

## 带攻击角约束的有限时间收敛滑模制导律

张凯<sup>1</sup>, 杨锁昌<sup>1</sup>, 张宽桥<sup>1</sup>, 姚运志<sup>1</sup>, 陈鹏<sup>2</sup>

(1. 军械工程学院, 石家庄 050003; 2. 军械技术研究所, 石家庄 050003)

**摘要:** 针对导弹带攻击角度约束打击目标问题, 提出带攻击角约束的有限时间收敛滑模制导律。首先, 建立弹目相对运动关系, 基于滑模变结构理论, 采用一种快速非线性终端滑模面, 选取自适应幂次趋近律, 进行制导律设计。其次, 利用 Lyapunov 理论进行制导律的稳定性分析, 并对制导律有限时间收敛进行分析, 采用饱和函数代替符号函数, 减小抖动的影响。最后, 将所设计的制导律与带落角约束的偏置比例导引律进行对比。仿真表明, 所设计的制导律性能更加优越, 具有较强的鲁棒性, 达到期望攻击角度的要求。

**关键词:** 攻击角约束; 有限时间收敛; 终端滑模控制; 制导律

中图分类号: TJ765

文献标志码: A

文章编号: 1671-637X(2017)01-0063-04

## Finite-Time Convergent Sliding Mode Guidance Law with Impact Angle Constraint

ZHANG Kai<sup>1</sup>, YANG Suo-chang<sup>1</sup>, ZHANG Kuan-qiao<sup>1</sup>, YAO Yun-zhi<sup>1</sup>, CHEN Peng<sup>2</sup>

(1. Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050003, China;

2. Ordnance Technology Research Institute, Shijiazhuang 050003, China)

**Abstract:** For the issue of missile attacking the target with impact angle constraint, a finite-time convergent sliding-mode guidance law with impact angle of the constraint is put forward. First of all, the missile-target relative motion relationship is established, and the guidance law is designed based on the sliding mode variable structure theory by using a fast nonlinear terminal sliding mode surface and selecting adaptive exponential reaching law. Then, the stability of the guidance law is analyzed by using Lyapunov theory, and analysis is also made to the finite-time convergence. Saturation function is used instead of symbolic function to reduce the influence of jitter. Finally, the designed guidance law is compared with the offset proportional guidance law with fall angle constraint. Simulation shows that the designed guidance law has better performance, stronger robustness, and can achieve the requirement of the expected impact angle.

**Key words:** impact angle constraint; finite-time convergence; terminal sliding mode control; guidance law

### 0 引言

现代战争中, 导弹作为制导武器, 具有精确打击目标的效果, 如果以一定落角命中目标, 将实现战斗部更大的杀伤效果。自 KIM 和 GRIDER 首次在导弹再入制导研究中提出落角约束问题以来, 越来越多的学者专家针对不同的背景, 根据不同的理论方法设计出多种落角约束的制导律<sup>[1-12]</sup>。文献[2]为增大反坦克导弹的毁伤效果, 提出一种基于落角约束的偏置比例导引律, 研究了落角约束对导引律法向过载的影响; 文献[3]为使导

弹以一定落角约束有效命中目标, 设计了自由切换导航系数的自适应比例导引律, 得出导航系数的自适应调整函数, 通过仿真证明该制导律具有良好的制导性能; 文献[6]根据理论基础的不同, 将具有终端落角约束的制导律划分为最优制导律、变结构制导律以及其他类型的制导律, 分别对几类典型终端角度约束的制导律研究进展以及优缺点进行了分析与仿真验证。

以上制导律仿真研究表明其在性能上达到设计时所提出的对落角约束的要求, 可是对于制导系统收敛时间的问题却并未提及。因此, 将落角约束与有限时间收敛结合的制导律将是研究的新方向, 文献[13]设计一种有限时间收敛的滑模制导律, 仿真验证该制导律具有较强的鲁棒性, 但并未考虑削弱抖动。在变结

