag{5}$$

给定加权矩阵 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}>0$,$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}>0$,可定义如下与系统状态 $\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t))$以及控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$有关的 H_2 性能指标,即

$$J_2=\int_0^\infty[\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t 。\tag{6}$$

对于式(3)的多项式模糊系统,本文研究目标是确定模糊控制器式(4)中增益矩阵 $\boldsymbol{K}_i(\boldsymbol{x})$ $(i=1,\cdots,r)$,使得式(5)的闭环模糊系统是稳定的,同时满足如下性能指标。

1) H_∞ 性能:对于给定的标量 $\gamma>0$ 和能量有界的外部干扰 $\boldsymbol{w}\in L_2[0,\infty)$,式(5)的多项式模糊系统在零初始条件下($\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(0)=0)$)的输出满足 $|z_\infty|_2<\gamma|\boldsymbol{w}|_2$,即式(5)的多项式模糊系统具有 γ-干扰抑制水平;

2) H_2 性能:由式(6)定义的系统 H_2 性能指标达到最小。

2 多项式模糊系统混合 H_2/H_∞ 性能分析

本章在分析多项式模糊系统 H_2 性能和 H_∞ 性能的基础上,提出一种基于公共 Lyapunov 矩阵的多项式模糊系统混合 H_2/H_∞ 性能准则。

2.1 多项式平方和分解

定义1 对于多元多项式$f(\boldsymbol{x})$,其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,若存在一组多项式 $g_1(\boldsymbol{x})$,$g_2(\boldsymbol{x})$,$\cdots$,$g_m(\boldsymbol{x})$,使得

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{m}g_i^2(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

则称$f(\boldsymbol{x})$为平方和(SOS)多项式[7]。

记 Σ_{SOS}表示所有平方和多项式的集合。若$f(\boldsymbol{x})\in\Sigma_{\mathrm{SOS}}$,则有 $f(\boldsymbol{x})\geqslant 0$ 成立。

引理1[8] 设$f(\boldsymbol{x})$是一个阶次为 $2d$ 的多元多项式,其中,$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$;$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})$是一个由 $\boldsymbol{x}$ 的单项式(阶次不高于 d)构成的列向量,则$f(\boldsymbol{x})$是 SOS 多项式的充要条件是存在一个半正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$,满足

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Z}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}) 。\tag{8}$$

引理2 设 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$是一个次数为 $2d$ 的 $N\times N$ 维对称多项式矩阵,其中:$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})$是一个由 $\boldsymbol{x}$ 的单项式(次数不高于 d)构成的列向量,考虑如下 3 个条件[7,9]:1) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\geqslant 0$ 对于$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$ 均成立;2) $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$ 是 SOS 多项式,其中,实向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^N$ 与 $\boldsymbol{x}$ 不相关;3) 存在一个半正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$,满足 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x}))$,其中,“$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})$”表示向量 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{x})$的 Kronecker 积。则有:1)$\Leftarrow$2);2)$\Leftrightarrow$3)。

2.2 多项式模糊系统的 H_2 性能准则

记 $\boldsymbol{A}_i^k(\boldsymbol{x})$表示多项式矩阵 $\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x})$的第 k 行。$K=\{k_1,\cdots,k_m\}$是由矩阵 $\boldsymbol{B}_{ui}(\boldsymbol{x})$的全零行标志构成的集合,令 $\tilde{\boldsymbol{x}}=(\boldsymbol{x}_{k_1}\ \cdots\ \boldsymbol{x}_{k_m})^{\mathrm{T}}$。

定理1 若存在一个对称多项式矩阵 $\boldsymbol{X}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})\in\mathbf{R}^{N\times N}$,满足式(9)~式(11)的多项式平方和条件,则式

(5)无外扰多项式模糊系统是稳定的,且系统的 H_2 性能指标满足 $J_2<\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{X}_2^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}(0))\hat{\boldsymbol{x}}(0)$。

$$\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{X}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}]\boldsymbol{v}_1\in\Sigma_{\mathrm{SOS}} \tag{9}$$

$$-\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{W}_{ii}(\boldsymbol{x})+\varepsilon_{2ii}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}]\boldsymbol{v}_2\in\Sigma_{\mathrm{SOS}}\quad i=1,\cdots,r \tag{10}$$

$$-\boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{W}_{ij}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{W}_{ji}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{v}_3\in\Sigma_{\mathrm{SOS}}\quad 1\leqslant i<j\leqslant r \tag{11}$$

