

引用格式:徐光廷,史光普. 无人机三维追逃问题的半直接法求解[J]. 电光与控制, 2017, 24(10): 27-31. XU G Y, SHI G P. A semi-direct method to solve three-dimensional pursuit-evasion problem[J]. Electronics Optics & Control, 2017, 24(10): 27-31.

## 无人机三维追逃问题的半直接法求解

徐光廷, 史光普

(沈阳航空航天大学, 沈阳 110136)

**摘要:** 提出一种新颖的无人机三维追逃问题的求解方法,该方法结合变分法和伪谱法,是一种半直接法求解思想。求解过程首先应用变分法给出求解一个局中人最优控制律的微分方程组及其约束条件,将微分对策问题转换为最优控制问题,然后通过伪谱法再将最优控制问题转换成非线性规划问题,最后利用 SNOPT 求解器对其进行数值求解,并进行了数值仿真。对仿真结果的分析表明,追逃双方在博弈过程中都采取了各自最优的控制策略,验证了该方法的正确性、有效性和快速性。

**关键词:** 无人机; 三维追逃问题; 控制科学与技术; 变分法; 伪谱法

**中图分类号:** V279 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-637X.2017.10.006

## A Semi-Direct Method to Solve Three-Dimensional Pursuit-Evasion Problem

XU Guang-yan, SHI Guang-pu

(Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

**Abstract:** This paper addresses a novel method to solve the three-dimensional pursuit-evasion game of Unmanned Aerial Vehicles (UAVs). Since this method combines the variational method with the pseudo-spectral method, it belongs to a semi-direct method. Firstly, the differential equations and its constraint conditions for solving the optimal control law of one player are derived by means of the variational method. Therefore, the differential game problem is transformed into an optimal control problem. Secondly, the optimal control problem is further transformed into a nonlinear programming problem by pseudo-spectral method. Finally, the SNOPT solver is utilized to obtain the numerical solution and simulation is carried out. The simulation results show that both players have adopted the optimal control strategies, which verifies the correctness, validity and rapidity of the method.

**Key words:** Unmanned Aerial Vehicle (UAV); three-dimensional pursuit-evasion problem; control science and technology; variational method; pseudo-spectral method

### 0 引言

空战攻防对抗问题本质上可以看作是飞行航迹的最优化问题,即选择最佳的航迹对抗敌方。通常,这种问题既不是简单的单边最优化问题(最优控制问题),也不是双边或多边最优化问题,而是一个微分对策问题。20世纪50年代ISAACS等人首先提出了用微分对策求解追逃问题。在过去的几十年中,很多学者对追逃问题进行了大量研究,并取得了许多研究成果。文献[1]根据导弹-目标追逃问题的相对运动学关

系,设计了双滑模变结构导引律,运用自适应方法实现对制导系统参数不确定性和目标机动的估计;文献[2]以导弹-飞机平面追逃问题为例研究了追踪方的最优混合策略,给出了双方同时采用混合策略时鞍点解的存在条件以及最优纯追踪策略的迭代算法;文献[3]研究了追逃双方做简单的二维平面内运动时,障碍物对于追逃轨迹的影响;文献[4]介绍了一种半直接法求解空间共面轨道飞行器的追逃问题;文献[5]研究了攻防双方在已知对方约束的条件下,如何规划自身能量和加速度约束,以及应该如何机动和什么时候开始机动等问题;文献[6]建立了基于极小值原理的导弹-飞机纵向平面追逃对抗问题的微分对策数学模型,采用梯度迭代法数值求解该问题。

