

## 一种改进的重叠式三子样圆锥误差补偿算法

杨浩天, 汪立新, 王琪, 孙田川  
(火箭军工程大学, 西安 710025)

**摘要:** 针对增加子样数会降低系统姿态更新频率、引入较大的圆锥误差, 提高采样频率会增加导航计算机的硬件负担的问题, 提出一种改进的圆锥误差补偿算法。利用前两个计算周期陀螺输出的角增量信息和当前时刻陀螺采样值通过重叠式采样的方式进行圆锥误差补偿, 详细推导了重叠式三子样补偿算法的公式, 根据算法误差最小准则得到补偿系数。该算法不仅提高了系统姿态更新频率, 而且减少了由等效旋转矢量算法引入的圆锥误差, 达到了提高姿态解算精度的目的。

**关键词:** 捷联惯导系统; 圆锥误差; 重叠式采样; 姿态算法; 误差最小准则

**中图分类号:** U666 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-637X(2017)03-0020-04

## An Improved Superimposed Three-Sample Coning Error Compensation Algorithm

YANG Hao-tian, WANG Li-xin, WANG Qi, SUN Tian-chuan  
(Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China)

**Abstract:** In view of the problems that increasing the sample number will reduce system attitude updating frequency and bring large coning error, while enhancing sampling frequency will increase the burden of navigation computer hardware, we proposed a modified conic error compensation algorithm. The angle increment information of the first two cycles' gyro output and the gyro sampling values of the current moment are used for coning error compensation by means of superimposed sampling, and the compensation factors are obtained according to the principle of minimum error. The algorithm not only improves system attitude updating frequency, but also reduces the coning error caused by equivalent rotation vector method. Therefore, the precision of attitude algorithm is improved.

**Key words:** SINS; coning error; superimposed sample; attitude algorithm; principle of minimum error

### 0 引言

姿态更新算法是捷联惯导系统算法的核心, 而刚体有限转动的不可交换性是姿态解算的一个主要误差源, 在较恶劣的动态环境中, 捷联惯导系统存在较大的圆锥误差, 需要对其进行圆锥补偿。

国内外学者对圆锥误差补偿算法进行了大量研究: 文献[1-2]提出了等效旋转矢量概念, 为姿态更新多子样算法提供了理论依据; 文献[3]针对旋转矢量法进行系统姿态解算时存在的圆锥误差, 提出了一种利用前  $M$  个周期输出的  $N$  子样通用补偿算法; 文献

[4]通过分析陀螺仪输出数据的相关性, 提出一种基于间隔子样的圆锥误差补偿方法, 对旋转矢量进行了修正; 文献[5]考虑圆锥运动幅值特性, 利用最小二乘法估计圆锥补偿算法的加权系数, 得到一种新的捷联惯导系统圆锥误差补偿算法; 文献[6]推导出基于角增量和角速率的两种旋转矢量算法及计算误差, 证明了圆锥补偿误差随采样频率和圆锥运动的比值定量变化; 文献[7]给出了一种新的角速率输入圆锥误差补偿结构, 并且定义了姿态算法的性能评价模型; 文献[8]对圆锥误差引起的速度误差进行了研究, 详细推导了新的二子样更新补偿算法。

现有圆锥误差补偿算法已经相当成熟, 但是存在的问题有: 相同采样频率下增加子样数, 会降低 SINS 姿态更新频率; 而要保持姿态更新频率, 就要提高采样频率, 会增加导航计算机硬件负担, 因此, 本文基于文

收稿日期: 2016-03-22 修回日期: 2016-04-01

基金项目: 国家自然科学基金(61174030)

作者简介: 杨浩天(1991—), 男, 陕西西安人, 硕士生, 研究方向为半球谐振陀螺 IMU 导航算法与误差分析。

献[9-10]提出一种改进的重叠式三子样圆锥误差补偿算法,与传统算法相比,在提高姿态更新频率的基础上还提高了圆锥误差的补偿精度。

## 1 旋转矢量与经典圆锥误差补偿算法

在捷联惯导系统中,姿态更新是将角增量信息从机体坐标系转化为导航坐标系,两个坐标系之间的角运动关系可以用刚体的旋转矢量法来表示。刚体在空间做有限转动时,角增量虽然微小,但不能视为无穷小。因此,其空间角位置与旋转次序有关,即存在不可交换性误差。设 $\Phi$ 为载体的旋转矢量,等效旋转矢量微分方程<sup>[1]</sup>为

$$\dot{\Phi} = \hat{w} + \frac{1}{2} \Phi \times \hat{w} + \frac{1}{\phi^2} \left[ 1 - \frac{\phi \sin \phi}{2(1 - \cos \phi)} \right] \Phi \times (\Phi \times \hat{w}) \quad (1)$$