式中：$\boldsymbol{W}_{ij}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{N}_{ij}(\boldsymbol{x}) & * & * \\ \boldsymbol{X}_2(\tilde{\boldsymbol{x}}) & -\boldsymbol{Q}^{-1} & * \\ \boldsymbol{K}_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}_2(\tilde{\boldsymbol{x}}) & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{R}^{-1}\end{pmatrix}$,“$*$”表示由矩阵的对称性得到的矩阵块,下同;$\boldsymbol{N}_{ij}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}_{ui}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{K}_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{X}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{X}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})\cdot\boldsymbol{K}_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}_{ui}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})-\sum_{k\in K}\dfrac{\partial\boldsymbol{X}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{A}_i^k(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{x}}$;$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 和 $\boldsymbol{v}_3$ 是与 $\boldsymbol{x}$ 不相关的向量;$\varepsilon_1(\boldsymbol{x})$ 和 $\varepsilon_{2ii}(\boldsymbol{x})$ 为非负多项式,且当 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 时,$\varepsilon_1(\boldsymbol{x})>0,\varepsilon_{2ii}(\boldsymbol{x})>0$;$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ 是一个维数为 $N\times n$ 的多项式矩阵,其第 i 行第 j 列的元素 $\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{x})$ 确定为

$$\boldsymbol{T}_{ij}(\boldsymbol{x})=\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}}{\partial\boldsymbol{x}_j}(\boldsymbol{x})\quad i=1,\cdots,N,j=1,\cdots,n\quad。\tag{12}$$

证明:考虑如下形式的候选多项式 Lyapunov 函数

$$V(\boldsymbol{x})=\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) \tag{13}$$

式中,$\boldsymbol{P}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{X}_2^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})$。根据引理 2,对 $\forall\boldsymbol{x}\neq 0$,若条件式(9)成立,均有 $V(\boldsymbol{x})>0$。

沿式(5)的无外扰闭环模糊系统状态轨线,对 $V(\boldsymbol{x})$ 求导,可得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(z)h_j(z)\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{U}_{ij}(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \tag{14}$$

式中:$\boldsymbol{U}_{ij}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{P}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{P}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{K}_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{P}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{K}_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{P}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})+\sum_{k\in K}\dfrac{\partial\boldsymbol{P}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{A}_i^k(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$。

根据引理 2,若条件式(10)和式(11)成立,则有

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(z)h_j(z)\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{W}_{ij}(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})<0\quad。\tag{15}$$

对式(15)两边分别左乘 $\boldsymbol{X}_2^{-\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{x}})$ 和右乘 $\boldsymbol{X}_2^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})$,并运用 Schur 补引理,结合式(4)和式(14),可得

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}<-\dot{V}(\boldsymbol{x})\quad。\tag{16}$$

由于 $\boldsymbol{Q}>0,\boldsymbol{R}>0$,因此,当 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 时,可知 $\dot{V}(\boldsymbol{x})<0$。根据 Lyapunov 稳定性理论,可知式(5)的多项式模糊系统是稳定的。

对式(16)两边分别从 0 到 ∞ 进行积分,并考虑当 $t\to\infty$ 时,$V(\boldsymbol{x}(t))\to 0$,可得

$$J_2=\int_0^{\infty}[\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t<V(\boldsymbol{x}(0))=\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{X}_2^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}(0))\hat{\boldsymbol{x}}(0)\quad。\tag{17}$$