收稿日期:2016-11-29

修回日期:2016-12-07

作者简介:徐光廷(1964—),男,辽宁沈阳人,博士,教授,硕导,研究方向为飞行姿态与智能执行器控制。

以上文献求解的是二维平面内的追逃博弈问题,对求解三维追逃问题具有启发作用。文献[7]针对三维空间中无人机受到纯比例导引空空导弹攻击而采取机动规避的过程,建立无人机与空空导弹的相对追逃运动模型,利用反比例导引项结合反跟踪势场力项构成一种新的复合规避导引律;文献[8]中通过寻求混合策略中的鞍点平衡求解了在三维空间内具有相同非线性状态空间模型的四旋翼无人机追逃问题的动态规划问题;文献[9]提出了通过递归嵌套行为控制器来求解追逃问题,仿真给出了在动态约束下两架无人机的三维追逃路径;文献[10]提出了一种用遗传算法进行预测,通过直接数值方法得到三维空间内追逃双方鞍点轨迹的方法,并通过仿真证明了该方法的有效性和鲁棒性。

上述文献中提到的方法虽可以求得追逃双方的运动轨迹,但是存在求解过程复杂,以及计算速度慢和计算结果不稳定等缺点,难以进行实际应用。本文提出的将变分法和伪谱法相结合的半直接法具有算法精炼、结果稳定、计算速度快和实时性高等优点,有很大的实际运用潜力。

## 1 无约束微分对策问题的转换

本文研究如下的 Bolza 模型的非零和微分对策问题,即

$$\min_{u_e} J_E = \varphi_E(\mathbf{X}_{E,f}, \mathbf{X}_{P,f}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_E(\mathbf{X}_E, \mathbf{u}_E, t) dt \quad (1)$$

$$\min_{u_p} J_P = \varphi_P(\mathbf{X}_{E,f}, \mathbf{X}_{P,f}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_P(\mathbf{X}_P, \mathbf{u}_P, t) dt \quad (2)$$

博弈双方的状态方程和初始状态为

$$\dot{\mathbf{X}}_E = \mathbf{f}_E(\mathbf{X}_E, \mathbf{u}_E, t) \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_P = \mathbf{f}_P(\mathbf{X}_P, \mathbf{u}_P, t) \quad (4)$$

$$\mathbf{X}_E(t_0) = \mathbf{X}_{E,0} \quad (5)$$

$$\mathbf{X}_P(t_0) = \mathbf{X}_{P,0} \quad (6)$$

式中:下标  $P$  和  $E$  分别表示追方和逃方;  $\mathbf{X}_E, \mathbf{X}_P \in \mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P \in \mathbf{R}^m$  分别为状态变量和控制量;  $t_f$  为给定的终端时刻;  $\varphi$  和  $L$  是连续可微的标量函数。对于大多数追逃问题,末值项  $\varphi$  满足

$$\varphi(t_f) = \varphi_E(t_f) = -\varphi_P(t_f) \quad (7)$$

此时,若  $L_E = L_P = 0$ , 该问题退化为一个零和博弈问题,式(1)和式(2)的目标函数等价于

$$\min_{u_e} \max_{u_p} J_E = \varphi(\mathbf{X}_{E,f}, \mathbf{X}_{P,f}, t_f) \quad (8)$$

直接求解式(1)~式(6)的微分对策问题是困难的。下面用变分法对其进行转换。

首先引入博弈双方一个局中人的哈密顿函数。不失一般性,构造  $P$  方的哈密顿函数

$$H_P(\mathbf{X}_P, \mathbf{u}_P, \boldsymbol{\lambda}_P, t) = L_P + \boldsymbol{\lambda}_P^T \mathbf{f}_P \quad (9)$$

那么  $P$  方的协态方程为

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_P = -\frac{\partial H_P}{\partial \mathbf{X}_P} = -\frac{\partial L_P}{\partial \mathbf{X}_P} - \frac{\partial \mathbf{f}_P^T}{\partial \mathbf{X}_P} \quad (10)$$

其横截条件为

$$\boldsymbol{\lambda}_P(t_f) = \frac{\partial \varphi_P}{\partial \mathbf{X}_P(t_f)} \quad (11)$$

当控制量无约束时,达到式(2)目标的  $P$  方控制变量满足条件

$$\begin{cases} \frac{\partial H_P}{\partial \mathbf{u}_P} = 0 \\ \frac{\partial^2 H_P}{\partial \mathbf{u}_P^2} \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