构制导律中存在开关函数项,控制量需要不断进行切换,而实际系统中,控制量的切换不可能瞬时完成,总会存在一定时间的滞后,会引起执行器的抖动,影响导弹的制导精度。因此,在设计变结构制导律时需要削弱抖动提高制导性能。

针对导弹带攻击角度约束打击目标的问题,根据滑模变结构理论,设计了带攻击角约束的有限时间收敛制导律,所设计的制导律在性能上相比带落角约束的偏置比例导引律有了很大的提升,具有较强的鲁棒性,并达到期望攻击角的要求。

## 1 理论知识

考虑如下非线性系统<sup>[13]</sup>

$$\dot{x} = f(x, t) \quad f(0, t) = 0, x \in R^n \quad (1)$$

式中,  $f: U_0 \times R \rightarrow R^n$  在  $U_0 \times R$  上连续,而  $U_0$  是原点  $x=0$  的一个开邻域。

基于有限时间控制理论,有如下引理。

**引理 1** 考虑非线性系统(1),假定存在一个定义在原点的邻域  $\hat{U} \subset U_0 \subset R^n$  上的光滑函数  $V(x)$ ,并且存在实数  $c > 0$  和  $0 < \lambda < 1$ ,使得  $V(x)$  在  $\hat{U}$  上是正定的,且  $\dot{V}(x) + cV^\lambda(x)$  在  $\hat{U}$  上半负定,则系统的原点是有限时间稳定的。稳定时间由初值  $x(0) = x_0$  决定,其上界为

$$T_x(x_0) \leq \frac{V^{1-\lambda}(x_0)}{c(1-\lambda)} \quad (2)$$

证明:由  $V(x)$  在  $\hat{U}$  上正定以及  $\dot{V}(x) + cV^\lambda(x)$  在  $\hat{U}$  上半负定可得

$$\dot{V}(x) \leq -cV^\lambda(x) \quad \forall t \geq 0 \quad (3)$$

对上式进行积分求解可得

$$V^{1-\lambda}(x) \leq V^{1-\lambda}(x_0) - c(1-\lambda)t \quad 0 \leq t \leq T_x(x_0) \quad (4)$$

考虑到当  $t \geq T_x(x_0)$  时,  $V(x) = 0$ ,可以得到系统的有限收敛时间为

$$T_x(x_0) \leq \frac{V^{1-\lambda}(x_0)}{c(1-\lambda)} \quad (5)$$

证明完毕。

## 2 弹目相对运动模型

在设计制导律之前,需要建立导弹和目标相对运动模型,为便于讨论分析,建立二维平面模型如图 1 所示。

假设导弹和目标均为质点,并且导弹的速度大于目标速度,为常数。其中:导弹  $M$  和目标  $T$  均视为质点; $v_m$  表示导弹速度; $v_t$  表示目标的速度; $\theta_m$  表示导弹弹道倾角; $\theta_t$  为目标航向角; $r$  为弹目之间相对距离; $q$  为弹目视线(LOS)角。