2.3　多项式模糊系统的 H_∞ 性能准则

下述定理给出了多项式模糊系统 H_∞ 性能判别方法。

定理 2　给定标量 $\gamma>0$,若存在一个对称多项式矩阵 $\boldsymbol{X}_\infty(\tilde{\boldsymbol{x}})\in\mathbf{R}^{N\times N}$,满足式(18)~式(20),则式(5)的多项式模糊系统是稳定的,且具有 H_∞ 性能 γ。

$$\boldsymbol{v}_4^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{X}_\infty(\tilde{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_3(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}]\boldsymbol{v}_4\in\Sigma_{\mathrm{SOS}} \tag{18}$$

$$-\boldsymbol{v}_5^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}_{ii}(\boldsymbol{x})+\varepsilon_{4ii}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}]\boldsymbol{v}_5\in\Sigma_{\mathrm{SOS}}\quad i=1,\cdots,r \tag{19}$$

$$-\boldsymbol{v}_6^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{M}_{ij}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{M}_{ji}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{v}_6\in\Sigma_{\mathrm{SOS}}\quad 1\leqslant i<j\leqslant r \tag{20}$$

式中:$\boldsymbol{M}_{ij}(\boldsymbol{x})=$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_{ij}(\boldsymbol{x}) & * & * \\ \boldsymbol{B}_{wi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) & -\gamma^2\boldsymbol{I} & * \\ \boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}_\infty(\tilde{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{D}_{ui}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{K}_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}_\infty(\tilde{\boldsymbol{x}}) & \boldsymbol{D}_{wi}(\boldsymbol{x}) & -\boldsymbol{I}\end{pmatrix};$$

$\boldsymbol{\Gamma}_{ij}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}_\infty(\tilde{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}_{ui}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{K}_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}_\infty(\tilde{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{X}_\infty(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{X}_\infty(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{K}_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}_{ui}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})-\sum_{k\in K}\dfrac{\partial\boldsymbol{X}_\infty(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{A}_i^k(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{x}}$;$\boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{v}_5$ 和 $\boldsymbol{v}_6$ 是与 $\boldsymbol{x}$ 不相关的向量;$\varepsilon_3(\boldsymbol{x})$ 和 $\varepsilon_{4ii}(\boldsymbol{x})$ 为非负多项式,且当 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 时,$\varepsilon_3(\boldsymbol{x})>0,\varepsilon_{4ii}(\boldsymbol{x})>0$。

证明:采用与本文中的定理 1 以及文献[10]中的定理 6 类似的推导思路,可证得该定理。限于篇幅,略。

2.4　多项式模糊系统的混合 H_2/H_∞ 性能准则

在定理 1 和定理 2 的基础上,通过选取一个公共的 Lyapunov 矩阵 $\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{X}_2(\tilde{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{X}_\infty(\tilde{\boldsymbol{x}})$,同时满足式(9)~式(11)以及式(18)~式(20),可得到一种具有公共的 Lyapunov 矩阵的多项式模糊系统混合 H_2/H_∞ 性能判别方法。

定理 3　给定标量 $\gamma>0$,若存在对称多项式矩阵 $\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})\in\mathbf{R}^{N\times N}$,满足

$$\boldsymbol{v}_7^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})-\varepsilon_5(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}]\boldsymbol{v}_7\in\Sigma_{SOS} \tag{21}$$

$$-\boldsymbol{v}_8^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Psi}_{ii}(\boldsymbol{x})+\varepsilon_{6ii}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}]\boldsymbol{v}_8\in\Sigma_{\mathrm{SOS}}\quad i=1,\cdots,r \tag{22}$$

$$-\boldsymbol{v}_9^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Psi}_{ij}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\Psi}_{ji}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{v}_9\in\Sigma_{\mathrm{SOS}}\quad 1\leqslant i<j\leqslant r \tag{23}$$

$$-\boldsymbol{v}_{10}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Omega}_{ii}(\boldsymbol{x})+\varepsilon_{7ii}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}]\boldsymbol{v}_{10}\in\Sigma_{SOS}\quad i=1,\cdots,r \tag{24}$$

$$-\boldsymbol{v}_{11}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Omega}_{ij}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\Omega}_{ji}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{v}_{11}\in\Sigma_{\mathrm{SOS}}\quad 1\leqslant i<j\leqslant r \tag{25}$$