通过式(10)~式(12)可求出  $P$  方的控制量

$$\mathbf{u}_P = \mathbf{u}_P^*(\mathbf{X}_P, \boldsymbol{\lambda}_P, t) \quad (13)$$

将式(13)代入等式(4),改写其为

$$\dot{\mathbf{X}}_P = \mathbf{g}_P(\mathbf{X}_P, \boldsymbol{\lambda}_P, t) \quad (14)$$

通过上述运算可消去  $P$  方的目标函数,式(4)中  $P$  方的状态方程变为式(14),并增加了关于  $P$  方的协态方程和约束条件:式(10)~式(12)。此时,式(1)~式(6)问题就被转化为非线性最优控制问题

$$\min_{u_e} J_E = \varphi_E(\mathbf{X}_{E,f}, \mathbf{X}_{P,f}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L_E(\mathbf{X}_E, \mathbf{u}_E, t) dt \quad (15)$$

s. t.

$$\dot{\mathbf{X}}_E = \mathbf{f}_E(\mathbf{X}_E, \mathbf{u}_E, t) \quad (16)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_P = \mathbf{g}_P(\mathbf{X}_P, \boldsymbol{\lambda}_P, t) \quad (17)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_P = -\frac{\partial L_P}{\partial \mathbf{X}_P} - \frac{\partial \mathbf{f}_P^T}{\partial \mathbf{X}_P} \quad (18)$$

$$\mathbf{X}_E(t_0) = \mathbf{X}_{E,0} \quad (19)$$

$$\mathbf{X}_P(t_0) = \mathbf{X}_{P,0} \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_P(t_f) = \frac{\partial \varphi_P}{\partial \mathbf{X}_P(t_f)} \quad (21)$$

$$\frac{\partial H_P}{\partial \mathbf{u}_P} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 H_P}{\partial \mathbf{u}_P^2} \geq 0 \quad (23)$$

其中:式(15)为唯一的目标函数;式(16)~式(18)为  $3n$  个微分方程组;式(19)~式(21)是微分方程组的边界条件;式(22)和式(23)分别是  $m$  个等式和不等式约束。

与式(1)~式(6)原始微分对策问题比较,经过变换后得到的式(15)~式(23)最优控制问题是相对容易求解的。

## 2 三维追逃问题的描述

下面将上述理论应用于求解无人机的三维追逃问

题。首先,建立无人机三维追逃问题的完整数学描述。

设  $(x_i, y_i, z_i), v_i, \psi_i, \theta_i$  分别为追方 ( $i = P$ ) 和逃方 ( $i = E$ ) 在三维空间内的位移、切向速度、航向角和航迹倾角。双方的运动学方程为

$$\dot{\mathbf{X}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{X}_i, \mathbf{u}_i) = \begin{pmatrix} v_i \cos \psi_i \cos \theta_i \\ v_i \sin \psi_i \cos \theta_i \\ v_i \sin \theta_i \\ \omega_i \\ \xi_i \end{pmatrix} \quad \forall i = P, E \quad (24)$$

式中,  $\mathbf{X}_i = [x_i, y_i, z_i, \psi_i, \theta_i]^T$  为状态量,  $\mathbf{u}_i = [\omega_i, \xi_i]^T$  为控制量, 分别为追逃双方的航向角和航迹倾角的变化率。为了使问题简化, 设定追逃双方切向速度  $v_i$  为常数。式(24)的初始条件为

$$\mathbf{X}_i = [x_{i0}, y_{i0}, z_{i0}, \psi_{i0}, \theta_{i0}]^T \quad (25)$$

构造一个与追逃双方相对距离相关的函数

$$\varphi(t) = \frac{(x_P - x_E)^2 + (y_P - y_E)^2 + (z_P - z_E)^2}{2} \quad (26)$$