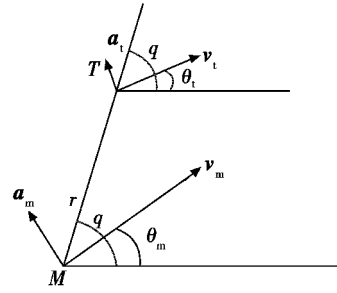


图 1 弹目相对运动示意图

Fig. 1 Relative motion of missile and target

弹目相对运动方程为

$$\dot{r} = -v_m \cos(q - \theta_m) + v_t \cos(q - \theta_t) \quad (6)$$

$$r\dot{q} = v_m \sin(q - \theta_m) - v_t \sin(q - \theta_t) \quad (7)$$

$$\dot{\theta}_m = a_m / v_m \quad (8)$$

$$\dot{\theta}_t = a_t / v_t \quad (9)$$

式中,  $a_m$  和  $a_t$  分别表示导弹和目标的法向加速度。

对式(6)、式(7)求导,可得

$$\begin{cases} \dot{r} = \dot{q} [v_m \sin(q - \theta_m) - v_t \sin(q - \theta_t)] + \\ \quad \dot{v}_t \cos(q - \theta_t) + v_t \dot{\theta}_t \sin(q - \theta_t) - \\ \quad \dot{v}_m \cos(q - \theta_m) - v_m \dot{\theta}_m \sin(q - \theta_m) \\ \dot{r}\dot{q} + r\ddot{q} = \dot{q} [v_m \cos(q - \theta_m) - v_t \cos(q - \theta_t)] + \\ \quad \dot{v}_m \sin(q - \theta_m) - v_m \dot{\theta}_m \cos(q - \theta_m) - \\ \quad \dot{v}_t \sin(q - \theta_t) + v_t \dot{\theta}_t \cos(q - \theta_t) \end{cases} \quad (10)$$

$u_q$  和  $w_q$  分别为导弹加速度和目标加速度在视线法向量上的分量,即

$$\begin{cases} u_q = -\dot{v}_m \sin(q - \theta_m) + v_m \dot{\theta}_m \cos(q - \theta_m) \\ w_q = -\dot{v}_t \sin(q - \theta_t) + v_t \dot{\theta}_t \cos(q - \theta_t) \end{cases} \quad (11)$$

将式(6)代入式(10),结合式(7)~式(9)和式(11)可得

$$2\dot{r}\dot{q} + r\ddot{q} = -u_q + w_q \quad (12)$$

即

$$\ddot{q} = -\frac{2\dot{r}\dot{q}}{r} + \frac{w_q}{r} - \frac{u_q}{r} \quad (13)$$

在未制导时,  $\dot{r}(t) < 0, 0 \leq r(t) \leq r, \forall t > 0$ 。选取  $x = \dot{q}, u = u_q, w = w_q$

$$\dot{x} = -\frac{2\dot{r}}{r}x + \frac{w}{r} - \frac{u}{r} \quad (14)$$

## 3 制导律设计与分析

### 3.1 制导律设计

文献[14]详细说明了带攻击角约束的制导问题,即转化为终端弹目视线角满足  $q(t) - q_d$  的问题。为了精确击中目标,并且获得期望的攻击角度,根据制导武器未制导问题,可以知道视线角速率为零代表理想状态下

导弹命中目标,考虑到在末端需满足  $|q(t) - q_d| = 0$  的约束条件,令  $\varphi(t) = q(t) - q_d$ ,设计一种快速非线性终端滑模面为

$$s = x + \alpha\varphi + \beta|\varphi|^\gamma \text{sgn}|\varphi| \quad (15)$$

式中:  $\alpha > 0, \beta > 0; \gamma = q/p, p$  和  $q (p > q)$  均为正奇数;  $q_d$  为约束角。

根据滑模变结构控制理论,为使系统状态快速趋近滑模面并且沿着滑模面运动,选取自适应幂次趋近律为  $\dot{s} = -\frac{\varepsilon}{r}|s|^{\alpha_1} \text{sgn} s$ , 其中,  $\varepsilon > 0, 0 < \alpha_1 < 1$ 。

由所选取的趋近律得

$$s\dot{s} = -\frac{\varepsilon}{r}|s|^{\alpha_1} \text{sgn} s \cdot s \quad (16)$$

由于

$$\text{sgn} s \cdot s = \begin{cases} s & s > 0 \\ -s & s < 0 \end{cases}$$

即

$$\text{sgn} s \cdot s = |s|$$

所以有

$$s\dot{s} = -\frac{\varepsilon}{r}|s|^{\alpha_1+1}$$

考虑到制导阶段  $\alpha_1 > 0$ , 因此,整理得

$$s\dot{s} = -\frac{\varepsilon}{r}|s|^{\alpha_1+1} < 0 \quad (17)$$

故满足滑模到达条件,系统可以到达滑模面。

对于选取的滑模面,如式(15),求导可得

$$\dot{s} = \dot{x} + \alpha\dot{\varphi} + \gamma\beta|\varphi|^{\gamma-1}x \quad (18)$$

