

状态反馈周期事件触发控制系统设计

李国梁, 张合新, 扈晓翔, 王魁, 孙鹏
(火箭军工程大学, 西安 710025)

摘要: 周期事件触发控制具有节约通信资源和易于实现的优点,作为一种新的控制方法,相关的分析和设计研究还不够成熟。基于输入到状态稳定(ISS)定理,研究了线性系统状态反馈周期事件触发控制的建模与分析问题;将线性状态反馈周期事件触发控制系统看作一个离散时间受扰系统,推导出了事件触发控制系统的ISS条件,给出了线性矩阵不等式(LMI)形式,进一步给出了触发条件参数的确定方法。最后,采用Matlab仿真实验验证了方法的正确性和有效性。

关键词: 周期事件; 触发控制; 状态反馈; 输入到状态稳定; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-637X(2016)11-0023-04

Design of State Feedback Periodic Event Triggered Control Systems

LI Guo-liang, ZHANG He-xin, HU Xiao-xiang, WANG Kui, SUN Peng
(Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China)

Abstract: Periodic Event Triggered Control (PETC) is suited for applications where communication resources are scarce. As a new control strategy, the system theory in modeling and analysis of PETC is far from being mature. In this paper, Input-to-State Stability (ISS) theory is employed to analyze the linear state feedback periodic event triggered control systems. At first, the linear state feedback PETC system is considered as a discrete-time perturbed system, then the stability theorem of event triggered control system is deduced based on ISS theory of discrete-time perturbed systems, a Linear Matrix Inequality (LMI) form of the theorem is also given. At last, a method to determine event-triggering threshold is derived. Matlab simulation result verifies the correctness and effectiveness of our methods.

Key words: periodic event; triggered control; state feedback; input-to-state stability; linear matrix inequality

0 引言

现今的控制系统,往往是基于共享网络和数字平台实现的网络化控制系统。在这类系统中,对测量信号的采样、计算控制器输出和加载新的执行信号等控制任务一般是周期性执行的,这种设计模式具有便于工程实现和易于系统分析和控制器设计的优点^[1]。但在周期采样的控制系统中,各个控制节点对通信资源的占用和系统当前工作状态无关,存在着严重的通信资源浪费问题,特别在无线网络控制和大型控制系统中,问题更为显著。为了有效减少控制中对通信资源

的浪费,文献[2-3]提出了事件触发控制(Event-Triggered Control,ETC)方法。ETC基本思想是根据保证控制性能需求调度传感器采样和执行器的数据更新,所以该方法能够在保证控制性能的同时极大地降低对通信资源的占用^[4-6],特别是文献[6]的成果具有触发机制实现简单、含义明确,控制中动态跟随能力比较强的优点。但以上文献成果实现时需要设计专门模拟触发电路来实现事件触发条件的连续监测,导致这类方法难以直接在现有的数字控制系统中实现。为了便于在数字控制系统中实现ETC方法,可采用离散周期监测的方法,也就是周期事件触发控制^[7-9](Periodic Event-Triggered Control,PETC)。在PETC中,事件触发条件的监测是按照一个固定周期进行的,只需在每个周期时刻到来时判断触发条件是否满足,只有触发条件满足时才传输测量数据并计算控制器输出,同样可以实

收稿日期:2015-10-09

修回日期:2015-11-26

基金项目:国家自然科学基金青年基金(61304001,61304239)

作者简介:李国梁(1981—),男,内蒙古呼和浩特人,博士,讲师,研究方向为基于事件触发的网络化控制系统分析与设计。

现节约通信资源的目的,但这对系统的建模和分析提出了新的挑战。

本文针对线性时不变(LTI)被控对象,基于文献[6]的触发机制形式,设计PETC系统。将系统看作一个受扰系统模型的形式,然后利用离散事件系统输入到状态稳定(Input-to-State Stability, ISS)理论^[10]研究系统的稳定性问题,与文献[6]的思路相比较,本文是直接设计ISS定理中K类函数的形式,从而得到一种可以优化的触发条件参数设计方法。

