

多无人机编队自主重构的内点算法

Interior Point Algorithm in Multi-UAV Formation Autonomous Reconfiguration

王建宏¹, 朱永红¹, 许 莺², 熊朝华²

(1. 景德镇陶瓷学院机电系, 江西 景德镇 333403;

2. 中国电子科技集团公司第二十八研究所, 南京 210007)



王建宏

王建宏(1980-),男,江西吉安人,景德镇陶瓷学院机械电子工程学院教授,原中国电子科技集团公司第二十八研究所研究员。2011年毕业于南京航空航天大学,获博士学位,2013年中国电子科技集团第二十八研究所博士后,2014年赴瑞士苏黎世理工大学信息技术与电子工程学院自动控制系作访问教授,2015年赴意大利米兰理工大学电气与信息工程学院自动控制系作访问教授。主要研究方向为系统辨识、预测控制、数据驱动控制、多无人机编队协同指挥控制和稳定跟踪转台高精度伺服控制。主持和参与了多无人机编队协同目标跟踪模拟设计、舰载无人直升机起降控制系统设计、精密伺服跟踪转台的控制及仿真,且多为国防预研和重点基金、国家自然科学基金、航空基金项目。发表论文80篇,其中50余篇被三大检索收录,出版专著2部。

0 引言

多无人机编队控制是无人机执行任务的基础和前提,其目的是根据各无人机的具体任务为每架无人

考虑多无人机编队自主重构的优化设计问题,联合编队过程中的3类代价函数、无人机的非线性动力学方程以及4类不等式约束条件,构成一个非线性多目标优化模型。采用加权和策略并将所有的等式和不等式约束分别组合,将非线性多目标优化模型转化为一个标准的非线性单目标优化模型。采用运筹学中的内点算法来求解最优解,并在算法的实现过程中做了某些改进,以避免出现矩阵的秩亏损。从理论上证明多目标优化在加权和策略下与单目标优化间的等价性。最后用仿真算例验证了算法的有效性。

关键词: 多无人机编队; 自主重构; 内点算法; 多目标优化

中图分类号: TP273

文章编号: 1671-637X(2017)03-0001-06

机规划出从初始点到目标点的可行飞行航迹,协调处理各架无人机航迹之间的相互关系,使其在指定的性能指标下达到最优或次优,以适应平台性能、战场环境、战术任务等要求。当编队任务或者战场环境发生变化时,整个多无人机编队需要进行调整即重构。在调整重构过程中,需要重新调节每架无人机在新编队几何构型中的位置,并规划出从原初始位置到新终端位置的航迹。由此所规划的航迹必须确保每架无人机的安全性,同时考虑无人机的非线性动力学特性,各种编队重构的无人机代价函数,以及各类约束条件。多无人机编队自主重构的过程可设计成一个数学优化问题,其中的优化决策变量是每架无人机的控制输入序列;代价函数包括侦察无人机代价函数、导弹干扰无人机代价函数、雷达干扰无人机代价函数;系统的约束条件包括雷达威胁约束、导弹威胁约束、高炮阵地威胁约束、编队防碰撞约束。

现有的研究重心集中在多无人

机编队控制轨迹规划,文献[1]概要地介绍多无人机编队控制轨迹设计在多基地多无人机协同侦察过程中的辅助作用;文献[2]在多无人机编队建模中引入一种智能化多 Agent 系统的通信结构;文献[3]介绍无人机路径规划的各种方法,如蚁群算法、遗传算法、粒子群算法、单元分解法、人工势场法、路标图法和概率图法等;文献[4]从灰色系统理论来调整智能算法中的权重值;文献[5]从信息融合的角度分析怎样对多无人机上的多个传感信息进行融合得到状态融合估计值;文献[6]将粒子滤波算法应用于非高斯条件下的路径跟踪;文献[7]提出一种改进的交互式多模型粒子滤波算法,并将此新算法应用于无人机的目标跟踪;文献[8]考虑多目标优化的蚁群算法;文献[9]利用一致设计的遗传算法来求解多目标优化问题;对于多无人机编队自主重构问题,文献[10]运用多目标多人博弈理论将原最优化问题转化为纳什谈判过程;文献[11]考虑通信延迟的存在,设计了基于信息滤波算

法的信息补偿。

本文将内点算法应用于多无人机编队自主重构的轨迹优化。在文献[10]所建立的多无人机编队自主重构的优化模型中,建立3类不同的代价函数,将各架无人机的动力学方程作为等式约束,联合雷达威胁、导弹威胁、高炮阵地威胁和编队防撞作为4类不等式约束,构成一个带有等式和不等式约束条件的多目标优化问题。对此,复杂的多目标优化问题求解可得到航迹规划过程中所需要的控制输入向量。整篇思路在于如何从经典的运筹学优化理论角度分析多目标优化问题的求解。对于此多目标优化问题,利用加权和策略将多目标优化转化为单一的目标优化,从理论上证明加权和策略的可行性。为将原始的最优化问题改写成标准的非线性优化形式,可将各架无人机的动力学等式方程作拓展,采用某些形式来描述状态变量集和控制输入集。对于改进的标准非线性优化形式,详细给出改进内点算法的求解过程。