式中: $\hat{w}$ 为载体运动的角速度; $\phi = \sqrt{\Phi^T \Phi}$ 为旋转矢量的模,方程右边第2项和第3项之和即为不可交换误差,当 $\Phi$ 是微小量时

$$\dot{\Phi} = \hat{w} + \frac{1}{2} \Phi \times \hat{w} + \frac{1}{12} \Phi \times (\Phi \times \hat{w}) \quad (2)$$

基于四元数微分方程姿态的更新算法在捷联惯导系统被广泛应用,即

$$\dot{Q}(t) = \frac{1}{2} Q(t) \otimes \hat{w} \quad (3)$$

式中: $Q$ 表示 $t$ 时刻的姿态四元数; $\otimes$ 表示叉乘。

由空间矢量与四元数的关系可得,在 $t_k$ 时刻的四元数为

$$Q(t_k) = Q(t_{k-1}) \otimes q(h) \quad (4)$$

设 $q(h)$ 为时间 $t_k$ 到 $t_k+h$ 的更新四元数,即

$$q(h) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \frac{\Phi}{\phi} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (5)$$

假设经典圆锥运动描述为

$$\Phi = (0 \quad a \cos wt \quad a \sin wt)^T \quad (6)$$

式中: $a$ 为圆锥运动幅值; $w$ 为运动频率。

从而可以得到描述圆锥运动的角速度矢量为

$$\hat{w} = \left( -2w \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \quad -w \sin a \sin wt \quad w \sin a \cos wt \right)^T \quad (7)$$

由文献[5]可得更新四元数 $q(h)$ 为

$$q(h) = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\sin^2\left(\frac{wh}{2}\right) \\ -\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\sin^2(wh) \\ -\sin^2 a \sin\left(\frac{wh}{2}\right)\sin\left(w\left(t + \frac{h}{2}\right)\right) \\ \sin^2 a \sin\left(\frac{wh}{2}\right)\cos\left(w\left(t + \frac{h}{2}\right)\right) \end{pmatrix} \quad (8)$$

若 $\phi$ 为微小量,则 $\sin\frac{\phi}{2} \approx \frac{\phi}{2}$ ,故有

$$q_i = \frac{\phi_i}{2} \quad i=1,2,3 \quad (9)$$

式中: $q_i$ 中的 $i=1,2,3$ ,表示四元数中向量部分的数;而 $\phi_i$ 对应的是坐标系的 $x,y,z$ 轴。

$$\Phi_i = 2q_i \quad (10)$$

则由式(8)、式(10)得

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\sin^2(wh) \\ -\sin^2 a \sin\left(\frac{wh}{2}\right)\sin\left(w\left(t + \frac{h}{2}\right)\right) \\ \sin^2 a \sin\left(\frac{wh}{2}\right)\cos\left(w\left(t + \frac{h}{2}\right)\right) \end{pmatrix} \quad (11)$$

假设在一个周期中采样 $N$ 次,则第 $i$ 次陀螺采样角增量为

$$\theta_i = \int_{t+\frac{(i-1)h}{N}}^{t+\frac{ih}{N}} \hat{w}(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N}(wh)\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \\ -\sin a \sin\left(\frac{wh}{2N}\right)\sin\left(w\left(t + \frac{2i-1}{2N}h\right)\right) \\ \sin a \sin\left(\frac{wh}{2N}\right)\cos\left(w\left(t + \frac{2i-1}{2N}h\right)\right) \end{pmatrix} \quad i=1,2,\dots,N \quad (12)$$

前面第 $k$ 个周期的增量

$$\theta^k = \int_{t+\frac{(k-1)h}{N}}^{t+\frac{kh}{N}} \hat{w}(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} -(wh)\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \\ -\sin a \sin\left(\frac{wh}{2}\right)\sin\left(w\left(t - kh + \frac{h}{2}\right)\right) \\ \sin a \sin\left(\frac{wh}{2}\right)\cos\left(w\left(t - kh + \frac{h}{2}\right)\right) \end{pmatrix} \quad (13)$$

文献[11]推导出传统的圆锥误差补偿算法

$$\Delta\Phi = \theta + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^N K_{ij}(\theta_i \times \theta_j) \quad (14)$$

文献[12]提出利用前一周期角增量的算法,精度有所提高,其补偿算法公式为

$$\Delta\Phi = \theta + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^N K_{ij}(\theta_i \times \theta_j) + G(\theta' \times \theta) \quad (15)$$