1 问题描述

1.1 事件触发控制系统描述

考虑如下线性时不变(LTI)被控对象

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (1)$$

式中: $x \in \mathbb{R}^n$ 代表被控对象的状态; $u \in \mathbb{R}^m$ 代表控制输入。假定对象采用如下连续状态反馈控制器

$$u = Kx \quad (2)$$

闭环系统会渐近稳定,也就是 $A_c + B_c K$ 为Hurwitz矩阵。

本文采用图1所示的状态反馈周期事件触发控制系统,即系统状态输出以采样间隔 $h > 0$ 进行周期采样,获得离散化的状态信号 $x(t_k)$,记为 x_k ,其中, $t_k = kh, k \in \mathbb{N}$ 为采样时刻,并且在 t_k 时刻事件触发器要进行触发条件的判断,如果满足触发条件,则输出此时的状态,记为 $\hat{x}(t_k)$,并计算控制器输出更新执行器输入。这个过程中,假定控制器输出到被控对象的信息传递不受任何限制,即不考虑时延、带宽和量化等因素的影响。

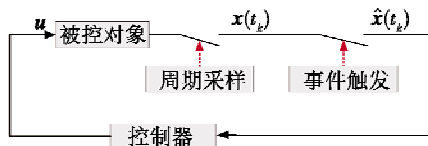


图1 状态反馈周期事件触发控制系统示意图

Fig. 1 Schematic diagram of state feedback PETC

采用图1所示的PETC后,系统控制输入变为

$$u(t) = K\hat{x}(t) \quad (3)$$

式中, $\hat{x}(t)$ 是分段左连续函数, $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k \in \mathbb{N}$,取值规则为

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} x(t_k) & \|e(t_k)\|^2 > \sigma^2 \|x(t_k)\|^2 \\ \hat{x}(t_k) & \|e(t_k)\|^2 \leq \sigma^2 \|x(t_k)\|^2 \end{cases} \quad (4)$$

式中, $e(t_k)$ 为被控对象上一采样时刻状态和当前状态的偏差,其表达式为

$$e(t_k) = \hat{x}(t_k) - x(t_k) = \hat{x}_k - x_k \quad (5)$$

式中, $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ 为事件触发时刻 t_k 的采样状态。不等式

$$\|e(t_k)\|^2 > \sigma^2 \|x(t_k)\|^2 \quad (6)$$

称为离散事件触发条件。这样,输入控制器的状态只有事件发生时刻更新,对象的实际控制输入为

$$u(t) = Kx(t_k) = K\hat{x}_k(t_k, t_{k+1}) \quad (7)$$

1.2 相关知识

定义1 如果函数 $\alpha: [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ 是连续严格递增的,并且有 $\alpha(0) = 0$,则其为K类函数,也称楔类函数;如果对于K类函数 $\alpha(t)$,有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = +\infty$,则称该函数为 K_∞ 类函数。

定义2 如果函数 $\beta: [0, a) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$,是连续的,对于固定的 s ,映射 $r \mapsto \beta(r, s)$ 属于K类函数,对于固定的 r ,映射 $s \mapsto \beta(r, s)$ 是递减的,并且有 $\lim_{s \rightarrow +\infty} \beta(r, s) = 0$,则 β 为KL类函数。

考虑如下离散系统

$$x_{k+1} = f(x_k, w_k) \quad (8)$$

式中: $x_k \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态,输入 $w_k \in \mathbb{R}^m$,需要指出的是这里的 w_k 为一种广义的输入,可以泛指任何形式的输入,如果 w_k 为一种干扰信号,式(8)系统也被称为受扰系统。对于这类系统,输入非零时,系统全局渐近稳定一般难以满足,所以采用更为一般的稳定概念,即输入到状态稳定来研究系统的稳定性。

定义3 如果存在函数 β 为KL类函数和 γ 为K类函数,对所有的初始状态 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和有界输入 w_k , $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|w_k\| < \infty$,对于 $k > 0$,式(6)系统的解存在且满足

$$\|x_k\| \leq \beta(\|x_0\|, k) + \gamma(\|w_k\|_{L_\infty}) \quad (9)$$

则称式(8)系统输入到状态稳定。

引理1 如果存在连续可微函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 对所有的 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $u \in \mathbb{R}^m$

$$\underline{\alpha}(\|x_k\|) \leq V(x_k) \leq \bar{\alpha}(\|x_k\|) \quad (10)$$

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\alpha_x(\|x_k\|) + \alpha_w(\|w_k\|) \quad (11)$$

式中: $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}, \alpha_x$ 是 K_∞ 类函数; α_w 是K函数,则式(8)系统输入到状态稳定。

本文的主要目的是利用引理1,分析由式(1),式(3)和式(4)构成的周期事件触发控制系统的稳定性以及确保系统稳定的触发条件,即式(6)中触发门限的选择问题。接下来需要解决的问题是,将式(1)、式(3)和式(4)所描述的事件触发控制系统,建模为式(8)的受扰系统形式,然后分析其稳定性以及保证系统稳定的触发参数 σ 的选取。

