

LMD 结合时变 AR 模型在瞬时频率测量中的应用

杨波, 李世平, 王彬
(火箭军工程大学, 西安 710025)

摘要: 时变 AR 模型是一种新的时频分析方法, 对简单的非平稳信号瞬时频率的测量具有很高的精度, 但却不适用于复杂信号。为使时变 AR 模型同样适合于测量复杂信号的瞬时频率, 提出 LMD 和时变 AR 模型相结合的方法, 该方法使时变 AR 模型极大地扩展了适用对象。分别采用最小二乘法和卡尔曼平滑算法求解信号参数模型, 并求得信号瞬时频率, 仿真对比分析表明, 与直接用时变 AR 模型测量瞬时频率相比, 该改进方法能大大提升瞬时频率测量的准确度。

关键词: 局部均值分解; 时变 AR 模型; 最小二乘法; 瞬时频率

中图分类号: TN911 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-637X(2017)06-0106-05

Instantaneous Frequency Measurement Using LMD Together with TVAR Model

YANG Bo, LI Shi-ping, WANG Bin
(Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China)

Abstract: Time Varying Autoregressive (TVAR) model is a new method for time-frequency analysis, which has high accuracy in instantaneous frequency measurement of simple non-stationary signal. However, it is not applicable to complex signal. In order to make TVAR model also suitable for the measurements of complex signal instantaneous frequency, it is proposed to use Local Mean Decomposition (LMD) together with TVAR model. This method makes the TVAR model greatly expands its scope of application. Least square method and Kalman Smoothing (KS) algorithm are used respectively to solve the signal parameter model, and the instantaneous frequency is obtained. The simulation analysis shows that: Compared with the instantaneous frequency measurement only using TVAR model, the improved method can greatly improve the accuracy.

Key words: Local Mean Decomposition (LMD); TVAR model; RLS algorithm; instantaneous frequency

0 引言

由于科学技术水平的局限性, 前辈们理想地将研究信号设为平稳信号, 然而大部分天然和人工的信号都是非线性非平稳信号^[1], 用理想化的平稳信号处理方法存在着精度不高、实时性不强等问题, 因此研究对象不能仅局限于平稳信号。瞬时频率(IF)作为非平稳信号中的一个重要参数, 瞬时频率估计自然也就成为分析非平稳信号的一项极为重要的工作^[2]。

一般使用的时频处理方法有傅里叶变换、WVD 分析、小波分析、经验模态分解(EMD)^[3]等方法。处理方法虽有多种, 但却都有难以克服的缺陷。2005年, 英国学者 SMITH J S 在 EMD 的基础上提出了局部均

值分解(Local Mean Decomposition, LMD)^[4], 并且在脑电图信号分析中得到了很好的应用。在 20 世纪 70 年代之前, 对非平稳随机信号时变参数模型的研究已有一定的成果^[5-6], 但却难有较大进展, 直到 1983 年, GRENIER Y 将时不变的 AR 模型、ARMA 模型和 Burg 法等方法扩展为时变参数模型, 采用的方法是将模型中的时变参数用一些基函数的加权来近似, 可将线性时变非平稳问题转化为线性时不变平稳问题, 从而将非平稳信号与时变参数模型联系起来^[7], 使非平稳信号的研究得到较大的发展, 时变参数模型也就此踏入了时频分析的序列。

1 主要算法介绍

1.1 LMD 简介

相比 EMD 而言, LMD 具有一些 EMD 没有的优良品质, 如可以避免分解过程中的欠包络和过包络问题, 而

且通过分解得到的乘积函数(PF)计算不会得到负瞬时频率,在模态混叠及端点效应等方面均优于 EMD 方法,因此,LMD 方法越来越受到国内外学者的广泛关注。

LMD 方法的实质^[8]是将原始信号分解为若干个瞬时频率具有物理意义的 PF 分量之和,其中,每一个 PF 分量由一个包络信号和一个纯调频信号相乘得到,包络信号就是该 PF 分量的瞬时幅值。

LMD 分解是完备的,没有造成原始信号的信息丢失。其总体思路是将一个复杂的非平稳信号自适应地分解成有限个平稳的单分量信号,分解顺序也都是从高频至低频,直至残余分量为一个单调函数后分解结束。