1 多无人机编队自主重构的建模

多无人机编队自主重构指的是在初始考虑时刻,多无人机以一种编队模式飞行。当编队执行任务或周围的战场环境发生改变时,此时无人机群能够自主地改变之前正在飞行的编队模式,而应重新选择新的编队模式^[12]。在两种编队模式重构过程中,每架无人机在新编队模式中的位置需要重新规划设计,从而生成一条新的飞行轨迹。此新飞行轨迹的设计需要考虑各架无人机的动力学特性、飞行代价函数及约束条件等。多无人机编队在执行任务中的自主重构过程如图1所示。

设有 n 架无人机在编队中飞行,且整个自主重构过程完成时所需的时间长度为 N 。记第 i 架无人

机在整个编队自主重构任务过程中的状态向量为 $\mathbf{x}_i = (x_i(1) \ x_i(2) \ \dots \ x_i(N))^T$,对应的控制输入向量为 $\mathbf{u}_i = (u_i(1) \ u_i(2) \ \dots \ u_i(N))^T$ 。

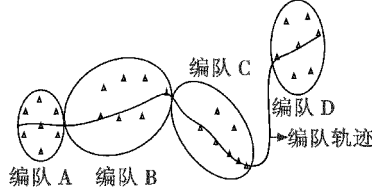


图1 多无人机编队自主重构过程
Fig.1 Multi-UAV formation autonomous reconfiguration process

第 i 架无人机的时不变离散状态方程为

$$\mathbf{x}_i(k+1) = f_i(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}_i(k))$$

$$\mathbf{x}_i \in \Xi_i, \mathbf{u}_i(k) \in \Theta_i \quad (1)$$

式中: f_i 为一个非线性映射,其联合 k 时刻的状态向量 $\mathbf{x}_i(k)$ 和控制向量 $\mathbf{u}_i(k)$ 映射到 $k+1$ 时刻的状态变量; Ξ_i 和 Θ_i 是第 i 架无人机的可行状态集和控制输入约束集。当无人机编队飞跃战场环境时,设 k 时刻领航的虚拟长机位置为 $\mathbf{p}_l(k) = (x_l(k) \ y_l(k))^T$ 。第 i 架执行侦察任务的无人机 v_i 的位置为: $\mathbf{p}_i(k) = (x_i(k) \ y_i(k))^T$ 。

在执行任务过程中侦察无人机 v_i 的代价函数为

$$F_i^1(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) = \sum_{k=1}^N \left(\left\| \mathbf{p}_i(k) - \mathbf{p}_l(k) \right\|^2 + \left\| \mathbf{u}_i(k) \right\|_{\mathbf{R}_i}^2 \right) \quad (2)$$

式中: \mathbf{R}_i 表示一个正定加权矩阵;矩阵范数表示为 $\left\| \mathbf{u}_i(k) \right\|_{\mathbf{R}_i}^2 = \mathbf{u}_i(k) \cdot \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i^T(k)$,该项主要作用是规范化原优化问题,以保证在最小化运算中所得到的最优解不会偏离真实解^[13]。类似可定义导弹干扰无人机代价函数和雷达干扰无人机代价函数各自为

$$F_i^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) = \sum_{k=1}^N \left(\left\| (\mathbf{p}_{a_i}(k) - \mathbf{p}_i(k))^2 + \left\| \mathbf{u}_i(k) \right\|_{\mathbf{R}_i}^2 \right\| \right) \quad (3)$$

$$F_i^3(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i) = \sum_{k=1}^N \left(\left\| (\mathbf{p}_{a_i}(k) - \mathbf{p}_i(k))^2 + \left\| \mathbf{u}_i(k) \right\|_{\mathbf{R}_i}^2 \right\| \right) \quad (4)$$

式中:代价函数 $F_i^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)$ 是以导弹干扰第 i 架无人机的当前位置 \mathbf{p}_i 与其理想位置 \mathbf{p}_{a_i} 间的距离差构造的, \mathbf{p}_{a_i} 为理想的导弹干扰位置。而式(4)中的代价函数 $F_i^3(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)$ 是在为实现对编队飞行通道最大保护下,以雷达干扰无人机当前位置 \mathbf{p}_i 与其理想位置 \mathbf{p}_{a_i} 间的距离差构造的。

在共有 n 架无人机位于多无人机编队的几何构型中,联合式(2)~式(4)可得需考虑的代价函数为

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{u}} [F_1^1(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) \ F_1^2(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1) \ F_1^3(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1)]_{i=1}^n \\ \mathbf{u} = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n)^T \end{cases} \quad (5)$$

式(5)的代价函数矢量中共有 $3n$ 项元素需要取最小化运算,要能保证同时使所有的 $3n$ 项元素都最小化的最小解 \mathbf{u} 是不存在的,只能在其中寻找一个折中解,此解即为多目标优化理论中的有效解^[14]。

在多无人机编队自主重构中需考虑的各类约束条件有雷达威胁约束、导弹威胁约束、高炮阵地威胁约束和编队防撞约束^[15]。其各自不等式形式依次为:设雷达 r_j 的位置和探测半径分别是 $\mathbf{p}_{r_j} = (x_{r_j} \ y_{r_j})^T$ 和 $R_{r_j}(k)$,则无人机 v_i 的雷达威胁约束为

$$g_i^1(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}_i(k)) = R_{r_j}(k)^2 - \left\| \mathbf{p}_i(k) - \mathbf{p}_{r_j}(k) \right\|^2 \leq 0 \quad (6)$$