式中：$\boldsymbol{\Psi}_{ij}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Theta}_{ij}(\boldsymbol{x}) & * & * \\ \boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}}) & -\boldsymbol{Q}^{-1} & * \\ \boldsymbol{K}_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}}) & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{R}^{-1}\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{\Omega}_{ij}(\boldsymbol{x})=$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Theta}_{ij}(\boldsymbol{x}) & * & * \\ \boldsymbol{B}_{wi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) & -\gamma^2\boldsymbol{I} & * \\ \boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{D}_{ui}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{K}_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}}) & \boldsymbol{D}_{wi}(\boldsymbol{x}) & -\boldsymbol{I}\end{pmatrix};$$

$\boldsymbol{\Theta}_{ij}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}_{ui}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{K}_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{K}_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}_{ui}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})-\sum_{k\in K}\frac{\partial\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{A}_i^k(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{x}}$；$\boldsymbol{v}_7,\boldsymbol{v}_8,\boldsymbol{v}_9,\boldsymbol{v}_{10}$和$\boldsymbol{v}_{11}$是与$\boldsymbol{x}$不相关的适维向量；$\varepsilon_5(\boldsymbol{x})$，$\varepsilon_{6ii}(\boldsymbol{x})$和$\varepsilon_{7ii}(\boldsymbol{x})$为非负多项式，且当$\boldsymbol{x}\neq 0$时，$\varepsilon_5(\boldsymbol{x})>0$，$\varepsilon_{6ii}(\boldsymbol{x})>0$，$\varepsilon_{7ii}(\boldsymbol{x})>0$；则式(5)的多项式模糊系统是稳定的，且具有$H_\infty$性能$\gamma$，同时系统的$H_2$性能指标满足$J_2<\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{X}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}(0))\hat{\boldsymbol{x}}(0)$。

运用Matlab平方和优化工具箱(SOSTOOLS)以及半定规划工具箱SeDuMi，可判定定理3中的所有条件式(21)～式(25)是否成立[11]。

3 多项式模糊系统混合H_2/H_∞控制器设计

本章在定理3的基础上，给出多项式模糊系统混合H_2/H_∞状态反馈模糊控制器的存在条件和设计方法。

3.1 混合H_2/H_∞状态反馈模糊控制器的存在条件

定理4 考虑式(3)的多项式模糊系统，给定标量$\gamma>0$，如果存在一个对称多项式矩阵$\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})\in\mathbf{R}^{N\times N}$，以及多项式矩阵$\boldsymbol{Y}_j(\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}^{N\times m}(j=1,\cdots,r)$，使得式(21)成立，同时满足

$$-\boldsymbol{v}_{12}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Lambda}_{ii}(\boldsymbol{x})+\varepsilon_{8ii}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}]\boldsymbol{v}_{12}\in\Sigma_{\mathrm{SOS}}\quad i=1,\cdots,r \tag{26}$$

$$-\boldsymbol{v}_{13}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Lambda}_{ij}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\Lambda}_{ji}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{v}_{13}\in\Sigma_{\mathrm{SOS}}\quad 1\leqslant i<j\leqslant r \tag{27}$$

$$-\boldsymbol{v}_{14}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Sigma}_{ii}(\boldsymbol{x})+\varepsilon_{9ii}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}]\boldsymbol{v}_{14}\in\Sigma_{\mathrm{SOS}}\quad i=1,\cdots,r \tag{28}$$

$$-\boldsymbol{v}_{15}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Sigma}_{ij}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\Sigma}_{ji}(\boldsymbol{x})]\boldsymbol{v}_{15}\in\Sigma_{\mathrm{SOS}}\quad 1\leqslant i<j\leqslant r \tag{29}$$

式中：$\boldsymbol{\Lambda}_{ij}(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Xi}_{ij}(\boldsymbol{x}) & * & * \\ \boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}}) & -\boldsymbol{Q}^{-1} & * \\ \boldsymbol{Y}_j(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{R}^{-1}\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{\Sigma}_{ij}(\boldsymbol{x})=$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Xi}_{ij}(\boldsymbol{x}) & * & * \\ \boldsymbol{B}_{wi}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) & -\gamma^2\boldsymbol{I} & * \\ \boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{D}_{ui}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Y}_j(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{D}_{wi}(\boldsymbol{x}) & -\boldsymbol{I}\end{pmatrix};$$ $\boldsymbol{\Xi}_{ij}(\boldsymbol{x})=$

