

## 基于 Wiener 过程的非线性加速退化可靠性评估方法

蔡忠义, 陈云翔, 车飞, 张磊  
(空军工程大学装备管理与安全工程学院, 西安 710051)

**摘要:** 针对恒定应力加速退化试验场合下的非线性退化数据, 考虑个体之间的退化差异, 提出了基于 Wiener 过程的非线性加速退化可靠性评估方法。采用 Wiener 过程描述产品的退化过程; 运用时间尺度模型对非线性数据进行线性变换; 将 Wiener 过程的漂移系数随机化处理, 提出考虑个体差异的可靠性模型和加速退化模型; 采用两步极大似然估计法确定模型中的未知参数, 结合算例分析验证了方法的正确性和优越性。

**关键词:** 可靠性评估; 加速退化建模; Wiener 过程; 非线性数据; 个体差异

**中图分类号:** TB114.3      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1671-637X(2016)02-0087-04

## Reliability Assessment of Nonlinear Accelerated Degradation Based on Wiener Process

CAI Zhong-yi, CHEN Yun-xiang, CHE Fei, ZHANG Lei

(Equipment Management & Safety Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710051, China)

**Abstract:** Aiming at nonlinear degradation data in occasion of Constant-Stress Accelerated Degradation Test (CSADT), a method for reliability assessment of nonlinear accelerated degradation based on Wiener process is put forward with consideration of individual performance degradation variation. The Wiener process is used to describe the degradation process of products. The time scale model is used to change nonlinear data into linear data. Drift coefficient of Wiener process is regarded as a random variable. The reliability model and accelerated degradation model are built up with consideration of individual variation. The Two-Step Maximum Likelihood Estimation method (TSMLE) is used to obtain the unknown parameters in the reliability model. An example is given to show the accuracy and superiority of the presented method.

**Key words:** reliability assessment; accelerated degradation modeling; Wiener process; nonlinear data; individual variation

### 0 引言

随着加速试验技术的快速发展, 利用加速退化建模技术, 获取产品性能退化数据, 外推产品可靠性信息成为当前可靠性工程领域的研究热点<sup>[1]</sup>。以 Wiener 过程为代表的随机过程模型, 充分考虑了产品在正常工作或试验环境中发生性能退化的随机性和动态性, 可以较好地描述产品的真实退化过程, 成为当前加速退化建模的重要技术手段。

Wiener 过程是一种具有平稳、便于计算与分析特性的随机过程模型, 具有广泛的应用前景。当产品的

备可靠性与质量管理。

性能退化过程呈现出总体均匀变化, 而个体差异随时间增加而逐步增大时, 都可用 Wiener 过程来描述<sup>[2-3]</sup>。目前基于 Wiener 过程加速退化建模的难点主要在于以下两点。

1) 如何处理非线性数据<sup>[4]</sup>。主要解决方法是进行坐标变换, 将非线性数据组变换为线性数据组。学者 WHITMORE 最早提出两类时间尺度变换模型来解决 Wiener 过程在非线性退化数据建模中的问题, 实例表明了模型具有较好的实用性<sup>[5]</sup>。文献[6-7]在此基础上, 进一步开展了基于非线性 Wiener 过程的加速退化数据建模与应用研究。

2) 如何考虑个体之间的性能退化差异。由于产品在制造、材料以及环境中受随机因素的影响而表现出个体之间的退化速率不一, 存在一定的差异性, 需要

研究个体差异对产品可靠性评估的影响。主要解决方法是对 Wiener 过程的系数进行随机化处理。文献[8]对 Wiener 过程的两个系数都进行随机化处理,通过 EM (Expectation Maximization) 算法来估计参数,但计算复杂,难以推广;文献[9]仅将 Wiener 过程的漂移系数看作服从于正态分布的随机变量,给出了考虑个体差异的产品寿命模型,模型拟合性好,便于计算。

基于此,本文针对恒定应力加速退化试验场合,采用时间尺度模型将非线性退化数据转换为线性数据,将 Wiener 过程的漂移系数随机化处理,建立考虑个体差异的加速退化可靠性模型,采用两步极大似然估计法确定模型中的未知参数。

## 1 Wiener 过程

若一维连续随机过程  $\{X(t), t \geq 0\}$  满足以下性质<sup>[2]</sup>,即

1) 时刻  $t$  到时刻  $t + \Delta t$  的增量服从正态分布,即  $\Delta X = X(t + \Delta t) - X(t), \Delta X \sim N(\lambda \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$ ;