将式(16)代入式(18),可得

$$\dot{x} + \alpha\dot{\varphi} + \gamma\beta|\varphi|^{\gamma-1}x = -\frac{\varepsilon}{r}|s|^{\alpha_1} \text{sgn} s \quad (19)$$

由上式可得

$$-\frac{2\dot{r}}{r}x + \frac{w}{r} - \frac{u}{r} + \alpha\dot{\varphi} + \gamma\beta|\varphi|^{\gamma-1}x + \frac{\varepsilon}{r}|s|^{\alpha_1} \text{sgn} s = 0 \quad (20)$$

由于  $x = \dot{q}, \varphi(t) = q(t) - q_d$ , 且  $q_d$  为常数,因此  $x = \dot{\varphi}(t)$ 。整理上式得

$$u = (-2\dot{r} + r\alpha + r\gamma\beta|\varphi|^{\gamma-1})x + w + \varepsilon|s|^{\alpha_1} \text{sgn} s \quad (21)$$

由制导律表达式可知,该制导律为变结构控制,对参数摄动和外部扰动具有鲁棒性,变结构制导律中含有开关函数项  $\text{sgn} s$ , 控制量需要不断切换,而在实际系统中,会存在一定的时间滞后,造成执行器的抖动,这种抖动实际上是导弹弹体的抖动,如果抖动过大,会影响其命中目标的精度。而抖动是变结构制导律固有的缺点,无法消除,只能将其减小。因此在该制导律中,以饱和函数  $\frac{s}{|s| + \delta}$  代替符号函数  $\text{sgn} s$  具有高增益、减小抖动的作用。得到

$$u = (-2\dot{r} + r\alpha + r\gamma\beta|\varphi|^{\gamma-1})x + w + \varepsilon|s|^{\alpha_1} \frac{s}{|s| + \delta} \quad (22)$$

对于弹目距离  $r(t)$  和弹目距离变化率  $\dot{r}(t)$ , 主动寻的导弹可以测量或者通过计算得到,而被动寻的导弹则不能直接获得,需要实时估计。末端制导时,  $\dot{r}(t)$  变化不大,可以认为不变。考虑到变结构控制的强鲁棒性,将目标的机动视为有界干扰,这样制导律则变为

$$u = (-2\dot{r} + r\alpha + r\gamma\beta|\varphi|^{\gamma-1})x + \varepsilon|s|^{\alpha_1} \frac{s}{|s| + \delta} \quad (23)$$

### 3.2 有限时间收敛分析

系统运动状态可分为滑模到达阶段和沿滑模面运动阶段,需要分别进行有限时间收敛分析。

对于滑模到达阶段,选取 Lyapunov 函数  $V_1 = s^2$ , 对其求导,得

$$\dot{V}_1 = 2s\dot{s} = -2\frac{\varepsilon}{r}|s|^{\alpha_1+1} < 0 \quad (24)$$

在末制导时,  $\forall t > 0, \dot{r}(t) < 0, 0 \leq r(t) \leq r$ , 令  $k_1 = \frac{\varepsilon}{r}$ , 由上式实际得

$$\dot{V}_1 \leq -2k_1 V_1^{(\alpha_1+1)/2} \quad \forall t > 0 \quad (25)$$

由引理1知,系统状态在有限时间内收敛到滑模面的时间为

$$T_1 \leq \frac{V_1^{(1-\alpha_1)/2}(x_0, 0)}{k_1(1-\alpha_1)} \quad (26)$$

系统状态达到滑模面后,将沿滑模面运动至平衡点,此时滑模面满足

$$s = x + \alpha\varphi + \beta|\varphi|^\gamma \text{sgn} \varphi = 0 \quad (27)$$