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})+\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}_{ui}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Y}_j(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{Y}_j^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{B}_{ui}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x})-\sum_{k\in K}\frac{\partial\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})}{\partial\boldsymbol{x}_k}\boldsymbol{A}_i^k(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{x}}$；$\boldsymbol{v}_{12}$，$\boldsymbol{v}_{13}$，$\boldsymbol{v}_{14}$和$\boldsymbol{v}_{15}$是与$\boldsymbol{x}$不相关的适维向量；$\varepsilon_{8ii}(\boldsymbol{x})$和$\varepsilon_{9ii}(\boldsymbol{x})$为非负多项式，且当$\boldsymbol{x}\neq 0$时，$\varepsilon_{8ii}(\boldsymbol{x})>0$，$\varepsilon_{9ii}(\boldsymbol{x})>0$；则存在式(4)的混合$H_2/H_\infty$模糊控制器，使得式(5)的闭环模糊系统稳定且具有$H_\infty$性能$\gamma$，同时系统的$H_2$性能指标满足$J_2<\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{X}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}(0))\hat{\boldsymbol{x}}(0)$。

进一步地，若上述问题有解，则根据$\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})$和$\boldsymbol{Y}_j(\boldsymbol{x})$，可计算出式(4)中的混合$H_2/H_\infty$状态反馈模糊控制器增益矩阵为

$$\boldsymbol{K}_j(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Y}_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})\quad j=1,\cdots,r\ 。\tag{30}$$

证明：令

$$\boldsymbol{Y}_j(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{K}_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}})\quad j=1,\cdots,r\ 。\tag{31}$$

将式(31)代入式(22)～式(25)，可得式(26)～式(29)。

根据定理3可知，存在由式(4)描述的模糊控制器，式中，$\boldsymbol{K}_j(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Y}_j(\boldsymbol{x})\boldsymbol{X}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})$，使得式(5)的闭环多项式模糊系统稳定且具有$H_\infty$性能$\gamma$，同时由式(6)定义的系统$H_2$性能指标满足$J_2<\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{X}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}(0))\hat{\boldsymbol{x}}(0)$。

3.2 混合H_2/H_∞状态反馈模糊控制器优化设计

引入变量λ，令

$$\lambda-\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{X}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}(0))\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0)>0\ 。\tag{32}$$

根据引理2和Schur补引理，如果

$$\boldsymbol{v}_{16}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\lambda & \hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(0) \\ \hat{\boldsymbol{x}}(0) & \boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}}(0))\end{pmatrix}\boldsymbol{v}_{16}\in\Sigma_{\mathrm{SOS}} \tag{33}$$

成立，式中，$\boldsymbol{v}_{16}$是与$\boldsymbol{x}$不相关的向量，则有式(32)成立。

定理5给出了混合H_2/H_∞状态反馈模糊控制器的优化设计方法。

定理5 对于式(3)的多项式模糊系统和给定的标量$\gamma>0$，如果以下的优化问题

$$\min_{\boldsymbol{X}(\tilde{\boldsymbol{x}}),\boldsymbol{Y}_j(\boldsymbol{x})}\ \lambda \tag{34}$$

满足式(21)，式(26)～式(29)，式(33)存在最优解，则利用最优解$(\boldsymbol{X}^*(\tilde{\boldsymbol{x}}),\boldsymbol{Y}_j^*(\boldsymbol{x}))$，可计算式(4)的混合$H_2/H_\infty$状态反馈模糊控制器增益矩阵为

$$\boldsymbol{K}_j^*(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Y}_j^*(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{X}^*)^{-1}(\tilde{\boldsymbol{x}})\quad j=1,\cdots,r\ 。\tag{35}$$

且式(5)的闭环多项式模糊系统H_2性能的上界是λ^*。

定理5中的式(34)优化问题是一个具有平方和约束条件的参数极小化问题，即平方和优化问题，可运用Matlab SOSTOOLS工具箱进行求解[11]。

4 算例仿真

考虑如下非线性系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+x_1^2+x_1^3+x_1^2x_2-x_1x_2^2+x_2+x_1\boldsymbol{w}+x_1\boldsymbol{u}\\ \dot{x}_2==-\sin x_1-x_2\\ \boldsymbol{z}_\infty=x_1+x_1\boldsymbol{u}\end{cases}。\quad(36)$$