2) 对于任意两个不相交的时间段  $[t_1, t_2]$  和  $[t_3, t_4]$  ( $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ ), 随机过程增量  $X(t_4) - X(t_3)$  与  $X(t_2) - X(t_1)$  相互独立;

3)  $X(t)$  在  $t = 0$  处连续且  $X(0) = 0$ 。

则称  $X(t)$  为一元 Wiener 过程(或带线性漂移的布朗运动),可记为

$$X(t) = \lambda t + \sigma_B B(t) \quad (1)$$

式中: $\lambda$  为漂移系数; $\sigma_B$  为扩散系数; $B(t)$  为标准布朗运动。

由于  $X(t)$  符合齐次马尔可夫过程, $X(t)$  的均值和方差都是时间的线性函数。因此,一元 Wiener 过程一般用于描述线性退化过程。

## 2 非线性加速退化数据可靠性建模

### 2.1 寿命可靠度函数

工程实践上,许多产品的退化过程常呈现出非线性、随机性等特征,针对这类数据,一般先对非线性退化数据进行线性变换,使其可用 Wiener 过程进行描述;然后将 Wiener 过程的漂移系数随机化处理,使其能完整描述产品退化过程中的随机特性。

对于非线性退化数据,即退化量  $X(t)$  与时间  $t$  呈非线性关系时,采用时间尺度模型  $\tau = \Lambda(t)$  且有  $Y(\tau) = X(t)$ <sup>[5]</sup>,对非线性退化数据进行线性变换,使得退化量  $X(t)$  与  $\tau$  呈非线性关系,则有

$$Y(\tau) = \lambda \tau + \sigma_B B(\tau) \quad (2)$$

根据基于 Wiener 过程的退化失效可靠性模型,经数据推导可得产品的寿命可靠度和概率密度函数为

$$R_T(t) = R_T[\Lambda(t)] =$$

$$\Phi\left(\frac{l - \lambda \Lambda(t)}{\sigma_B \sqrt{\Lambda(t)}}\right) - \exp\left(\frac{2\lambda l}{\sigma_B^2}\right) \Phi\left(\frac{-l - \lambda \Lambda(t)}{\sigma_B \sqrt{\Lambda(t)}}\right) \quad (3)$$

$$f_T(t) = -\frac{dR[\Lambda(t)]}{d\Lambda(t)} \cdot \frac{d\Lambda(t)}{dt} = -f_T(\tau) \cdot \frac{d\Lambda(t)}{dt} = \frac{l}{\sqrt{2\pi\sigma_B^2\Lambda(t)^3}} \exp\left[-\frac{(l - \lambda \Lambda(t))^2}{2\sigma_B^2\Lambda(t)}\right] \frac{d\Lambda(t)}{dt} \quad (4)$$

考虑到个体之间退化差异性,将漂移系数  $\lambda$  随机化处理,假定  $\lambda$  服从正态分布  $N(\mu_\lambda, \sigma_\lambda^2)$ ,则可将式(2)改写为

$$Y(\tau) = \lambda \tau + \sigma_B B(\tau) \quad \lambda \sim N(\mu_\lambda, \sigma_\lambda^2) \quad (5)$$

同理,可推导出考虑个体差异的产品寿命可靠度和概率密度函数为<sup>[9]</sup>

$$R_T(t) = \Phi\left(\frac{l - \mu_\lambda \Lambda(t)}{\sqrt{\sigma_B^2 \Lambda(t) + \sigma_\lambda^2 \Lambda(t)^2}}\right) - \exp\left[\frac{2l}{\sigma_B^2} \left(\lambda + \frac{\sigma_\lambda^2}{\sigma_B^2}\right)\right] \Phi\left[-\frac{2\sigma_\lambda^2 \Lambda(t) + \sigma_B^2 (l + \mu_\lambda \Lambda(t))}{\sigma_B^2 \sqrt{\sigma_B^2 \Lambda(t) + \sigma_\lambda^2 \Lambda(t)^2}}\right] \quad (6)$$

$$f_T(t) = \frac{l}{\sqrt{2\pi\Lambda(t)^3(\sigma_B^2 + \sigma_\lambda^2 \Lambda(t))}} \exp\left[-\frac{(l - \lambda \Lambda(t))^2}{2\Lambda(t)(\sigma_B^2 + \sigma_\lambda^2 \Lambda(t))}\right] \frac{d\Lambda(t)}{dt} \quad (7)$$