## 2 改进的圆锥误差补偿算法

本文利用重叠式采样得到的前两个周期的角增量信息,对圆锥误差进行补偿。

$$\Delta\Phi = \theta + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j>i}^N K_{ij}(\theta_i \times \theta_j) + P(\theta' \times \theta) + Q(\theta'' \times \theta) \quad (16)$$

式中: $\Delta\Phi$ 为实际计算的等效旋转矢量; $\theta$ 为当前周期

的角增量;  $\theta_i$  为第  $i$  次采样的角增量;  $\theta'$ ,  $\theta''$  为前两个周期的角增量;  $P$ ,  $Q$  为相应的权重。

经典采样法的原理见图 1, 在完成圆锥误差补偿周期  $h_k$  后, 需要等待  $N$  个采样周期才能进行下一步的补偿, 本文提出一种改进的采样方式: 只需要等待一个采样周期  $\Delta\theta_{n+1}$ , 即可与  $\Delta\theta_2, \Delta\theta_3, \dots, \Delta\theta_n$  构成新的  $N$  子样, 完成补偿周期  $h_{k+1}$ , 如图 2 所示。

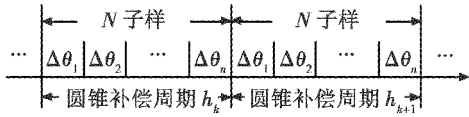


图 1 经典采样法原理图

Fig. 1 Schematic diagram of classical sampling method

$$\Delta\Phi = \begin{pmatrix} -2(wh)\sin^2\left(\frac{a}{2}\right) \\ -2\sin\left(\frac{wh}{2}\right)\sin\left(w\left(t - \frac{h}{2}\right)\right) \\ 2\sin\left(\frac{wh}{2}\right)\cos\left(w\left(t - \frac{h}{2}\right)\right) \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N K_{ij} \begin{pmatrix} 4\sin^2\text{asin}^2\left(\frac{wh}{2N}\right)\sin\left(\frac{j-i}{N}wh\right) \\ -\frac{8}{N}(wh)\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\sin\text{asin}\left(\frac{wh}{2N}\right)\sin\left(\frac{j-i}{N}wh\right)\sin\left(w\left(t + \frac{j+i-1}{2N}h\right)\right) \\ \frac{8}{N}(wh)\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\sin\text{asin}\left(\frac{wh}{2N}\right)\sin\left(\frac{j-i}{N}wh\right)\cos\left(w\left(t + \frac{j+i-1}{2N}h\right)\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\sin^2\text{asin}^2\left(\frac{wh}{2}\right)\sin(wh) \\ -8(wh)\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\sin\text{asin}^2\left(\frac{wh}{2}\right)\sin wt \\ 8(wh)\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\sin\text{asin}^2\left(\frac{wh}{2}\right)\cos wt \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} 4\sin^2\text{asin}^2\left(\frac{wh}{2}\right)\sin 2wh \\ -8(wh)\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\sin\text{asin}\left(\frac{wh}{2}\right)\sin wh\sin\left(w\left(t - \frac{h}{2}\right)\right) \\ 8(wh)\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\sin\text{asin}\left(\frac{wh}{2}\right)\sin wh\cos\left(w\left(t - \frac{h}{2}\right)\right) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

由式中比较可知, 只有  $x$  轴含有直流分量, 将其定义为

$$\phi_s = \Delta\Phi_1 - \phi_1. \quad (19)$$

基于使算法误差的低次幂项为零, 以达到使算法误差最小的准则, 推导改进算法的补偿项系数及相应算法直流分量误差

$$\begin{aligned} \phi_s &= \frac{1}{2}a^2 \left[ wh - \sin wh - 8K_{N-2,N-1} \times \sin\left(\frac{wh}{2N}\right) \cdot \right. \\ &\sin\left(\frac{wh}{2N}\right) - 8K_{N-2,N} \times \sin\left(\frac{wh}{2N}\right)\sin\left(\frac{wh}{N}\right) - 8K_{N-1,N} \times \\ &\sin\left(\frac{wh}{2N}\right)\sin\left(\frac{wh}{2N}\right) - 8P\sin^2\left(\frac{wh}{2}\right)\sin wh - \\ &\left. 8Q\sin^2\left(\frac{wh}{2}\right)\sin 2wh \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