显然, 追方期望该函数尽可能小, 而逃方期望其尽可能大。因此, 式(1)、式(2)中的末值项可取

$$\varphi_P(t_f) = \varphi(t_f) \quad (27)$$

$$\varphi_E(t_f) = -\varphi(t_f) \quad (28)$$

另外, 飞行中控制量决定了燃料的消耗量。由于无人机携带的燃料总是有限的, 所以在目标函数中可对控制量对时间的积分进行惩罚。根据以上分析,  $L_E, L_P$  可选择二次型

$$L_i = \mathbf{u}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{u}_i \quad \forall i = P, E \quad (29)$$

式中,  $\mathbf{R}_i = \text{diag}(K_{\omega_i}, K_{\xi_i})$ 。将式(27)~式(29)分别代入式(1)、式(2), 可得到目标函数

$$\min_{\omega_P} J_P = \varphi(t_f) + K_{P_\omega} \int_{t_0}^{t_f} \omega_P^2 dt + K_{P_\xi} \int_{t_0}^{t_f} \xi_P^2 dt \quad (30)$$

$$\min_{\omega_E} J_E = -\varphi(t_f) + K_{E_\omega} \int_{t_0}^{t_f} \omega_E^2 dt + K_{E_\xi} \int_{t_0}^{t_f} \xi_E^2 dt \quad (31)$$

式中,  $K_{P_\omega}, K_{P_\xi}, K_{E_\omega}$  和  $K_{E_\xi}$  为正实数的权重。如果追逃可以在短时间完成, 可将权重选择小些, 以突显相对距离的作用; 若追逃双方无法在短时间内决出胜负, 则将权重选择大些, 加大对燃料项的惩罚。

通过上述分析, 与式(1)~式(6)对应的三维追逃问题被描述为式(30)、式(31)和式(24)、式(25), 该问题是一个非零和的微分对策问题。

### 3 三维追逃问题的变换

根据式(9)~式(14)的变换过程, 构造追方  $P$  的哈密顿函数为

$$H_P = \boldsymbol{\lambda}_P^T \mathbf{f}_P + L_P = \lambda_1 v_P \cos \psi_P \cos \theta_P + \lambda_2 v_P \sin \psi_P \cos \theta_P +$$

$$\lambda_3 v_P \sin \theta_P + \lambda_4 \omega_P + \lambda_5 \psi_P + K_{P_\omega} \omega_P^2 + K_{P_\xi} \xi_P^2 \quad (32)$$

式中,  $\boldsymbol{\lambda}_P = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5]^T$  为追方的协态变量。根据变分法, 由式(10)可以得到追方的协态方程

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}_P = \mathbf{h}_P(\mathbf{X}_P, \boldsymbol{\lambda}_P) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_1 v_P \sin \psi_P \cos \theta_P - \lambda_2 v_P \cos \psi_P \cos \theta_P \\ \lambda_1 v_P \sin \theta_P \cos \psi_P + \lambda_2 v_P \sin \psi_P \sin \theta_P - \lambda_3 \cos \theta_P \end{pmatrix} \quad (33)$$

由式(11)得到追方  $P$  的横截条件

$$\begin{cases} \lambda_1(t_f) = x_{Pf} - x_{Ef} \\ \lambda_2(t_f) = y_{Pf} - y_{Ef} \\ \lambda_3(t_f) = z_{Pf} - z_{Ef} \\ \lambda_4(t_f) = \lambda_5(t_f) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

由式(20)和式(21)可得追方  $P$  的极值条件

$$2K_{P_\omega} \omega_P + \lambda_4 = 0 \quad (35)$$

$$2K_{P_\xi} \xi_P + \lambda_5 = 0 \quad (36)$$

和

$$\frac{\partial^2 H_P}{\partial \omega_P^2} = 2K_{P_\omega} \geq 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 H_P}{\partial \omega_P^2} = 2K_{P_\xi} \geq 0 \quad (38)$$