### 2.2 恒加速退化模型

Arrhenius 模型是工程实践中应用广泛的一类物理加速模型,主要适用于描述温度应力对产品退化的影响<sup>[1]</sup>。对于 Wiener 过程,一般认为漂移系数  $\lambda$  与温度应力有关,而扩散系数  $\sigma_B$  与温度应力无关,对于恒定应力加速退化试验中的温度应力  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 而言,其加速退化模型可表示为

$$\lambda_i = a \exp(-b/S_i) \quad (8)$$

式中: $\lambda_i$  为温度应力  $S_i$  下的 Wiener 过程漂移系数; $a, b$  为待定常数。

考虑到产品个体之间的差异客观存在,应采用基于随机变量的 Arrhenius 模型来描述产品个体之间的退化差异性,则在应力  $S_i$  下第  $j$  个产品的加速退化模型可表示为

$$\lambda_i^j = a_j \exp(-b/S_i) \quad (9)$$

令  $a \sim N(\mu_a, \sigma_a^2)$ ,则应力  $S_i$  下考虑了个体差异的漂移系数  $\lambda_i$  可表示为

$$\lambda_i \sim N[\mu_a \exp(-b/S_i), \sigma_a^2 \exp(-b/S_i)] \quad (10)$$

## 3 参数估计

已知在恒加速退化试验中,温度应力  $S_i$  下第  $j$  个产品第  $k$  次测量的性能退化量较第  $k - 1$  次测量时产品性

能退化量增加了  $\Delta X(t_{i,k}^j) = X(t_{i,k}^j) - X(t_{i,k-1}^j)$ , 时间增量为  $\Delta t_{i,k}^j = t_{i,k}^j - t_{i,k-1}^j$ , 则根据 Wiener 过程性质可知

$$\Delta X(t_{i,k}^j) \sim N(\lambda_i \Delta t_{i,k}^j, \sigma_B^2 \Delta t_{i,k}^j) \quad (11)$$

对于经时间尺度模型变换后的考虑个体差异的线性退化数据  $[\tau, Y(\tau)]$ , 则有

$$\Delta Y(\tau_{i,k}^j) \sim N(\lambda_i^j \Delta \tau_{i,k}^j, \sigma_B^2 \Delta \tau_{i,k}^j) \quad (12)$$

式中

$$\begin{cases} \Delta Y(\tau_{i,k}^j) = Y(\tau_{i,k}^j) - Y(\tau_{i,k-1}^j) \\ \Delta \tau_{i,k}^j = \tau_{i,k}^j - \tau_{i,k-1}^j \\ \tau_{i,0}^j = 0 \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, K; \Delta \tau_{i,k}^j$  为应力  $S_i$  下第  $j$  个产品第  $k$  次测量时间增量变换值;  $\lambda_i^j$  为应力  $S_i$  下第  $j$  个产品服从于 Wiener 过程的漂移参数;  $\Delta Y(\tau_{i,k}^j)$  为对应的性能退化增量。

根据式(12)、式(13)可知, 建立极大似然估计函数

$$\begin{aligned} \ln L(\Theta) = & -\frac{mnK}{2} [\ln 2\pi + \ln \sigma_B^2] - \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \ln \Delta \tau_{i,k}^j - \\ & \frac{1}{2\sigma_B^2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \frac{[\Delta Y(\tau_{i,k}^j) - \lambda_i^j \Delta \tau_{i,k}^j]^2}{\Delta \tau_{i,k}^j} \end{aligned} \quad (14)$$

采用时间尺度变换模型  $\tau = t^{c[5]}$ , 将  $\Delta Y(\tau_{i,k}^j) = \Delta X(t_{i,k}^j)$  和式(9)一并代入式(14)中, 可得

$$\begin{aligned} \ln L(\Theta) = & -\frac{mnK}{2} [\ln 2\pi + \ln \sigma_B^2] - \\ & \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \ln [(t_{i,k}^j)^c - (t_{i,k-1}^j)^c] - \\ & \frac{1}{2\sigma_B^2} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \frac{[\Delta X(t_{i,k}^j) - a_j \exp(-b/S_i) ((t_{i,k}^j)^c - (t_{i,k-1}^j)^c)]^2}{(t_{i,k}^j)^c - (t_{i,k-1}^j)^c} \end{aligned} \quad (15)$$