采用扇形非线性建模技术，建立描述式(36)的非线性系统多项式模糊模型[7]，即

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\sum_{i=1}^{2}h_i(\boldsymbol{z})[\boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{B}_{ui}(\boldsymbol{x})u+\boldsymbol{B}_{wi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}]\\ \boldsymbol{z}_\infty=\sum_{i=1}^{2}h_i(\boldsymbol{z})[\boldsymbol{C}_i(\boldsymbol{x})\hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{D}_{ui}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{D}_{wi}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{w}]\end{cases}\quad(37)$$

式中：$\boldsymbol{x}=\hat{\boldsymbol{x}}=(x_1\ \ x_2)^{\mathrm{T}}$，前件变量 $z=x_1$，$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}-1+x_1+x_1^2+x_1x_2-x_2^2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}-1+x_1+x_1^2+x_1x_2-x_2^2 & 1\\ 0.2172 & -1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_{w1}(\boldsymbol{x})=(x_1\ \ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}_{w2}(\boldsymbol{x})=(x_1\ \ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}_{u1}(\boldsymbol{x})=(x_1\ \ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}_{u2}(\boldsymbol{x})=(x_1\ \ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{D}_{w1}(\boldsymbol{x})=0$，$\boldsymbol{D}_{w2}(\boldsymbol{x})=0$，$\boldsymbol{D}_{u1}(\boldsymbol{x})=x_1$，$\boldsymbol{D}_{u2}(\boldsymbol{x})=x_1$，$\boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{x})=(1\ \ 0)$，$\boldsymbol{C}_2(\boldsymbol{x})=(1\ \ 0)$。隶属度函数分别为 $h_1(z)=\dfrac{\sin x_1+0.2172x_1}{1.2172x_1}$，$h_2(z)=\dfrac{\sin x_1-0.2172x_1}{1.2172x_1}$。

对于式(37)的多项式模糊系统，给定 $\lambda=8$，设系统初始状态为 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)=(2\ 2)^{\mathrm{T}}$，外部干扰为 $\boldsymbol{w}(t)=\sin(6t)+\cos(0.05t)$。给定加权矩阵 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}_2$，$\boldsymbol{R}=10$，根据定理 5，通过求解式(34)的平方和优化问题，可设计混合 H_2/H_∞ 状态反馈模糊控制器中的增益矩阵为

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{x})=(4.5932x_1+0.6315x_2-0.6545,\\ \qquad -0.0576x_1-0.0095x_2-0.2093)\\ \boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{x})=[4.7842x_1+0.7077x_2-0.7529,\\ \qquad -0.0603x_1-0.0090x_2-0.0303]\end{cases}。\quad(38)$$

相应闭环模糊系统的 H_2 性能的上界 $\lambda^*=370.5021$，即由式(6)描述的系统 H_2 性能指标满足 $J_2<370.5021$。

为进一步验证本文方法的有效性，分别对本文提出的混合 H_2/H_∞ 控制方法和文献[7]中的 H_∞ 控制方法进行仿真分析与比较。图 1 ~ 图 3 分别给出了式(36)的非线性系统在 H_∞ 模糊控制器以及混合 H_2/H_∞ 模糊控制器作用下的状态变化曲线和模糊控制输入量变化曲线。

由图 1 ~ 图 3 可知，H_∞ 模糊控制器以及混合 H_2/H_∞ 模糊控制器均能使式(36)的非线性系统在干扰作用下保持稳定，具有良好的干扰抑制能力。

通过进一步计算可知，在 H_∞ 模糊控制器的作用下，式(36)非线性系统的实际 H_2 性能为 625.4837；在混合 H_2/H_∞ 模糊控制器的作用下，式(36)非线性系统的实际 H_2 性能为 326.6702，从而表明与 H_∞ 控制相比，采用混合 H_2/H_∞ 控制方法能够使系统获得更好的调节性能。