由于  $K_{P_\omega}, K_{P_\xi}$  为正实数, 式(37)、式(38)总是成立的, 因此, 追方的最优控制量可直接由式(35)、式(36)解出, 即

$$\omega_P = -\lambda_4 / 2K_{P_\omega} \quad (39)$$

$$\xi_P = -\lambda_5 / 2K_{P_\xi} \quad (40)$$

将式(39)、式(40)代入式(24), 追方的状态方程变为

$$\dot{\mathbf{X}}_P = \mathbf{g}_P(\mathbf{X}_P, \mathbf{u}_P) = \begin{pmatrix} v_P \cos \psi_P \cos \theta_P \\ v_P \sin \psi_P \cos \theta_P \\ v_P \sin \theta_P \\ -\lambda_4 / 2K_{P_\omega} \\ -\lambda_5 / 2K_{P_\xi} \end{pmatrix} \quad (41)$$

至此, 式(30)、式(31)和式(24)、式(25)三维追逃微分对策问题被转换成了最优控制问题。结果是: 消去了追方的式(30)目标函数, 保留逃方的式(31)目标函数; 逃方 ( $i = E$ ) 的状态方程式(24)保持不变; 追方的状态方程变为式(41); 双方的初始条件仍然是式(25); 增加了式(33)追方的协态方程及式(34)边界条件。

### 4 三维追逃问题的数值求解

本节应用 Legendre 伪谱法将最优控制问题转换为非线性规划问题<sup>[10]</sup>, 该方法采用 LGL (Legendre-Gauss-Lobatto) 点作为配置点, 并将状态和控制变量在 LGL 点离散。目标函数的积分项将通过 Gauss-Lobatto

积分方法转换,将上一节得到的最优控制问题转换成非线性规划模型

$$\min J_E = -\varphi(\mathbf{X}^N(\tau_N), \tau_N) + \frac{t_f - t_0}{2} K_{E_s} \sum_{k=0}^N \omega_E^2(\tau_k) \omega_k + \frac{t_f - t_0}{2} K_{E_c} \sum_{k=0}^N \xi_E^2(\tau_k) \omega_k \quad (42)$$

s. t.

$$\mathbf{D} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_E \\ \mathbf{X}_P \\ \boldsymbol{\lambda}_P \end{bmatrix} = \frac{t_f - t_0}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_E(\mathbf{X}_E, \mathbf{u}_E, \tau_k) \\ \mathbf{g}_P(\mathbf{X}_P, \boldsymbol{\lambda}_P, \tau_k) \\ \mathbf{h}_P(\mathbf{X}_P, \boldsymbol{\lambda}_P, \tau_k) \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\mathbf{X}_i(\tau_0) = [x_i^0, y_i^0, z_i^0, \psi_i^0, \theta_i^0]^T \quad \forall i = E, P \quad (44)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau_N) = [x_P^N - x_E^N, y_P^N - y_E^N, z_P^N - z_E^N, 0, 0]^T \quad (45)$$

$$-1 \leq \tau_k \leq 1 \quad (46)$$

其中:  $\tau_k$  为转换后的时域;  $N$  为 Legendre 正交多项式的阶数, 而配置点的个数为  $N+1$ , 记为  $\tau_k, k=0, \dots, N$ ;  $\mathbf{x}_i$  和  $\boldsymbol{\lambda}_P$  分别表示配置点处的离散状态变量和协态变量;  $\omega_k$  为 LGL 积分权重;  $\mathbf{D}$  为微分矩阵, 表示各 Lagrange 基函数在各 LGL 配置点处的微分值。当 LGL 配置点数确定时,  $\omega_k$  和  $\mathbf{D}$  也是唯一确定的, 其具体形式可参阅文献[11]。

## 5 仿真分析

本节对式(42)~式(46)的非线性规划问题进行数值求解和仿真。求解过程在 Matlab 编程环境下使用 TOMLAB 工具箱中的 SNOPT 求解器完成。

仿真参数设定如下:  $N=26, v_p=0.35 \text{ km/s}, v_E=0.3 \text{ km/s}, K_{P_s}=K_{P_c}=K_{E_s}=K_{E_c}=100, t_f=50 \text{ s}$ 。这里, 追方具有速度优势  $v_p > v_E$ 。双方的初始条件为:  $\mathbf{X}_E(\tau_0) = [10, 20, 15, 2\pi/3, 0]^T, \mathbf{X}_P(\tau_0) = [5, 15, 5, \pi/6, \pi/4]^T$ 。