设导弹 m_j 的位置为 $\mathbf{p}_{m_j} = (x_{m_j} \ y_{m_j})^T$,导弹 m_j 受干扰后的安全距离和安全角度余弦分别为 d_{m_j} 和 $cs_{m_j}(k)$,则无人机 v_i 的导弹威胁约束为

$$g_i^2(\mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}_i(k)) = cs_{m_j}(k) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq 0 \quad (7)$$

设高炮阵地的辐射半径不受干扰影响,设定其为常值,阵地 n_j 的位置和辐射半径分别为 $\mathbf{p}_{n_j} = (x_{n_j} \ y_{n_j})^T$ 和 $R_{n_j}(k)$,则无人机 v_i 的高炮阵地威

威胁约束为

$$g_i^3(x_i(k), u_i(k)) = R_{n_i}(k)^2 - \|p_i(k) - p_{n_i}(k)\|^2 \leq 0 \quad (8)$$

设编队无人机间的最小安全距离为 d_{\min} , 则无人机 v_i 的编队防碰撞威胁约束为

$$g_i^4(x_i(k), u_i(k)) = d_{\min}^2 - \|p_i(k) - p_j(k)\|^2 \leq 0 \quad (9)$$

联合以上关于无人机的多目标代价函数式(5)、无人机的非线性动力学方程式(1)、4类不等式约束式(6)~式(9), 可得到多无人机编队自主重构的建模为一个非线性的多目标优化问题

$$\min [F_i^1(x_i, u_i) \quad F_i^2(x_i, u_i) \quad F_i^3(x_i, u_i)]_{i=1}^n \quad (10)$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} x_i(k+1) = f_i(x_i(k), u_i(k)) \\ x_i \in \Xi_i, u_i(k) \in \Theta_i \quad i=1, 2, \dots, n, \\ k=1, 2, \dots, N \end{cases}$$

$g_i^1(x_i(k), u_i(k)) \leq 0, g_i^2(x_i(k), u_i(k)) \leq 0$
 $g_i^3(x_i(k), u_i(k)) \leq 0, g_i^4(x_i(k), u_i(k)) \leq 0$
 将式(10)中所有的不等式合并成矢量形式为

$$\begin{cases} g_i(x, u) = \begin{pmatrix} g_i^1(x_i(k), u_i(k)) \\ g_i^2(x_i(k), u_i(k)) \\ g_i^3(x_i(k), u_i(k)) \\ g_i^4(x_i(k), u_i(k)) \end{pmatrix} \\ g(x, u) = \begin{pmatrix} g_1(x, u) \\ \vdots \\ g_n(x, u) \end{pmatrix} \leq 0 \end{cases} \quad (11)$$

其中的状态变量和控制输入矢量为

$$\begin{cases} x = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^T \\ u = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n)^T \end{cases} \quad (12)$$

类似有无人机的非线性动力学方程也可合并为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1(k), u_1(k)) \\ f_2(x_2(k), u_2(k)) \\ \vdots \\ f_n(x_n(k), u_n(k)) \end{pmatrix} \\ &= f(x(k), u(k)) \quad (13) \end{aligned}$$

利用式(11)~式(13)的矢量化, 式(10)所示的非线性多目标优化问题可简化为

$$\min [F_i^1(x_i, u_i) \quad F_i^2(x_i, u_i) \quad F_i^3(x_i, u_i)]_{i=1}^n \quad (14)$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ x_i \in \Xi_i, u_i(k) \in \Theta_i \quad i=1, 2, \dots, n, \\ k=1, 2, \dots, N \\ g(x, u) \leq 0 \end{cases}$$

对式(14)利用内点算法之前, 需将其中的多目标最小转化为单目标优化, 将其转化为标准的带等式和不等式约束的非线性优化问题。

2 模型的规范化

对于式(14)中的多目标代价函数矢量

$$\min [F_i^1(x_i, u_i) \quad F_i^2(x_i, u_i) \quad F_i^3(x_i, u_i)]_{i=1}^n \quad (15)$$

可采用加权和策略来将其改写为单目标优化问题

$$\min_u F(u) = \sum_{i=1}^n [\lambda_{1i} F_i^1(x_i, u_i) + \lambda_{2i} F_i^2(x_i, u_i) + \lambda_{3i} F_i^3(x_i, u_i)] \quad (16)$$

式(16)中的矢量 $\{\lambda_{1i}, \lambda_{2i}, \lambda_{3i}\}_{i=1}^n$ 表示正加权标量值, 且满足如下条件

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n [\lambda_{1i} + \lambda_{2i} + \lambda_{3i}] = 1 \\ \lambda_{1i} > 0, \lambda_{2i} > 0, \lambda_{3i} > 0 \end{cases} \quad (17)$$

对于最小化问题式(15)与式(16)之间的等价性分析可知在式(17)成立的正加权值条件下, 若式(16)所示的单目标优化问题存在一个最优解, 该最优解必为式(15)多目标优化问题的一个有效解。