对上式三角函数进行高阶泰勒展开可得

$$\begin{aligned} \phi_s &= \frac{1}{2}a^2 \left[ \left( \frac{1}{6} - \frac{K_{N-2,N-1} + K_{N-1,N}}{27} - \frac{2}{27}K_{N-2,N} - \right. \right. \\ &2P - 4Q \left. \right) (wh)^3 + \left( \frac{K_{N-2,N-1} + K_{N-1,N}}{486} + \frac{K_{N-2,N}}{81} + \right. \\ &\left. \frac{2}{3}P + 3Q - \frac{1}{120} \right) (wh)^5 + \left( -\frac{K_{N-2,N-1} + K_{N-1,N}}{45641} - \right. \\ &\left. \frac{K_{N-2,N}}{2861} - \frac{P}{32} + \frac{61}{80}Q \right) (wh)^7 + \left( \frac{K_{N-2,N-1} + K_{N-1,N}}{9988638} + \right. \end{aligned}$$

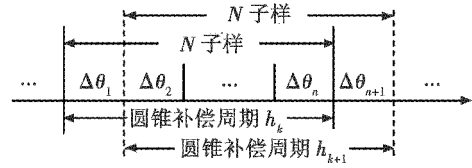


图 2 重叠式采样法原理图

Fig. 2 Schematic diagram of superimposed sampling method

由式(16)可得本文所提出改进三子样算法的算式

$$\Delta\Phi = \theta + K_{n-2,n-1}(\theta_{n-2} \times \theta_{n-1}) + K_{n-2,n}(\theta_{n-2} \times \theta_n) + K_{n-1,n}(\theta_{n-1} \times \theta_n) + P(\theta' \times \theta) + Q(\theta'' \times \theta) \quad (17)$$

式中:  $\theta_{n-2}, \theta_{n-1}, \theta_n$  为重叠式三子样的采样值;  $K_{ij}$  为补偿系数, 其余参量与前述一致。

将式(12)、式(13)代入式(17)中, 可得

$$\begin{aligned} &\left( \frac{K_{N-2,N}}{401081} + \frac{P}{508} + \frac{Q}{20} \right) (wh)^9 + \left( -\frac{K_{N-2,N-1} + K_{N-1,N}}{6122200320} + \right. \\ &\left. \frac{K_{N-2,N}}{191318760} - \frac{P}{34560} - \frac{Q}{1080} \right) (wh)^{11} + o((wh)^{11}) \quad (21) \end{aligned}$$

令  $(wh)^3, (wh)^5, (wh)^7, (wh)^9$  各项系数为零, 可得等式

$$\begin{cases} \frac{1}{6} - \frac{K_{N-2,N-1} + K_{N-1,N}}{27} - \frac{2}{27}K_{N-2,N} - 2P - 4Q = 0 \\ \frac{K_{N-2,N-1} + K_{N-1,N}}{486} + \frac{K_{N-2,N}}{81} + \frac{2}{3}P + 3Q - \frac{1}{120} = 0 \\ -\frac{K_{N-2,N-1} + K_{N-1,N}}{45641} - \frac{K_{N-2,N}}{2861} - \frac{P}{32} + \frac{61}{80}Q = 0 \\ \frac{K_{N-2,N-1} + K_{N-1,N}}{9988638} + \frac{K_{N-2,N}}{401081} + \frac{P}{508} + \frac{Q}{20} = 0 \end{cases}. \quad (22)$$

求解方程组可得各项系数:  $K_{N-2,N-1} + K_{N-1,N} =$

$$\frac{911}{197}; K_{N-2,N} = -\frac{105}{4988}; P = -\frac{89}{54409}; Q = \frac{14}{249153}. \quad \text{当系}$$

数满足上述条件时,  $\phi_s$  的估计误差精度  $\frac{a^2(wh)^{11}}{396661065}$ , 从理论上讲, 相较于文献[5]精度略有提高, 而改进算法的更新频率提高了 4 倍, 相较于文献[9]的流水式三子样算法精度提高了 4 个数量级。

### 3 仿真实验与结果分析

#### 3.1 定性及定量分析

为了验证本文提出的改进算法的有效性,首先比较不同算法圆锥误差补偿系数及漂移量,如表1所示。

由表1中数据分析可知:本文提出的算法在优化系数上分母位数较高,在误差估计精度上比传统算法和文献[9]中的算法高出4个数量级;与文献[10]相比较,精度略高出9倍。

在不同圆锥运动频率下,算法漂移误差是不同的。通过定量分析比较上述算法在不同频率下的漂移量,如表2所示。

表1 不同算法的系数和漂移误差比较

Table 1 The coefficient and drift error of the different algorithms

	$K_{12} + K_{23}$	$K_{13}$	$P$	$Q$	算法漂移误差/rad
传统算法	27 20	9 20	0	0	$\frac{\alpha^2(wh)^7}{204120}$
文献[9]算法	7 60	1 60	0	0	$\frac{29\alpha^2(wh)^7}{1575}$
文献[10]算法	9475 6343	697 1636	1 1945	-1 -92400	$\frac{\alpha^2(wh)^{11}}{44513598}$
本文算法	911 197	105 -4988	89 -54409	14 249153	$\frac{\alpha^2(wh)^{11}}{396661065}$