对任意的非平稳信号,分解过程^[9]如下。

1) 设待分析的信号为 $x(t)$,找出其所有的局部极值点 $n_i(i=1,2,\dots)$,并求出所有相邻的两个局部极值的平均值,记为 m_i ,则

$$m_i = (n_i + n_{i+1})/2 \quad (1)$$

将所有相邻的两个均值点 m_i 和 m_{i+1} 用折线连起来,然后用滑动平均法将其进行平滑处理,得到局部均值曲线 $m_{11}(t)$ 。

2) 计算出包络估计值

$$a_i = |n_i - n_{i+1}|/2 \quad (2)$$

将所有相邻的两个包络估计值 a_i 和 a_{i+1} 用折线连接起来,再采用滑动平均进行处理,得到包络估计曲线 $a_{11}(t)$ 。

3) 将局部均值曲线 $m_{11}(t)$ 从原始信号中分离出来,得到信号 $h_{11}(t)$,即

$$h_{11}(t) = x(t) - m_{11}(t) \quad (3)$$

4) 用 $h_{11}(t)$ 除以包络估计函数 $a_{11}(t)$,得到调频信号 $s_{11}(t)$,即

$$s_{11}(t) = h_{11}(t)/a_{11}(t) \quad (4)$$

判断 $s_{11}(t)$ 是否为纯调频信号,如果不是,则将 $s_{11}(t)$ 作为新的原始信号重复以上步骤,直到 $s_{1n}(t)$ 为纯调频信号为止,即 $s_{1n}(t)$ 的包络估计函数 $a_{1(n+1)}(t) = 1$ 。迭代停止的条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{1n}(t) = 1 \quad (5)$$

实际应用中,在不影响分解效果的前提下,为了减少迭代次数,节省运算时间,可以事先设定一个变动量 δ ,当 $1 - \delta \leq a_{1n}(t) \leq 1 + \delta$ 时,迭代停止。 δ 的取值范围需要针对具体的信号类型和应用要求来确定,一般情况下 δ 取值为 0.001 ~ 0.01 比较合理, δ 的取值越小,LMD 的分解精度就越高,计算量也就会越大。

5) 将迭代过程中产生的所有包络估计函数做乘积,得到包络信号

$$a_1(t) = a_{11}(t)a_{12}(t)\cdots a_{1n}(t) \quad (6)$$

6) 将得到的包络信号 $a_1(t)$ 与纯调频信号 $s_{1n}(t)$

做乘积,得到原始信号的第一个 PF 分量为

$$PF_1(t) = a_1(t)s_{1n}(t) \quad (7)$$

它包含了原始信号中最高频率成分,是一个单分量的调幅-调频信号。

7) 将分量 $PF_1(t)$ 从原始信号中分离出来,得到信号 $u_1(t)$,再将 $u_1(t)$ 作为新的原始信号,重复步骤 1) ~ 7),循环 k 次,直到 $u_k(t)$ 为一个单调函数为止。

综上所述

$$x(t) = \sum_{i=1}^k PF_i(t) + u_k(t) \quad (8)$$

可以明显看出,LMD 分解是完备的,没有造成原始信号的信息丢失。

LMD 分解方法的总体思路是将一个复杂的非平稳信号自适应地分解成有限个平稳的单分量信号,分解顺序也都是从高频至低频,直至残余分量为一个单调函数后分解结束。

1.2 时变 AR 模型

1.2.1 时变 AR 模型存在条件

设 $x(t)$ 是一个非平稳信号,可以将它视为白噪声 $u(t)$ 激励一个因果线性时变系统 $H(z)$ 的输出,即

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(t)u(t-k) \quad (9)$$

式中, $h_k(t)$ 是此系统的时变脉冲响应。用时变 AR 模型则可以表示为

$$x(t) + a_1(t-1)x(t-1) + \cdots + a_p(t-p)x(t-p) = b_0(t)u(t) \quad (10)$$

GRENIER Y 提出存在以下定理。

定理 1 当且仅当存在整数 n ,函数 $a_1(t), \dots, a_n(t)$ 满足 $h_i(t) + B(a_1(t)h_{i-1}(t)) + \cdots + B^n(a_n(t)h_{i-n}(t)) = 0$, $\forall i \geq n$ 时,式(9)的输入输出关系可以用式(10)表示。其中, B 表示延时算子,即

$$\begin{cases} [B(f)](t) = f(t-1) \\ [B^2(f)](t) = f(t-2) \\ \vdots \\ [B^n(f)](t) = f(t-n) \end{cases} \quad (11)$$