对于式(14)中的无人机非线性动力学方程可改为

$$\begin{cases} x_0 - x_0 = 0 \\ x(k+1) - f(x(k), u(k)) = 0 \\ k=1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (18)$$

式(18)中的第一个等式表示初始状态, 其在优化设计过程中可根据实验测取。对于可行状态集 Ξ_i 和控制输入约束集 Θ_i 可定义如下对应的约束

$$\begin{cases} \Xi_i = x_i / \exists u_i \in \Theta_i, \text{ with } G_i^c(x_i, u_i) = 0, \\ \text{ and } H_i^c(x_i, u_i) \leq 0 \\ \Theta_i = \{u_i / \exists x_i \in \Xi_i, \text{ with } G_i^c(x_i, u_i) = 0, \\ \text{ and } H_i^c(x_i, u_i) \leq 0\} \end{cases} \quad (19)$$

所定义约束集的函数 $G_i^c(x_i, u_i)$ 和 $H_i^c(x_i, u_i)$ 并不需要同时都依赖于2个变量 x_i 和 u_i ; 当函数 $G_i^c(x_i, u_i)$ 和 $H_i^c(x_i, u_i)$ 不依赖于 u_i 时称为纯状态约束; 当函数 $G_i^c(x_i, u_i)$ 和 $H_i^c(x_i, u_i)$ 不依赖于 x_i 时称为纯控制约束; 当函数 $G_i^c(x_i, u_i)$ 和 $H_i^c(x_i, u_i)$ 同时都依赖于 x_i 和 u_i 时称为混合约束^[16]。将所有的等式和不等式分别联立组合在一起, 并利用式(16)可得标准的非线性优化问题。

$$\begin{aligned} \min_u F(u) &= \sum_{i=1}^n [\lambda_{1i} F_i^1(x_i, u_i) + \lambda_{2i} F_i^2(x_i, u_i) + \lambda_{3i} F_i^3(x_i, u_i)] \\ \text{with respect to } u &= [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n]^T \quad (20) \end{aligned}$$

$$\text{s.t. } G(u) = \begin{pmatrix} x_0 - x_0 \\ [x(k+1) - f(x(k), u(k))]_{k=1}^{N-1} \\ [G_i^c(x_i, u_i)]_{i=1}^n \end{pmatrix} = 0,$$

$$H(u) = \begin{pmatrix} g(x, u) \\ [H_i^c(x_i, u_i)]_{i=1}^n \end{pmatrix} \leq 0$$

对于式(16)所示的标准非线性优化问题可采用运筹学中的内点算法来继续求解。

3 内点算法

内点算法的目的是生成一组迭代序列 u^i , 此时上标 u^i 是为了和 k 时刻的控制输入值 $u(k)$ 相区别。该组序列将紧紧地地位于控制输入集合内。在每次生成序列的迭代过程中, 将使用到不等式约束 $H(u)$ 的每一个元素分量, 利用松弛变量 s 可将这些不等式约束转化为等式约束。将式(20)改写为

$$\begin{aligned} \min_u F(u) \quad (21) \\ \text{s.t. } G(u) = 0, H(u) + s = 0, s \geq 0 \end{aligned}$$

式(21)中的松弛变量 s 应该为一个选择适当维数的矢量, 其每一元素都应非负。此时式(21)对应的拉格

朗日函数构造为

$$L(\mathbf{u}, s, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = F(\mathbf{u}) - \mathbf{v}^T \mathbf{G}(\mathbf{u}) - \mathbf{w}^T (\mathbf{H}(\mathbf{u}) + s) \quad (22)$$

根据最优性必要条件可知,在最小值处等式 $\mathbf{H}(\mathbf{u}) + s = 0$ 必成立,对式(21)应用广义 KKT 最优充要条件可得

$$\begin{cases} \nabla F(\mathbf{u}) - \nabla \mathbf{G}^T(\mathbf{u}) \mathbf{v} - \nabla \mathbf{H}^T(\mathbf{u}) \mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{S} \mathbf{w} - \mu \mathbf{e} = 0 \\ \mathbf{G}(\mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{H}(\mathbf{u}) + s = 0 \end{cases} \quad (23)$$

式(23)中有 $s \geq 0, \mathbf{w} \geq 0, \mu = 0$, $\mathbf{e} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$, 矩阵 $\mathbf{S} = \text{diag}(s)$, $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{w})$ 。摄动参数 μ 的引入是当选择 $\mu > 0$ 时可保证迭代序列远离控制输入的边界。通常摄动参数 μ 的选取需保证 $\mu_j \rightarrow 0$ as $j \rightarrow \infty$ 。

为增强式(23)的最优条件,采用内点算法求解式(21),对式(21)引进障碍函数以消除非负条件 $s \geq 0$ 得

$$\min_{\mathbf{u}} F(\mathbf{u}) - \mu \sum_{i=1}^{n_s} \ln s_i \quad (24)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{G}(\mathbf{u}) = 0, \mathbf{H}(\mathbf{u}) + s = 0$$