式中,  $\Theta = \{a_j, b, c, \sigma_B^2\}, j=1, 2, \dots, m$ , 表示未知参数集合。

分别令式(15)关于  $a_j, \sigma_B^2$  的一阶偏导数为零, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(\Theta)}{\partial a_j} = 0 & j=1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial \ln L(\Theta)}{\partial \sigma_B^2} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

理论上, 根据收集到的数据组  $[t_{i,k}^j, X(t_{i,k}^j)]$  及所建的模型, 可以解出式(16)并求出  $\hat{a}_j, \hat{\sigma}_B^2$ 。但进一步分析可知, 式(16)的求解其实是依赖于  $b, c$  的取值。因此, 采用两步极大似然估计法来求解未知参数  $\Theta^{[9]}$ 。

1) 估计  $\hat{b}, \hat{c}$ 。采用 Matlab 软件中的 `fminsearch` 函数可解决上述问题。以  $b, c$  为变量, 以  $\ln L(\Theta)$  为优化函数, 分别先给  $b, c$  赋初值  $b_0, c_0$ , 然后进行二维遍历搜索, 直到函数  $\ln L(\Theta)$  取得最大值时停止搜索, 此时所返回的  $b, c$  值即为所求的  $\hat{b}, \hat{c}$ 。

2) 估计  $\hat{a}_j (j=1, 2, \dots, m), \hat{\sigma}_B^2$ 。将 1) 中所确定的  $\hat{b}, \hat{c}$  代入式(16)中即可求出  $\hat{a}_j, \hat{\sigma}_B^2$ 。同时,  $\hat{\mu}_a, \hat{\sigma}_a^2$  估计

算式为

$$\begin{cases} \hat{\mu}_a = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_j \\ \hat{\sigma}_a^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (a_j - \hat{\mu}_a)^2 \end{cases} \quad (17)$$

### 4 算例分析

引用文献[7]中恒定应力加速退化试验数据为例, 退化失效阈值 5 mΩ, 其性能退化轨迹见图1。本文所提出的考虑个体差异的非线性退化数据可靠性评估方法记为 M1, 将文献[7]所提出的未考虑个体差异的非线性退化数据可靠性评估方法记为 M2。依据产品性能退化数据, 判断 M1 和 M2 的模型拟合性的优劣, 给出产品的可靠性信息。

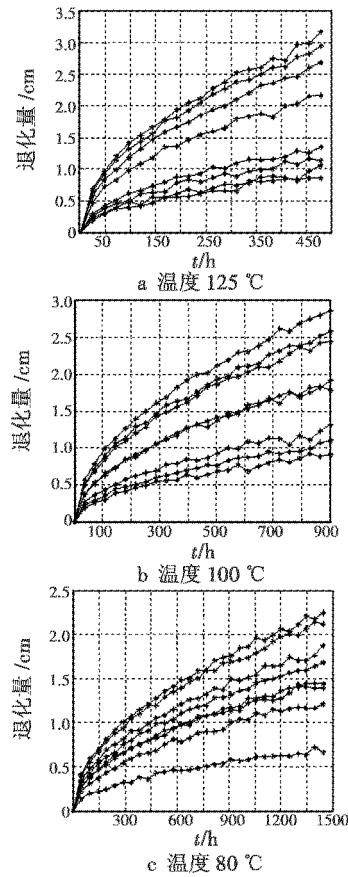


图1 各温度应力下的产品性能退化轨迹  
Fig.1 Products' performance degradation path under each temperature stress

#### 1) 判断标准。

依据赤池信息量准则(AIC)来判断两种方法对数据拟合的优劣<sup>[7]</sup>, 计算式为

$$A_{AIC} = 2p - 2\ln L(\Theta) \quad (18)$$

式中:  $p$  为  $\Theta$  中未知参数的个数;  $\ln L(\Theta)$  为 `fminsearch` 函数所取的最大值。

#### 2) 两步似然估计。

令 Arrhenius 模型中参数  $b$  的初值为 2000, 时间尺度模型中参数  $c$  的初值为 0.5, 采用 Matlab 中的 `fminsearch` 函数进行遍历搜索, 再将所返回的  $b, c$  值分别代入式(16)、式(17), 求得未知参数  $\Theta$  (见表 1)。