另一个关于时变 AR 模型是否存在的方法是利用 $x(t)$ 的自相关函数

$$R(t,s) = E(x(t),x(s)) \quad (12)$$

HUANG N C 和 AGGARWAL J K 提出了另一个存在定理。

定理 2 当且仅当存在整数 n 和函数 $x_i(t), \psi_i(s)$ 满足 $R(t,s) = \sum_{i=1}^n x_i(t)\psi_i(s)$ 时, $x(t)$ 可以像式(10)那样由一个白噪声激励的时变 AR 模型表示。

1.2.2 时变 AR 模型参数求解

式(10)简化为

$$x(t) + [\mathbf{x}^T(t-1), \dots, \mathbf{x}^T(t-p)]\boldsymbol{\theta} = b_0(t)u(t) \quad (13)$$

其中,

$$\boldsymbol{\theta} = [a_{10}, \dots, a_{1m}, a_{20}, \dots, a_{2m}, \dots, a_{p0}, \dots, a_{pm}]^T \quad (14)$$

参数 $\boldsymbol{\theta}$ 是 $x(t)$ 的 p 个过去采样值上的自回归。

文献[7]中提出了用协方差、相关函数法来估计模型的时变参数,但这些方法的数据存贮量和计算量会随着测量数据的增加而增大,给实际应用带来很大的不便。以下是递推最小二乘(RLS)算法求解模型的时变参数的原理。

在式(13)中,当增益 $b_0(t)$ 为常数时(如 $b_0(t) = 1$), $u(t)$ 可视为预测误差,即

$$u(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (15)$$

式中, $\hat{x}(t) = E[x(t) | \mathbf{x}(t-1), \dots, \mathbf{x}(t-p)]$ 是利用过去值对 $x(t)$ 的预测,为

$$\hat{x}(t) = -[\mathbf{x}^T(t-1), \dots, \mathbf{x}^T(t-p)]\boldsymbol{\theta} \quad (16)$$

采用误差 $u(t)$ 的方差最小的优化准则求 $\boldsymbol{\theta}$, 令 $u(t)$ 的方差对未知 $\boldsymbol{\theta}$ 的梯度为 0, 有

$$E[\text{grad}_{\boldsymbol{\theta}} u(t)] = 0 \quad (17)$$

而

$$\text{grad}_{\boldsymbol{\theta}} u(t) = [\mathbf{x}^T(t-1), \dots, \mathbf{x}^T(t-p)]^T$$

这样即可求得最佳的 $\boldsymbol{\theta}$, 它为下式的解, 即

$$E \left[\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t-p) \end{bmatrix} [\mathbf{x}^T(t-1), \dots, \mathbf{x}^T(t-p)] \right] \boldsymbol{\theta} = -E \left[\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t-p) \end{bmatrix} x(t) \right] \quad (18)$$

上式便是 Yule-Walker 方程。

式(17)是通过 $u(t)$ 的方差最小化求得的, 而 $u(t)$ 是平稳的白噪声。这样, 式(1)的数学期望可以由随机平稳遍历性取时间平均量来估计。因此, 由式(18)有

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\alpha} \quad (19)$$

$$\text{式中: } \mathbf{A} = \sum_{t=1}^N \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t-p) \end{bmatrix} [\mathbf{x}^T(t-1), \dots, \mathbf{x}^T(t-p)];$$

$$\boldsymbol{\alpha} = -\sum_{t=1}^N \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t-1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(t-p) \end{bmatrix} x(t)。$$

由式(18)可得

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha} \quad (20)$$

应用 RLS, 参数 $\boldsymbol{\theta}$ 可递推为

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\theta}}_N = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{N-1} + \mathbf{K}_N(\mathbf{x}_N + \mathbf{Y}_{N-1}^T \boldsymbol{\theta}_{N-1}) \\ \mathbf{K}_N = -\mathbf{P}_{N-1} \mathbf{Y}_{N-1} / \mathbf{Q}_{N-1} \\ \mathbf{Q}_{N-1} = 1 + \mathbf{Y}_{N-1}^T \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{Y}_{N-1} \\ \mathbf{P}_N = \mathbf{P}_{N-1} - \mathbf{P}_{N-1} \mathbf{Y}_{N-1} \mathbf{Q}_{N-1}^{-1} \mathbf{Y}_{N-1}^T \mathbf{P}_{N-1} \end{cases} \quad (21)$$

式中: 矩阵 \mathbf{Y}_N 定义为 $\mathbf{Y}_N^T = [\mathbf{x}^T(N-1), \dots, \mathbf{x}^T(N-p)]$;