设姿态更新周期为  $h = 0.03$  s,圆锥运动的半锥角  $\alpha$  为  $1^\circ$ 。

表2 不同算法的漂移比较

Table 2 The drift error comparison of the different algorithms rad

	传统算法	文献[9]算法	文献[10]算法	本文算法
2	5.3019E-09	1.9927E-05	4.8670E-13	5.5109E-14
5	3.2360E-06	1.2162E-02	1.1604E-08	1.3139E-09
10	4.1421E-04	1.5568E+00	2.3765E-05	2.6909E-06
15	7.0772E-03	2.6599E+01	2.0556E-03	2.3275E-04
30	9.0588E-01	3.4047E+03	4.2099E+00	4.7668E-01
50	32.3602	1.2162E+05	1.1603E+03	71.3901

由表2中数据可得:当频率小于30 Hz时,随着圆锥运动频率的增加,单个算法的漂移量逐渐增加,本文算法的漂移均较小。当频率大于30 Hz时,本文提出的算法与传统算法的漂移量在同一个数量级。在不同的锥运动频率下,验证了改进算法的有效性和正确性。说明相较于文献[9-10]的漂移量,改进的圆锥误差补偿算法效果明显。

#### 3.2 算法性能分析

为了更直观地证明改进算法的优越性,本文通过Matlab仿真,分析不同算法的航向角误差,来评价圆锥误差补偿效果。

仿真条件:输入为典型的圆锥运动,角速度计算公式如式(8);半锥角  $\alpha$  为  $1^\circ$ ,锥运动频率为2 Hz,采样

周期为0.01 s,姿态更新周期  $h$  为0.03 s,仿真时间为90 s。结果如图3所示。

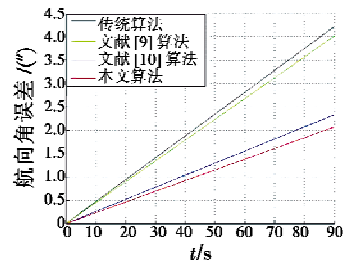


图3 不同算法的航向角误差比较图

Fig. 3 Heading angle error of different algorithms

由图3可清晰地观察到本文算法的误差值较其他3种算法有所降低,同时也间接说明了利用前两个周期的角增量和进行重叠式采样的改进算法的优越性。

### 4 结束语

在捷联惯导系统姿态更新过程中,圆锥误差补偿精度直接影响解算精度,本文提出一种改进的捷联惯导系统圆锥误差补偿算法,根据误差最小原则得到一组优化的补偿系数,通过详细的理论推导和仿真结果表明:本文算法比传统算法精度高出4个数量级,并且比现有的相同子样的补偿算法的姿态更新频率提高了4倍,对提高惯导系统精度有一定的借鉴意义。

### 参考文献

- [1] BORTZ J E. A new mathematical formulation for strap-down inertial navigation [J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1971, 27(1):61-66.
- [2] JORDAN J W. An accurate strap-down cosine algorithm [R]. Washington: TND-5348 NASS, 1969.
- [3] 张朝飞,杨孟兴,吴明强.一种改进的捷联惯导系统优化算法[J].现代防御技术,2012,4(5):80-85.
- [4] 赵晗,汪立新,赵曦晶,等.基于间隔子样旋转矢量的SINS圆锥误差补偿[J].压电与声光,2015,37(1):158-161.
- [5] 程承,潘泉,李汉舟.一种新的捷联惯导系统圆锥误差补偿算法研究[J].弹箭与制导学报,2014,34(1):1-4.
- [6] 王立冬,孟亚峰,高庆.基于角增量和角速率的旋转矢量算法的等效性[J].宇航学报,2014,35(3):340-344.
- [7] 汤传业,陈熙源.一种角速率输入的捷联惯导姿态算法[J].东南大学学报,2014,44(3):543-549.
- [8] 游金川,秦永元,梅春波.锥运动条件下新的速度误差补偿项研究[J].宇航学报,2013,34(3):347-354.
- [9] 肖胜.激光惯导系统流水式旋转矢量算法研究[J].光学与光电技术,2015,13(4):51-56.
- [10] 丁杨斌,满顺强,申功勋.一种新的捷联惯导系统圆锥误差补偿算法[J].北京航空航天大学学报,2007,33(11):1261-1264.