为了提高求解效率, 在求解过程中对状态量进行了归一化处理。对该仿真进行 10 次运算, 在 Windows7 32 位操作系统, 3.40 GHz 处理器, 4 G 内存情况下, 花费 CPU 时间  $0.78 \pm 0.001 \text{ s}$ 。10 次运算的结果完全一致, 花费时间相差不到 1 ms。

图 1~图 3 分别为三维空间、竖直平面和水平平面内追逃双方的运动轨迹。从图 1~图 3 可以直观地看出, 逃方采取了合理的转向机动对追方进行有效规避, 但是由于追方具有速度优势最终缩短了与逃方的距离。在整个追逃过程中, 目标视线的变化率很小, 相邻的目标视线在空间中近似是平行的, 且追方的航迹非常平直, 说明追方的策略与平行接近法的导引律相似, 是非常理想的。在追逃博弈的后半程, 双方的速度方向接近一致, 说明逃方已经把追方甩到了正后方, 逃方策略也是非常成功的。此时, 双方都采取了近似直线的运动, 这与人类的直觉相符。

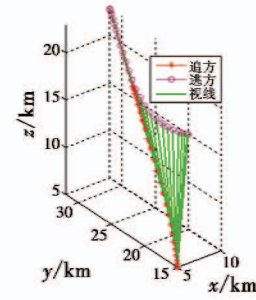


图 1 三维空间的追逃轨迹

Fig. 1 Pursuer-evader trajectory in three-dimensional space

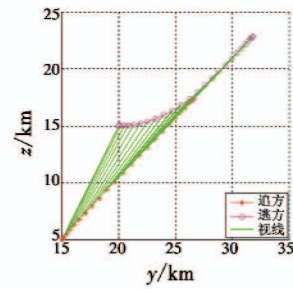


图 2 竖直平面内的追逃轨迹

Fig. 2 Pursuer-evader trajectory in vertical plane

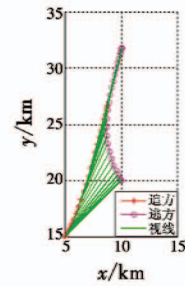


图 3 水平平面内追逃轨迹

Fig. 3 Pursuer-evader trajectory in horizontal plane

图 4 为追逃双方位置状态量随时间的变化。从图中可以看出, 在起始阶段双方在  $x$  方向的距离迅速缩短, 这是因为逃方的初始航向处于劣势。在逃方采取了快速大角度机动后, 双方在  $x$  方向上接近的速度变得缓慢, 逃方策略取得了明显效果。而追方仅在前半程在  $x$  方向上做了一个很小的机动, 整个追击路径非常平直, 特别是后半程的路径近似直线, 可见追方的策略也是非常合理的。

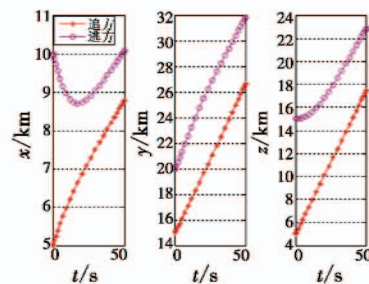


图 4 追逃双方的位置状态量

Fig. 4 Position states of pursuer and evader



图 5 表示追逃双方角度状态量随时间的变化。双方初始时刻的航向角和航迹倾角分别相差  $60^\circ$  和  $45^\circ$ 。在博弈的前半段, 逃方对航向角和航迹倾角都做了大角度的快速机动, 从而将追方甩到了自身正后方, 此策略对逃方显然是成功的。而追方也有针对性地调整了航向角, 这与图 5 中追方在  $x$  方向上的机动是一致的。