矩阵 \mathbf{P}_N 定义为 $\mathbf{P}_N = \left(\sum_{t=1}^N \mathbf{Y}_{t-1} \mathbf{Y}_{t-1}^T \right)^{-1}$ 。

使用 RLS 求解时占用的存储空间少, 计算简便, 对时变 AR 模型的求解是一种较好的方法。

1.2.3 基于 AR 模型的瞬时频率的求解

对于时变 AR 模型, 在求得模型参数后, 常用的瞬时频率测量方法有以下两种。

1) 求出功率谱峰值所对应的频率和时间 t , 得到信号的频率-时间变化图。

2) 求解多项式

$$A(z, t) = 1 + a_1(t)z^{-1} + \dots + a_n(t)z^{-p} = 0 \quad (22)$$

式中, $z = e^{j\omega}$, 得到根为 z_1, z_2, \dots, z_p 。

由 $f_i(t) = \text{angle}(z_i(t)) \cdot f_s / 2\pi$ 即可得到瞬时频率, 其中, z_i 为所有根中距离单位圆最近的根的值, f_s 为采样频率。

2 LMD 结合时变 AR 模型瞬时频率测量

2.1 改进算法的原理及流程

传统的时变 AR 模型对简单的信号进行测量能取得较好的效果, 但对复杂信号, 误差则相对较大。针对此问题, 本文提出将 LMD 与时变 AR 模型相结合的方法测量非平稳信号的瞬时频率。由于 LMD 能将信号分解为简单的 PF 分量, 且此 PF 分量为平稳的单分量信号, 因此将 LMD 与时变 AR 模型相结合能扩展传统时变 AR 模型的应用范围。

此方法首先对复杂多分量信号进行预处理, 利用 LMD 将信号分解为简单的 PF 分量, 然后对各个 PF 分量利用时变 AR 模型来求解瞬时频率。

具体流程如下:

- 1) 对被测原始非平稳信号 $x(t)$ 做 LMD 分解, 得到各个 PF 分量;
- 2) 剔除 PF 分量中的虚假成分, 得到包含真实信号频率的 PF 分量;
- 3) 对各个有效的 PF 分量使用时变 AR 模型求解瞬时频率, 即求得信号的瞬时频率。

2.2 仿真分析

设有一个含有噪声功率为 0.2 的较复杂的非平稳信号, 其表达式为

$$x(t) = \sin(2\pi(20t)t) + \sin(200\pi t) + 0.5\cos(100\pi t) \quad (23)$$

选取时间范围为 $0 \leq t < 0.256$ s, 采样频率为 $f_s = 1$ kHz, 抽样点为 256 个点。信号的瞬时频率分别为 $f_1 = 40$ Hz, $f_2 = 100$ Hz, $f_3 = 50$ Hz。

原始信号如图 1 所示。

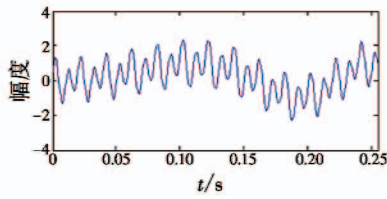


图 1 原始信号图像
Fig.1 Original signal

2.2.1 直接利用时变 AR 模型进行测量分析

为对比显示出改进方法的效果,首先对该原始信号直接利用时变 AR 模型求解瞬时频率。选用模型阶数为 4,实验中采用的基函数为傅里叶基函数,即

$$f_j(k) = \begin{cases} \cos kw_j \\ \sin kw_j \end{cases} \circ$$

基函数阶数为 3,利用 RLS 算法及文献[10]中采用的卡尔曼平滑(KS)算法求解原始信号的时变 AR 模型的参数模型,再直接进行瞬时频率的求解,并做对比,其结果如图 2 所示。

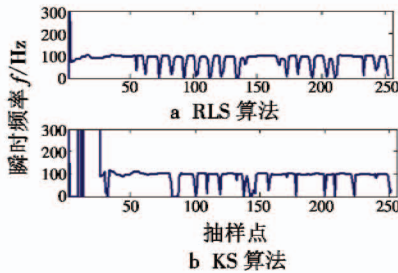


图 2 直接使用时变 AR 模型测量的瞬时频率
Fig.2 Instantaneous frequency when using time-varying AR model directly