式中,障碍项 $-\mu \sum_{i=1}^{n_s} \ln s_i$ 的添加是阻止 s 的元素接近于 0,同样对增加障碍项的式(24)使用广义 KKT 最优条件可得

$$\begin{cases} \nabla F(\mathbf{u}) - \nabla \mathbf{G}^T(\mathbf{u}) \mathbf{v} - \nabla \mathbf{H}^T(\mathbf{u}) \mathbf{w} = 0 \\ \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e} + \mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{G}(\mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{H}(\mathbf{u}) + s = 0 \end{cases} \quad (25)$$

对式(25)应用牛顿增量步骤可得系统方程为

$$\begin{pmatrix} \nabla_{uu}^2 L(\mathbf{u}, s, \mathbf{v}, \mathbf{w}) & 0 & -\nabla \mathbf{G}^T(\mathbf{u}) & -\nabla \mathbf{H}^T(\mathbf{u}) \\ 0 & \mathbf{W} & 0 & \mathbf{S} \\ \nabla \mathbf{G}(\mathbf{u}) & 0 & 0 & 0 \\ \nabla \mathbf{H}(\mathbf{u}) & -\mathbf{I} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta s \\ \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \mathbf{w} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla F(\mathbf{u}) - \nabla \mathbf{G}^T(\mathbf{u}) \mathbf{v} - \nabla \mathbf{H}^T(\mathbf{u}) \mathbf{w} \\ \mathbf{S} \mathbf{w} - \mu \mathbf{e} \\ \mathbf{G}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{u}) + s \end{pmatrix} \quad (26)$$

当计算出增量 $(\Delta \mathbf{u} \ \Delta s \ \Delta \mathbf{v} \ \Delta \mathbf{w})$ 后,

新的递推迭代值可计算如下

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{j+1} = \mathbf{u}^j + \alpha_s^{\max} \Delta \mathbf{u} \\ s^{j+1} = s^j + \alpha_s^{\max} \Delta s \\ \mathbf{v}^{j+1} = \mathbf{v}^j + \alpha_w^{\max} \Delta \mathbf{v} \\ \mathbf{w}^{j+1} = \mathbf{w}^j + \alpha_w^{\max} \Delta \mathbf{w} \end{cases} \quad (27)$$

其中的两个步长 α_s^{\max} 和 α_w^{\max} 分别为

$$\begin{cases} \alpha_s^{\max} = \max \{ \alpha \in (0, 1) / s + \alpha \Delta s \geq (1 - \tau) s \} \\ \alpha_w^{\max} = \max \{ \mathbf{w} \in (0, 1) / \mathbf{w} + \alpha \Delta \mathbf{w} \geq (1 - \tau) \mathbf{w} \} \end{cases} \quad (28)$$

式中, $\tau \in (0, 1)$, 常取 $\tau = 0.995$ 。为保证式(26)的第 2 个块矩阵具有满行秩,以使得内点算法并非病态,不会表现出奇异性现象,可将式(26)修改为

$$\begin{pmatrix} \nabla_{uu}^2 L(\mathbf{u}, s, \mathbf{v}, \mathbf{w}) & 0 & -\nabla \mathbf{G}^T(\mathbf{u}) & -\nabla \mathbf{H}^T(\mathbf{u}) \\ 0 & \mathbf{\Sigma} & 0 & \mathbf{I} \\ -\nabla \mathbf{G}(\mathbf{u}) & 0 & 0 & 0 \\ -\nabla \mathbf{H}(\mathbf{u}) & \mathbf{I} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta s \\ \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \mathbf{w} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla F(\mathbf{u}) - \nabla \mathbf{G}^T(\mathbf{u}) \mathbf{v} - \nabla \mathbf{H}^T(\mathbf{u}) \mathbf{w} \\ \mathbf{w} - \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e} \\ -\mathbf{G}(\mathbf{u}) \\ -\mathbf{H}(\mathbf{u}) - s \end{pmatrix} \quad (29)$$

式中: $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{W}$; 为使得赋范函数在迭代过程中是递减的,即增量矢量 $(\Delta \mathbf{u} \ \Delta s \ \Delta \mathbf{v} \ \Delta \mathbf{w})$ 是一个下降方向,可取矩阵 $\begin{pmatrix} \nabla_{uu}^2 L(\mathbf{u}, s, \mathbf{v}, \mathbf{w}) & 0 \\ 0 & \mathbf{\Sigma} \end{pmatrix}$ 在 $\begin{pmatrix} -\nabla \mathbf{G}(\mathbf{u}) & 0 \\ -\nabla \mathbf{H}(\mathbf{u}) & \mathbf{I} \end{pmatrix}$ 的零空间上是正定矩阵。