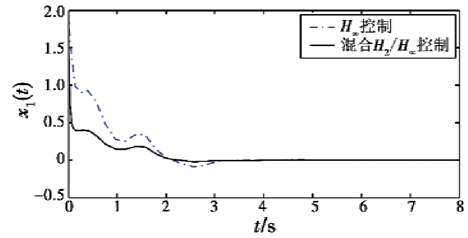

图 1　系统状态 $x_1(t)$ 变化曲线

Fig. 1　Curve of system state $x_1(t)$

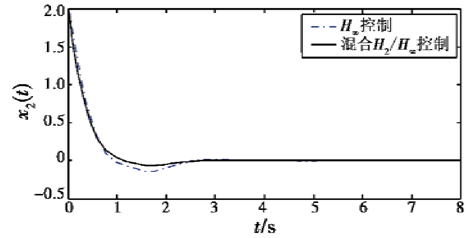

图 2　系统状态 $x_2(t)$ 变化曲线

Fig. 2　Curve of system state $x_2(t)$

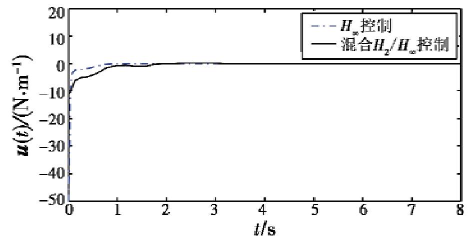

图 3　模糊控制输入 $\boldsymbol{u}(t)$ 变化曲线

Fig. 3　Curve of fuzzy control input $\boldsymbol{u}(t)$

5　结论

本文在分析多项式模糊系统 H_2 性能和 H_∞ 性能的基础上，提出了一种具有公共 Lyapunov 矩阵的多项式模糊系统混合 H_2/H_∞ 性能准则；进而，运用多项式 Lyapunov 函数与平方和优化技术，给出多项式模糊系统混合 H_2/H_∞ 状态反馈模糊控制器存在条件，并将混合 H_2/H_∞ 优化控制问题转化为一个具有多项式平方和约束的参数极小化问题，并给出了混合 H_2/H_∞ 模糊控制器优化设计方法。

参考文献

[1]　TANAKA K, YOSHIDA H, OHTAKE H, et al. A sum of squares approach to stability analysis of polynomial fuzzy systems[C]//Proceedings of the American Control Conference, New York, 2007:4071-4076.

[2]　LAM H K, WU L, LAM J. Two-step stability analysis for general polynomial-fuzzy-model-based control systems[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2015, 23(3): 511-524.

[3] FURQON R, CHEN Y J, TANAKA M, et al. Stabilization analysis of single-input polynomial fuzzy systems using control Lyapunov Functions [C]//IEEE International Conference on Fuzzy Sytstems, Beijing, 2014:907-912.

[4] TANAKA K, OHTAKE H, WANG H O. Guaranteed cost control of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B:Cybernetics, 2009, 39(2):561-567.

[5] JIANG Y, ZHAO Y. H_∞ filtering of polynomial fuzzy systems with fading measurements [C]//Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference, Nanjing, 2014:4530-4533.

[6] HAN H, HIGAKI Y. Polynomial fuzzy controller design with disturbance observer using the SOS-based approach [J]. IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering, 2015, 10(4):458-464.

[7] 马清亮,邓会选,吕康文,等.基于平方和优化的多项式模糊系统 H_∞ 控制[J].电光与控制,2014,21(10):80-84.

[8] PARRILO P A. Structured semidefinite programs and semi-algebraic geometry method in robustness and optimization [D]. California:California Institute of Technology, 2000.

[9] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, WU F. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: a Lyapunov-based approach[C]//Proceedings of the Asian Control Conference (ASCC), Melbourne, 2004:157-165.

[10] LEE K P, JEUNG E T, PARK H B. Robust fuzzy H_∞ control for uncertain nonlinear systems via state feedback: an LMI approach [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 120(1):120-134.

[11] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, PARRILO P A. Introducing SOSTOOLS: a general purpose sum of squares programming solver[C]//Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, 2002:741-746.