表 1 两步似然估计结果  
Table 1 The result of TSMLE

方法	$\Theta$				$\ln L(\Theta)$
	$\mu_a$	$\sigma_a^2$	$b$	$c$	
M1	25.63	4.864	2371	0.581	105.3
M2	27.12		2326	0.500	96.8

### 3) 评估结果。

计算出 Wiener 过程的漂移系数、扩散系数, 产品寿命的点估计值 MTTF 以及 AIC 值(见表 2), 可知 M1 的 AIC 较小, 说明 M1 的模型拟合性更好且可靠性评估结果更准确。

表 2 两种方法的评估结果  
Table 1 Evaluation result of the two methods

方法	Wiener			MTTF/h	AIC
	$\mu_\lambda (\times 10^{-2})$	$\sigma_\lambda^2 (\times 10^{-4})$	$\sigma_B^2$		
M1	2.065	1.542	0.039	89 742	-202.4
M2	1.864		0.050	96 529	-189.2

从可靠度曲线(见图 2)看, M1 可靠性曲线在  $1.5 \times 10^5$  h 时刻前都低于 M2 可靠度曲线, 在  $1.5 \times 10^5$  h 时刻后基本与 M2 可靠度曲线重合, 说明 M1 的模型拟合性较好且可靠度略保守, 与工程实践做法相符。

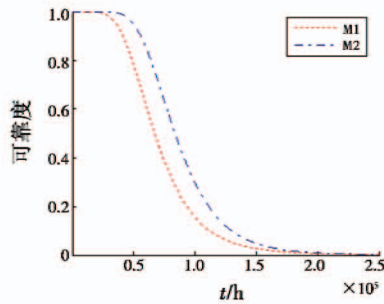


图 2 两种方法的产品可靠度曲线

Fig. 2 Products' reliability curve of the two methods

## 5 结论

本文在恒定应力加速退化试验场合下, 考虑了个体之间退化差异, 提出了基于非线性 Wiener 过程的退化数据可靠性建模方法。考虑了个体退化差异, 将 Wiener 过程中的漂移系数随机化处理并假定为正态分布, 这种处理方法较传统未考虑个体差异的方法更优, 从两者的 AIC 值、可靠度曲线也可证实。

## 参考文献

- [1] 姜同敏. 可靠性试验技术[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2012. (JIANG T M. Reliability test technology [M]. Beijing: Beihang University Press, 2012.)
- [2] 王小林, 程志君, 郭波. 基于维纳过程金属化膜电容器的剩余寿命预测[J]. 国防科技大学学报, 2011, 33(4): 146-151. (WANG X L, CHENG Z J, GUO B. Residual life forecasting of metalized film capacitor based on Wiener process [J]. Journal of National University of Defense Technology, 2011, 33(4): 146-151.)
- [3] TANG J, SU T S. Estimating failure time distribution and its parameters based on intermediate data from a Wiener degradation model[J]. Naval Research Logistics, 2008, 55(3): 265-276.
- [4] SI X S, WANG W B, HU C H, et al. Remaining useful life estimation based on a nonlinear diffusion degradation process [J]. IEEE Transaction on Reliability, 2012, 61(1): 50-67.
- [5] WHITMORE G A. Modeling accelerated degradation data using Wiener diffusion with a time scale transformation [J]. Lifetime Data Analysis, 1997, 1(3): 307-319.
- [6] 王小林, 郭波, 程志君. 基于非线性漂移 Wiener 过程的产品实时可靠性评估[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2013, 44(8): 3203-3209. (WANG X L, GUO B, CHENG Z J. Real-time reliability evaluation for product with nonlinear drift-based Wiener process [J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2013, 44(8): 3203-3209.)
- [7] 王浩伟, 徐廷学, 贺英政. Wiener 过程在非线性退化建模中的应用[J]. 科技导报, 2014, 32(2): 64-67. (WANG H W, XU T X, HE Y Z. Application of Wiener processes on modeling nonlinear degradation [J]. Science & Technology Review, 2014, 32(2): 64-67.)
- [8] WANG X. Wiener processes with random effects for degradation data [J]. Journal of Multivariate Analysis, 2010, 101(2): 340-351.
- [9] TANG S J, YU C Q, WANG X, et al. Remaining useful life prediction of lithium-ion batteries based on the Wiener process with measurement error [J]. Energies, 2014, 7(2): 520-547.