因根据 $\mathbf{\Sigma}$ 的构造可知 $\mathbf{\Sigma}$ 是一个正定矩阵,但海赛矩阵 $\nabla_{uu}^2 L(\mathbf{u}, s, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ 有可能是负定的。为弥补此缺陷,可在式(29)中取 $\nabla_{uu}^2 L(\mathbf{u}, s, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \delta \mathbf{I}$ 来替换海赛矩阵 $\nabla_{uu}^2 L(\mathbf{u}, s, \mathbf{v}, \mathbf{w})$, 其中,标量 $\delta > 0$ 要选取充分大,以保证海赛矩阵的正定性。另外在内点算法中也要考虑到梯度矩阵 $\nabla \mathbf{G}(\mathbf{u})$ 的秩亏损,即在式(29)所示的基-对偶矩阵中做出如下修改

$$\begin{pmatrix} \nabla_{uu}^2 L(\mathbf{u}, s, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \delta \mathbf{I} & 0 & -\nabla \mathbf{G}^T(\mathbf{u}) & -\nabla \mathbf{H}^T(\mathbf{u}) \\ 0 & \mathbf{\Sigma} & 0 & \mathbf{I} \\ -\nabla \mathbf{G}(\mathbf{u}) & 0 & \gamma \mathbf{I} & 0 \\ -\nabla \mathbf{H}(\mathbf{u}) & \mathbf{I} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta s \\ \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \mathbf{w} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \nabla F(\mathbf{u}) - \nabla \mathbf{G}^T(\mathbf{u}) \mathbf{v} - \nabla \mathbf{H}^T(\mathbf{u}) \mathbf{w} \\ \mathbf{w} - \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e} \\ -\mathbf{G}(\mathbf{u}) \\ -\mathbf{H}(\mathbf{u}) - s \end{pmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta s \\ \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \mathbf{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla F(\mathbf{u}) - \nabla \mathbf{G}^T(\mathbf{u}) \mathbf{v} - \nabla \mathbf{H}^T(\mathbf{u}) \mathbf{w} \\ \mathbf{w} - \mu \mathbf{S}^{-1} \mathbf{e} \\ -\mathbf{G}(\mathbf{u}) \\ -\mathbf{H}(\mathbf{u}) - s \end{pmatrix} \quad (30)$$

即在式(30)的第 1 个矩阵中增加规范参数 $\gamma > 0$ 。因迭代式(27)在有限时间段内不会终止,故可施加一个误差准则函数来判断是否需要终止整个迭代循环算法。

$$E(\mathbf{u}, s, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \max \{ \|\nabla F(\mathbf{u}) - \nabla \mathbf{G}^T(\mathbf{u}) \mathbf{v} - \nabla \mathbf{H}^T(\mathbf{u}) \mathbf{w}\|, \|\mathbf{S} \mathbf{w} - \mu \mathbf{e}\|, \|\mathbf{G}(\mathbf{u})\|, \|\mathbf{H}(\mathbf{u}) + s\| \} \quad (31)$$

利用此误差准则函数作为判断终止迭代算法,可得改进内点算法的基本步骤为:

1) 假设给定初始值 (\mathbf{u}^0, s^0) , 令 $j = 0$;

2) 计算拉格朗日乘子 \mathbf{v}^0 和 \mathbf{w}^0 , 定义参数 $\mu^0 > 0, \sigma, \tau \in (0, 1)$;

3) 检验误差准则函数是否成立: $E(\mathbf{u}^j, s^j, \mathbf{v}^j, \mathbf{w}^j) \geq \varepsilon$, ε 为一个非常小的正数;若不成立则算法可终止,此时的迭代优化变量 $(\mathbf{u}^j, s^j, \mathbf{v}^j, \mathbf{w}^j)$ 即可作为非线性优化变量的最优解;

4) 求解式(30)计算搜索方向 $(\Delta \mathbf{u} \ \Delta s \ \Delta \mathbf{v} \ \Delta \mathbf{w})$;

5) 利用式(28)确定两步长 α_s^{\max} 和 α_w^{\max} ;

6) 利用迭代式(27)求解新的迭代值;

7) 令 $\mu^{j+1} = \mu^j, k = k + 1$;

8) 转回步骤 3)。

改进的内点算法应用于多无人机编队自主重构,弥补传统内点算法的秩亏损,保证能够得到原非线性优化问题的最优解。

对于迭代式(27)的收敛性和一致性,理论式的推导是严格利用优化过程的最优性 KKT 充要条件,而工程实用采用的是迭代求解形式。根据最优性充要条件可得关于未知权值在理论上的收敛性。

定理 1 若 u_* 是式(21)非线性规划问题满足式(23)最优性充要条

件的一个解,此时该解对应的拉格朗日乘子分别为 ν 和 w ,式(26)左边的矩阵是正半定的,则 u_* 必是非线性规划问题的最优解。该定理是关于改进内点算法的一致性和收敛性,其证明过程见文献[12]。

4 两优化问题间的等价性

在求解多目标优化问题时,第3章利用加权和策略将其转化为单目标优化问题,以说明当正加权标量值满足式(17)条件下,两优化问题间存在等价性。因式(15)中共有 $3n$ 项元素,将式(15)改写为

$$\min_u [F_1(u) \ F_2(u) \ \dots \ F_{3n}(u)]。 (32)$$

类似式(16)可改写为

$$\min_u F(u) = \sum_{i=1}^{3n} \lambda_i F_i(u)。 (33)$$

式(32)与式(33)虽然在形式上与式(15)、式(16)不同,但实质上是相同的。只需将式(15)中的 $3n$ 项元素按照顺序全列举出来,再从开头开始排序,并用式(32)中的符号重新表示,则式(32)与式(33)间等价性的条件归纳为如下命题。