从图中可以看出,直接使用时变 AR 模型对原始信号进行求解时,瞬时频率存在较大的失真,线性低频及份量较小的 50 Hz 部分被覆盖,严重影响了对信号真实频率的测量和判断。

2.2.2 基于 LMD 和时变 AR 模型相结合的频率测量
首先对信号进行 LMD 分解,其结果如图 3 所示。

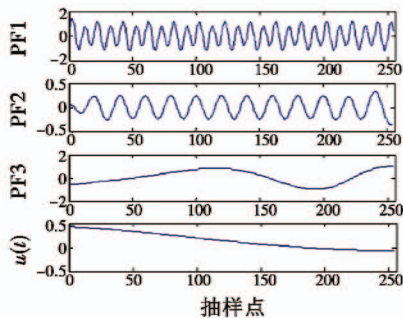


图 3 LMD 对原始信号的分解结果

Fig.3 Original signal decomposition result with LMD

由图 3 可知,前 3 个分量可以反映出信号包含的真实频率,而第 4 个分量为残余分量,属虚假模态,对

后续的瞬时频率分析会造成干扰,因此应剔除第 4 个分量。

使用时变 AR 模型对信号各有效分量进行瞬时频率的求解,并做对比,其结果如图 4 所示。

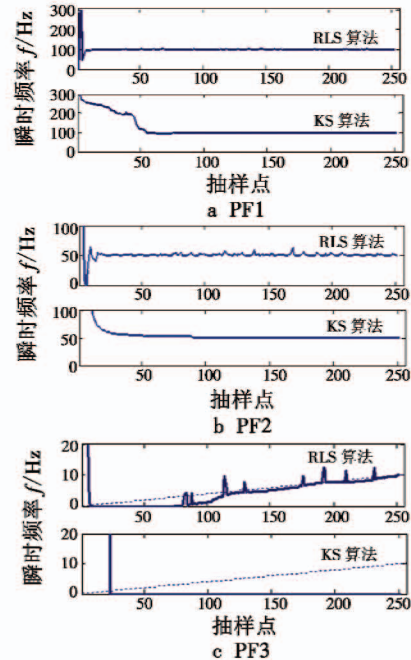


图 4 两种算法求解参数模型后测得的瞬时频率

Fig.4 Instantaneous frequency obtained by using the two algorithms

图 4 分别为基于时变 AR 模型对 PF1,PF2 和 PF3 的瞬时频率测量,从图中可以观察到:利用改进方法对信号进行分解之后,测得的 PF1 和 PF2 的瞬时频率分别为 100 Hz 和 50 Hz,而且 RLS 算法的收敛速度明显快于 KS 算法,RLS 算法在中间时刻的测量虽有小范围波动,但不影响瞬时频率的测量;而对于 PF3 的测量,可以看出,KS 算法对低频的分辨率较低,RLS 方法测量更加接近虚线(真实频率曲线)。

由此可知,直接使用时变 AR 模型无法准确测量复杂的非平稳信号,改进方法仿真结果几乎和理论结果完全一致,只是在线性部分的频率测量产生小量误差,原因在于 LMD 分解时存在的端点效应及噪声对低频信号的影响。虽产生了小量误差,但不影响实验结果的准确性。

3 结论

针对时变 AR 模型对复杂非平稳信号测量瞬时频率精度不高的问题,本文提出了一种基于 LMD 结合时变 AR 模型测量非平稳信号瞬时频率的算法。首先深入研究了时变 AR 模型的参数求解和基于时变 AR 模型的瞬时频率测量方法,然后通过仿真,采用 RLS 和 KS 算法分别求得原始信号及 3 个有效分量的参数模

型并分别求出瞬时频率,分析对比得出:改进方法大大提升了利用时变 AR 模型测量复杂非平稳信号瞬时频率的精度,并进一步拓展了时变 AR 模型的使用范围。

参 考 文 献

- [1] 刘立君,王奇,杨克己,等. 基于 EMD 和频谱校正的故障诊断方法[J]. 仪器仪表学报,2011, 32(16): 1278-1283.
- [2] 张贤达,保铮. 非平稳信号分析与处理[M]. 北京:国防工业出版社,1998.
- [3] HUANG N E, SHEN Z, LONG S R, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis[J]. Proceedings of the Royal Society A, Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1998, 1971(454): 903-995.
- [4] SMITH J S. The local mean decomposition and its application to EEG perception data[J]. Journal of the Royal Society Interface, 2005, 2(5): 443-454.
- [5] RAO T S. The fitting of non-stationary time-series models

with time dependent parameters[J]. Journal of the Royal Statistical Society; Series B, 1970, 32(2): 312-322.