由于  $x = \dot{\varphi}$ , 上式变为

$$\dot{\varphi} = -\alpha\varphi - \beta|\varphi|^\gamma \text{sgn} \varphi \quad (28)$$

对式(28)去 Lyapunov 函数为

$$V_2 = \varphi^2 \quad (29)$$

对其求导可得

$$\dot{V}_2 = 2\varphi\dot{\varphi} = -2\alpha\varphi^2 - 2\beta|\varphi|^{\gamma+1} \leq -2\beta|\varphi|^{\gamma+1} = -2\beta V_2^{(\gamma+1)/2} < 0 \quad (30)$$

由 Lyapunov 稳定性理论知,式(28)是渐近稳定的,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = q_d$ , 此式表示为弹目视线角能够收敛到期望攻击角度。

由引理1知,  $T_2 \leq \frac{V_2^{(1-\gamma)/2}(x_0, 0)}{\beta(1-\gamma)}$ , 所以,制导系统

总的收敛时间为

$$T = T_1 + T_2 \leq \frac{V_1^{(1-\alpha_1)/2}(x_0, 0)}{k_1(1-\alpha_1)} + \frac{V_2^{(1-\gamma)/2}(x_0, 0)}{\beta(1-\gamma)} \quad (31)$$

综上所述,所设计的制导律能使制导系统状态在有限时间内收敛。由式(31)可以看出,系统状态到达滑模面的时间与选取参数  $k_1$  成反比,当参数  $k_1$  较大时,收敛

时间较短;当参数  $k_1$  较小时,收敛时间较长。系统到达滑模面后,收敛到原点的时间与参数  $\beta, \gamma$  大小有关。

### 4 仿真结果与分析

本文设计的带攻击角约束有限时间收敛的滑模制导律 (FTCG) 主要应用于攻击固定目标,为验证其精确制导性能,需进行仿真验证。

**仿真 1** 针对不同着角约束条件,进行仿真验证。假设导弹初始位置为 (0 m, 500 m, 0 m), 速度为 180 m/s; 目标为空中悬停武装直升机, 目标位置为 (1000 m, 500 m, 1000 m)。仿真结果分别如表 1、图 2、图 3 所示。

表 1 不同着角约束条件的仿真

Table 1 Simulation of different impact angle constraints

$q_d / (^\circ)$	飞行时间/s	脱靶量/m	实际弹目视线角 / (°)
75	8.01	0.188	74.09
60	7.99	0.163	59.68
45	7.98	0.175	45.34

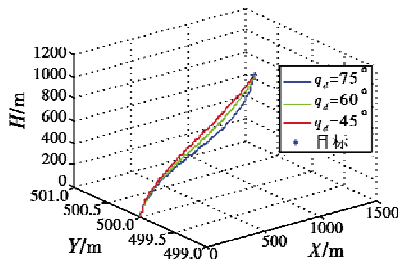


图 2 不同着角约束条件的弹道

Fig. 2 Trajectory of different impact angle constraints

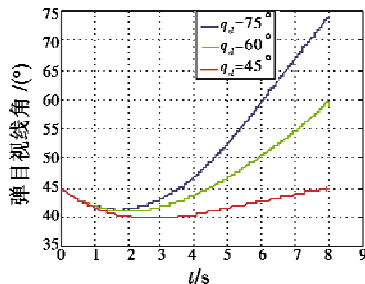


图 3 不同着角约束条件的弹目视线角

Fig. 3 LOS of different impact angle constraints

通过表 1、图 2 和图 3 不同着角约束条件下的弹道仿真和弹目视线角来看,导弹的脱靶量和着角约束均满足性能指标。由图 2 和图 3 可以看出,在着角约束  $45^\circ$  向着角约束  $75^\circ$  增大的过程中,导弹弹道变得更加平直,而导弹飞行时间变小,复合实际情况。脱靶量最大的为 0.188 m,最小的为 0.163 m,针对空中目标,现在大多数防空导弹都采用破片式杀伤战斗部,所以该仿真脱靶量符合实际偏差,基本不会影响导弹毁伤目标性能。