命题 设 $\lambda_i > 0, i = 1, 2, \dots, 3n$,且有 $\sum_{i=1}^{3n} \lambda_i = 1$ 。若 \hat{u} 为式(33)的一个最优解,则 \hat{u} 必为式(32)的一个有效解。

证明 设 \hat{u} 为式(33)的一个最优解,为证明 \hat{u} 是有效的,设存在某个 u' 满足 $F(u') \leq F(\hat{u})$ 。利用正加权值及 $F_i(u') \leq F_i(\hat{u}), i = 1, 2, \dots, 3n$,可得

$$\sum_{i=1}^{3n} \lambda_i F_i(u') < \sum_{i=1}^{3n} \lambda_i F_i(\hat{u})。 (34)$$

选择某充分大正数 M 使得对于加权和问题,存在一个关于最优解 \hat{u} 的反面结果^[15]。正数 M 可取

$$M = (3n - 1) \max_{i,j} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right)。 (35)$$

利用反证法来继续证明,设 \hat{u} 不是式(32)的一个有效解,则存在某个 $i \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ 和 u ,使得

$$\begin{cases} F_i(u) \leq F_i(\hat{u}) \\ F_i(\hat{u}) - F_i(u) > M(F_i(u) - F_i(\hat{u})) \end{cases} (36)$$

对于所有的 $j \in \{1, 2, \dots, 3n\}$ 有 $F_j(u) \geq F_j(\hat{u})$,则有

$$F_i(\hat{u}) - F_i(u) > \frac{3n-1}{\lambda_i} \cdot$$

$$\lambda_j(F_j(u) - F_j(\hat{u})) \quad j \neq i。 (37)$$

在式(37)两边同乘以 $\frac{\lambda_i}{3n-1}$ 后取连加运算得

$$\begin{aligned} \lambda_i(F_i(\hat{u}) - F_i(u)) &> \sum_{j \neq i} \lambda_j(F_j(u) - F_j(\hat{u})) \Leftrightarrow 6\lambda_i F_i(\hat{u}) - \lambda_i F_i(u) > \\ &\sum_{j \neq i} \lambda_j F_j(u) - \sum_{j \neq i} \lambda_j F_j(\hat{u}) \Leftrightarrow \lambda_i F_i(\hat{u}) + \\ &\sum_{j \neq i} \lambda_j F_j(\hat{u}) > \lambda_i F_i(u) + \sum_{j \neq i} \lambda_j F_j(u) \Leftrightarrow \\ &\sum_{i=1}^{3n} \lambda_i F_i(u) < \sum_{i=1}^{3n} \lambda_i F_i(\hat{u})。 (38) \end{aligned}$$

式(38)中最后一个不等式与假设 \hat{u} 为式(33)的一个最优解相矛盾,表明 \hat{u} 必为式(32)的一个有效解。

5 仿真算例

考虑编队由3架无人机组成,包括1架雷达干扰无人机、1架导弹干扰无人机以及一架侦察无人机。3架无人机的初始位置都位于起点坐标(0 m, 0 m)处,要执行飞行任务的终点位置为(700 m, 700 m),且各自的飞行最大速度、最小速度和速度偏差构成矢量(80 m/s 15 m/s ± 5 m/s),周围的战场环境中包含有雷达威胁、导弹威胁和高炮阵地威胁,其中,雷达威胁的部署坐标为(300 m, 300 m),导弹威胁的部署坐标为(250 m, 200 m),高炮阵地威胁的区域位于高度为300 m,宽度为300 m的矩形范围之内,此范围对无人机属于禁飞区。

利用内点算法作用于多无人机编队自主重构优化模型,各无人机的加权系数 $Q_i = \text{diag}(10, 10)$,代价函数中的加权矩阵 $R_i = \text{diag}(1, 10)$ 。离散采样周期取 $\Delta T = 0.05$ s,时间段长度 $N = 500$ s,无人机架次

为3,算法的初始估计值选择为 $(u^0, s^0) = (0.01 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.01)^T$,摄动参数 $\mu^0 = 0.05$,正数 $\varepsilon = 0.01$,规范参数 $\gamma = 0.5$,标量值 $\delta = 1.5$ 。利用内点算法来设计编队自主重构的仿真轨迹见图2所示。战场环境中威胁的坐标为(296 m, 746 m)和(229 m, 173 m),作用半径为100 m。设威胁区域内的威胁为无穷大。由于在威胁附近区域规划路径时路径的变化较为复杂,为了增加路径的可飞性,在威胁附近采样航点的密度可以比没有威胁的区域高。图2为多无人机编队自主重构轨迹。该3架无人机所组成的编队共经历了2次编队的自主重构过程,第1次重构发生在位置(200 m, 100 m)处,第2次重构发生在位置(280 m, 280 m)处。在经过这2次编队的重构后,该3架无人机恰好能绕开这些威胁从初始位置飞行到终点位置。