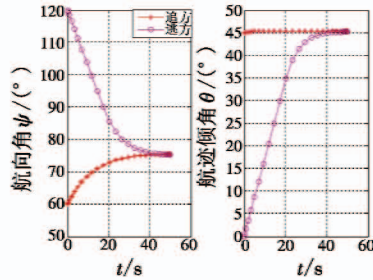


图 5 追逃双方角度状态量

Fig. 5 Attitude states of pursuer and evader

图 6 表示追逃双方相对距离的变化过程。可以看出, 尽管逃方已经选择了最优的控制策略进行逃逸, 但追方的速度优势和理想的追捕策略最终使得双方的距离不断缩小。在起始阶段相对距离曲线以较大的斜率下降, 主要是由于追方具有一定的角度优势。随着追逃双方的速度方向逐渐趋于一致, 追方被甩到了逃方的正后方, 距离曲线的斜率趋于常数。

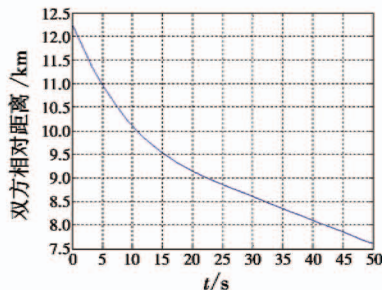


图 6 追方与逃方之间的相对距离

Fig. 6 Relative distance between pursuer and evader

## 6 结论

本文应用新提出的半直接法求解了无约束三维追逃问题。首先用间接法将复杂的微分对策问题转换为相对简单的最优控制问题, 然后用直接法再将其进一步转换为非线性优化问题, 大大降低了计算复杂性。在 Matlab 环境下通过 SNOPT 求解器对三维追逃问题进行了数值求解和仿真, 求解快速而稳定。对仿真结果的分析表明, 逃方采取了大角度快速机动的成功逃

跑策略, 而追方也适时做出了合理机动, 并利用速度优势最终赢得了博弈。仿真结果验证了本文提出的方法是正确、有效的, 由于计算速度快、结果稳定, 该方法具有很大的实际应用潜力。

## 参考文献

- [1] 顾文锦, 张汝川, 于进勇. 一种自适应双滑模制导律研究[J]. 电光与控制, 2009, 16(11): 8-10.
- [2] 赵超, 张君昌, 周凤歧. 混合策略制导在平面追逃问题中的应用[J]. 电光与控制, 1998, 5(4): 54-59.
- [3] OYLER D W, PIERRE T K, ANOUCK R G. Pursuit-evasion games in the presence of obstacles[J]. Automatica, 2016, 65: 1-11.
- [4] PONTANI M, CONWAY B A. Numerical solution of the three-dimensional orbital pursuit-evasion game[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2009, 32(2): 474-487.
- [5] 黑高源. 攻防对抗中追逃双方的最优策略及其参数分析[J]. 四川兵工学报, 2013, 34(7): 33-35.
- [6] 车竞, 郑凤麒. 基于微分对策的追逃对抗仿真[J]. 飞行力学, 2014, 32(4): 372-375.
- [7] 刘杰, 张健, 李世晓, 等. 基于三维空间的无人机规避攻击导引设计[J]. 电光与控制, 2014, 21(4): 34-37.
- [8] ALEXOPOULOS A, SCHMIDT T, BADREDDIN E. A pursuit-evasion game between unmanned aerial vehicles[C]// Proceedings of the 11th International Conference on Informatics in Control (ICINCO), Automation and Robotics, 2014: 74-81.
- [9] ALEXOPOULOS A, SCHMIDT T, BADREDDIN E. Pursuit and evasion in a recursive nested behavioral control structure for unmanned aerial vehicles[C]// Proceedings of the 14th International Conference on Control (ICCAS), Automation and Systems, 2014: 1175-1180.
- [10] CONWAY B A, PONTANI M. Optimal interception of evasive missile warheads: numerical solution of the differential game[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 31(4): 1111-1122.
- [11] XU G Y, SUN C M, ZHANG H M, et al. Vibration suppressive control of flexible-joint space manipulators based on Legendre pseudospectral method[C]// Proceedings of Chinese Control and Decision Conference (CCDC), 2014: 3322-3327.