**仿真 2** 对比验证,与文献[2]传统比例导引律改进的带落角约束偏置比例导引律 (BPNG) 进行比较。

为方便比较两种制导律的性能,在二维平面进行仿真验证。假设导弹的初始位置为 (0 m, 0 m), 目标初始位置为 (0 m, 2000 m), 导弹的速度为 180 m/s, 着角约束为  $70^\circ$ , 仿真结果如图 4 ~ 图 6 所示。

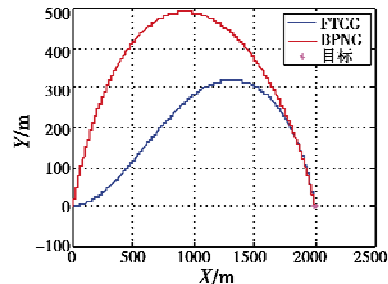


图 4 导弹运动轨迹

Fig. 4 Trajectory of missile

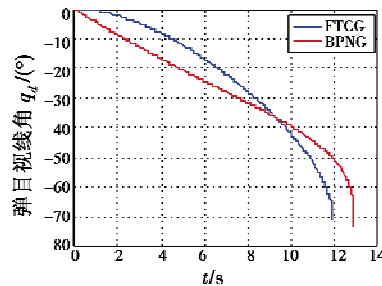


图 5 弹目视线角

Fig. 5 LOS of missile and target

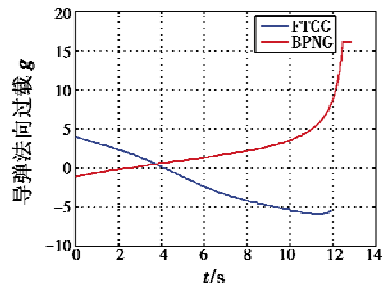


图 6 导弹法向过载

Fig. 6 Normal overload of missile

由图 4 可知,FTCC 相比 BPNG 飞行导弹前端较平直,这对导弹精确打击和速度的大小是非常有利的,对于攻击地面固定目标或者地面防御工事的被动捷联寻的导弹,平直的轨迹利于末制导的精确调节。由图 5 可知,FTCC 的着角约束为  $71.35^\circ$ , 而 BPNG 着角约束为  $73.62^\circ$ , 相比于 BPNG, 本文所设计的制导律更能接近着角约束,基本实现制导律所设计的功能。由图 6 可知,运用 FTCC 的飞行时间为 11.96 s, 而运用 BPNG 的飞行时间为 12.90 s, FTCC 飞行时间明显小于 BPNG, 防止为目标逃逸提供时间余量。二者在未制导时,FTCC 法向过载趋于收敛,能够在导弹接近目标时提供控制余量抵抗外界自然环境等的干扰,而 BPNG 法向过载逐渐增大,会严重影响导弹制导性能。

统的描述统一 EFPs 属性描述体系,使属性描述更加全面、科学;而后通过 EFPs 数据细化,保证了属性数据在开发不同阶段及不同复用环境中的准确性、有效性;最后针对 IEDM 模型多版本数据,给出数据筛选方法。该模型对 EFPs 属性的描述还需在开发应用中进一步检验。