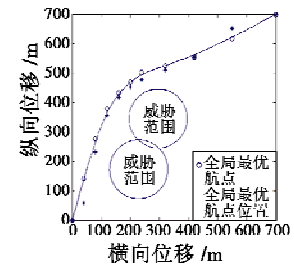


图2 多无人机编队自主重构轨迹
Fig. 2 Multi-UAV formation autonomous reconfiguration trajectory

图3给出3架无人机各自代价函数的迭代收敛曲线图。

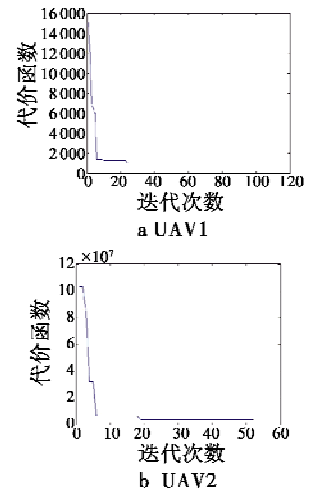


图3 3架无人机各自代价函数的迭代收敛曲线图

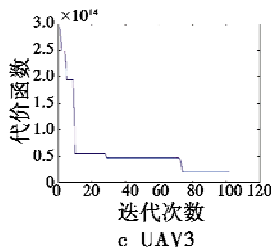


图3 各架无人机代价函数的收敛曲线

Fig. 3 Convergence curves of each UAV cost function

此时各自的代价函数是采用式(16)的形式,其中所有正加权标量值 $\lambda = 1/9$,由图3中的各个图形可见,随着内点算法的循环迭代运行,将最终计算出来的最优控制输入解 u 代入对应的加权和代价函数中,可使得代价函数随着迭代次数的增加而逐渐趋于接近0的小数。

6 结语

建立多无人机编队自主重构的非线性多目标优化模型,利用加权和策略及其合并某些等式和不等式,将非线性多目标优化问题转化为标准的单目标非线性优化问题。进而采用内点算法来求解,并在内点算法的实现上提出若干改进措施,以保证得到原非线性优化问题的最优解。

参考文献

[1] KARIMODDINI A. Hybrid three dimensional formation control for unmanned helicopters [J]. *Automatica*, 2013, 49(2):424-433.

[2] INNOCENTI M. Management of communication failures in formation control with communication relays [J]. *Journal of Aerospace Computing Information and Communication*, 2004, 11(1):19-35.

[3] REZAEC H. Motion synchronization in unmanned aircrafts formation control with communication relays [J]. *Commun Nonlinear Science Number Simulate*, 2013, 38(18):744-756.

[4] TRIPLET B I. Cooperative estimation for coordinate target tracking in a clustered environment [J]. *Mobile Network and Application*, 2009, 14(3):336-349.

[5] LI S Y. Nash-optimization enhanced distributed model predictive control applied to the shell benchmark problem [J]. *Information Sciences*, 2005, 17(2):329-349.

[6] SCHOERLING D. Experimental test of a robust formation controller for marine unmanned surface vessels [J]. *Autonomous Robots*, 2010, 28(2):213-230.

[7] SUN H B. Distributed cooperation target tracking for heterogeneous multi-UAV under communication and measurement constrains [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2011, 32(2):299-310.

[8] ZHANG X Q. Research on improved leader following formation method [J]. *Computer Engineering and De-*

sign, 2010, 31(11):2547-2549.

[9] GIULIETTI F. Autonomous formation flight [J]. *IEEE Controls System Magazine*, 2000, 20(6):34-44.

[10] GIANLUIGI P, FRANCESCO D, CHEN T S, et al. Kernal methods in system identification, machine learning and function estimation: a survey [J]. *Automatica*, 2014, 50(3):657-682.

[11] MELANIE N Z, DAVIDE M R, ALEXANDER D, et al. On real time robust model predictive control [J]. *Automatica*, 2014, 50(3):683-694.

[12] 王建宏. 基于先进辨识的控制策略研究及其应用 [D]. 南京:南京航空航天大学, 2011.

[13] YOSI B A. Distributed decision and control for cooperative UAVs using ad hoc communication [J]. *IEEE Transaction on Control Systems Technology*, 2008, 16(3):511-516.

[14] CHEN W H. Nonlinear disturbance observer enhanced dynamic inversion control of missiles [J]. *Guidance Control and Dynamics*, 2003, 26(1):161-166.

[15] FABRIZIO G. Dynamics and control of different aircraft formation structures [J]. *Aeronautical*, 2004, 108(10):117-124.

[16] FABRIZIO G. Dynamics and control issues of formation flight [J]. *Aerospace Science and Technology*, 2005, 36(9):65-71.

Abstract: The problem of how to design the multi-UAV formation autonomous reconfiguration is studied. Based on three kinds of cost functions, the nonlinear dynamic equations of UAVs and four inequality constrain conditions, a nonlinear multi-objective optimization model is constructed. After applying weighted sum method and separating all equality constraints from inequality constraints, the former nonlinear multi-objective optimization model is converted into a standard nonlinear single-objective optimization model. Then the interior point algorithm from operations research is used to solve the optimization problem. To avoid rank deficiency, some improvements are made in realizing the interior point algorithm. The equivalence property between multi-objective optimization through weighted sum method and single-objective optimization is proved. Finally, the efficiency of the proposed strategy is confirmed by the simulation results.

Key words: multi-UAV formation; autonomous reconfiguration; interior point algorithm; multi-objective optimization