- [6] AUGER F, FLANDRIN P. Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43(5): 1068-1089.
- [7] GRENIER Y. Time-dependent ARMA modeling of nonstationary signals[J]. IEEE Transactions on ASSP, 1983, 31(4): 899-911.
- [8] 程军圣,张亢,杨宇,等. 局部均值分解与经验模式分解的对比研究[J]. 振动与冲击,2009, 28(5): 13-16.
- [9] 张淑清,孙国秀,李亮,等. 基于 LMD 近似熵和 FCM 聚类的机械故障诊断研究[J]. 仪器仪表学报,2013, 34(3): 714-720.
- [10] KHAN M E, DUTT D N. An expectation-maximization algorithm based Kalman smoother approach for Event-Related Desynchronization (ERD) estimation from EEG [J]. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 2007, 54(7): 1191-1198.

(上接第 64 页)

由图 7 可知,在假定的战场态势下,为确保反舰导弹可靠分辨预定目标,当攻击方向不同时,其自导距离不应超过图 7 所示的对应曲线。

5 结 论

反舰导弹攻击编队目标时,导弹攻击方向、自导距离、目标与非目标的位置及相互运动关系、导弹射击误差直接影响导弹末制导雷达“视场”内目标与非目标的距离差和角度差,从而影响导弹对预定目标的选择。

1) 自导距离一定的条件下,即便敌编队位置固定,导弹末制导雷达“视场”内目标和非目标的距离差和角度差也会随攻击方向的变化而明显变化。

2) 攻击方向一定的条件下,由于敌编队内各舰船的相对运动和位置变化,导弹末制导雷达“视场”内目标和非目标的距离差和角度差随攻击方向的变化而明显变化。

3) 反舰导弹打击编队目标时,攻击方向、自导距离、目标机动、射击误差共同决定导弹末制导雷达“视场”内目标和非目标的距离差和角度差,影响目标的分辨和选择。

4) 为确保目标选择的正确性,应协调确定反舰导弹的攻击方向和自导距离。即自导距离应根据不同的攻击方向,在确保目标与非目标距离差和角度差满足末制导雷达分辨力要求的前提下合理选择。

参 考 文 献

- [1] 毕开波,董受全,张翼飞. 队形识别技术对反舰导弹作

战使用的影响分析[J]. 飞航导弹,2015(12): 25-29.

- [2] 刘永,杨健,朱剑,等. 反舰导弹制导技术发展综述[J]. 计算机仿真,2016, 33(2): 10-16.
- [3] 佟海鹏,孔键,章水林. 复杂电磁环境下岸舰导弹技术特点及应用[J]. 飞航导弹,2010(11): 48-51.
- [4] 卢毅,姜永华,翟龙军,等. 空舰导弹获取舰艇编队形状能力研究[J]. 航空学报,2011, 32(1): 145-155.
- [5] 张国栋,黄亮,刘忠. 基于目标运动特征和 TOPSIS 决策的多目标选择方法[J]. 海军工程大学学报,2014, 26(1): 103-107.
- [6] 董受全,宋伟. 基于空间方向相似性的编队队形识别算法[J]. 火力与指挥控制,2010, 35(11): 167-169.
- [7] 卢毅,姜永华. 反舰导弹对目标选择的一种新方法[J]. 航空学报,2010, 31(4): 778-784.
- [8] 司洪利,卢毅. 基于编队形状的反舰导弹预定目标选择模型特点[J]. 海军航空工程学院学报,2012, 27(6): 669-673.
- [9] 姜永华,但波,李敬军. 基于目标速度信息的海上编队目标选择技术[J]. 战术导弹技术,2013(1): 47-51.
- [10] 宁云晖,范晓虹,李欣. 在编队机动转向状态下选择指定目标的一种新方法[J]. 火力与指挥控制,2013, 38(3): 120-123.
- [11] 陈榕,沈培志,张海峰,等. 多型反舰导弹协同攻击岛礁区目标攻击方向研究[J]. 电光与控制,2016, 23(5): 22-25.
- [12] 陈邓安,卢毅,吴杰. 基于最优选择点的预定目标选择方法[J]. 弹箭与制导学报,2012, 32(2): 49-52.
- [13] 埃博哈德·蔡德勒. 数学指南——实用数学手册[M]. 李文林,译. 北京:科学出版社,2015.