### 参考文献

- [1] SENTILLES S, STEPAN P, CARLSON J, et al. Integration of extra-functional properties in component models [C]//The 12th International Symposium on Component Based Software Engineering, 2009:184-197.
- [2] VAN OMMERING R, VAN DER LINDEN F, KRAMER J, et al. The Koala component model for consumer electronics software[J]. Computer, 2000, 33(3):78-85.
- [3] MAASKANT H. A robust component model for consumer electronic products [J]. Philips Research, 2005, 13(3):167-192.
- [4] KOZIOLEK H. Parameter dependencies for reusable performance specifications of software components [D]. Oldenburg: Oldenburg University, 2008.
- [5] AKERHOLM M, CARLSON J, FREDRIKSSON J, et al. The SAVE approach to component-based development of vehicular systems [J]. Journal of Systems and Software, 2007, 80(5):655-667.
- [6] BORDE E, CARLSON J. Toward verified synthesis of ProCom, a component model for real-time embedded systems [J]. IEEE Transactions on Software Engineering, 2011, 20(24):129-138.
- [7] VULGARAKIS A, SURYADEVARA J, CARLSON J, et al. Formal semantics of the ProCom real-time component model [C]//The 35th Euromicro Conference on Software Engineering and Advanced Applications, 2009:478-485.
- [8] 刘美红,金茂忠,晏海华.一种基于 Visual Studio. NET 的 C# 构件模型研究[J]. 计算机工程与应用, 2003, 39(30):62-64, 90.
- [9] 张世琨,王立福,杨芙清.基于 COTS 构件的系统开发[J]. 计算机科学, 2000, 27(1):6-8, 20.

(上接第 66 页)

通过仿真可知,本文所提的制导律能够以期望攻击角命中目标,并具有良好的鲁棒性。

### 5 结束语

本文针对导弹末制导攻击角度约束问题,选取一种快速终端滑模面,设计一种带攻击角约束的有限时间收敛滑模制导律,对有限时间收敛进行分析和证明,并对抖动现象进行削弱分析,通过仿真对比,本文所设计的制导律具有较强的鲁棒性以及较好的制导性能,能够达到所期望的攻击角度约束。

### 参考文献

- [1] KIM M, GRIDER K V. Terminal guidance for impact attitude angle constrained flight trajectories [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1973, 9(6):852-859.
- [2] 高峰,唐胜景,师娇,等.一种基于落角约束的偏置比例导引律[J]. 北京理工大学学报, 2014, 34(3):277-282.
- [3] 张旭,雷虎民,曾华,等.带落角约束的自适应比例制导律[J]. 固体火箭技术, 2011, 34(6):687-692.
- [4] 陈琦,王中原,常思江.带有落角约束的间接 Gauss 伪谱最优制导律[J]. 兵工学报, 2015, 36(7):1203-1212.
- [5] 熊少锋,王卫红,刘晓东,等.考虑导弹自动驾驶仪动态特性的带攻击角度约束制导律[J]. 控制与决策, 2015, 30(4):585-592.
- [6] 蔡洪,胡正东,曹渊.具有终端角度约束的导引律综述[J]. 宇航学报, 2010, 31(2):315-323.
- [7] 吴鹏,杨明.带终端攻击角度约束的变结构制导律[J]. 固体火箭技术, 2008, 31(2):116-120.
- [8] 席杰,杨军,朱学平.带落角和导引头视角约束的制导律设计[J]. 电光与控制, 2014, 21(9):26-28.
- [9] 张亚松,任宏光,吴震,等.带落角约束的滑模变结构制导律研究[J]. 电光与控制, 2012, 19(1):66-68.
- [10] 胡正东,郭才发,蔡洪.带落角约束的再入机动弹头的复合导引律[J]. 国防科技大学学报, 2008, 30(3):21-26.
- [11] 刘永善,贾庆忠,刘藻珍.电视制导侵彻炸弹落角约束的变结构导引律[J]. 弹道学报, 2006, 18(2):9-14.
- [12] 常超,林德福,祁载康,等.带落点和落角约束的最优末制导律研究[J]. 北京理工大学学报, 2009, 29(3):233-239.
- [13] 张运喜,孙明玮,陈增强.滑模变结构有限时间收敛制导律[J]. 控制理论与应用, 2012, 29(11):1413-1418.
- [14] 张尧,郭杰,唐胜景,等.机动目标拦截含攻击角约束的新型滑模制导律[J]. 兵工学报, 2015, 36(8):1443-1457.