2 系统建模

为了实现ISS分析,把系统等效为图2所示形式,也就是把由事件触发引入的误差 $e(k)$ 看作是连续闭环系统的一个干扰输入,把状态看作是系统的输出。对应的闭环模型为

$$x_{k+1} = Ax_k + BK\hat{x}_k = (A + BK)x_k + BKe_k \quad (12)$$

式中： $A = e^{A_s h}$ ； $B = \int_0^h e^{A_s s} B_s ds$ 。

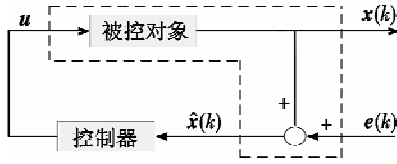


图 2 状态反馈事件触发控制系统等效示意图

Fig.2 Equivalent schematic diagram of state feedback PETC

3 系统稳定结论

定理 1 式(12)系统对事件触发引入的误差 e_k 输入到状态稳定的条件是,存在对称矩阵 $P > 0$ 满足如下线性矩阵不等式

$$\begin{pmatrix} (A+BK)^T P(A+BK) - P + I & (A+BK)^T PBK \\ (BK)^T P(A+BK) & (BK)^T PBK - \gamma^2 I \end{pmatrix} \leq 0 \quad (13)$$

证明 令 $V(x_k) = x_k^T P x_k$, 显然满足式(10), 令 $\alpha_x(\|x_k\|) = \|x_k\|^2, \alpha_u(\|e_k\|) = \gamma^2 \|e_k\|^2$, 其中, γ 为正实数, 显然, α_x 是 K_∞ 类函数, α_u 是 K 函数。这样式(11)输入到状态稳定条件变成

$$V(x_{k+1}) - V(x_k) \leq -\|x_k\|^2 + \gamma^2 \|e_k\|^2 \quad (14)$$

结合式(12)系统模型, 式(14)变为

$$\begin{aligned} V(x_{k+1}) - V(x_k) &= x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k = (x_k^T (A + BK)^T + e_k^T (BK)^T) P ((A + BK)x_k + BK e_k) - x_k^T P x_k = \\ &= x_k^T ((A + BK)^T P(A + BK) - P)x_k + x_k^T (A + BK)^T \cdot PBK e_k + e_k^T (BK)^T P(A + BK)x_k + e_k^T (BK)^T PBK e_k = \\ &= \begin{pmatrix} x_k^T \\ e_k^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A + BK)^T P(A + BK) - P & (A + BK)^T PBK \\ (BK)^T P(A + BK) & (BK)^T PBK \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ e_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

又因 $-\|x_k\|^2 + \gamma^2 \|e_k\|^2 = \begin{pmatrix} x_k^T \\ e_k^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ e_k \end{pmatrix}$, 显然式(13)成立就能确保式(14)成立, 也就是保证了式(12)系统误差 e_k 输入到状态稳定, 证毕。

推论 1 式(1)、式(3)和式(4)事件触发控制系统, 能够获取最大触发间隔的触发条件的参数 σ 的取值条件是 $\sigma = 1/\gamma_{\min}$, 其中, γ_{\min} 为定理 1 条件成立时的 γ 最小取值。

证明 依据式(6)触发条件, 显然 σ 的取值越大事件触发间隔越大, 由不触发事件时, 有不等式得 $-\|x_k\|^2 + \frac{1}{\sigma^2} \|e_k\|^2 \leq 0$ 成立, 而式(10)系统输入到状态稳定的条件之一是式(14)成立, 比较可得 $\gamma = \sigma^{-1}$ 显然 γ 取最小值的时候, σ 能够取最大值, 也就是能够获取最大触发间隔。此时 γ_{\min} 实际也是从扰动 e 到状态 x 的 L_2 增益^[10]。

推论 2 式(1)、式(3)和式(4)事件触发控制系

统的最小执行间隔满足 $T_{\min} = nh$, 其中, n 的取值是使如下矩阵最大特征大于零的最小自然数。

$$\begin{pmatrix} (A \quad BK)^{n-1} (A + BK \quad 0) \\ (0 \quad I) \quad (I \quad 0) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I - \sigma^2 I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \quad BK \\ 0 \quad I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + BK \quad 0 \\ I \quad 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

证明 依据 PETC 事件触发条件, 在当前事件发生后, 下一事件发生需要满足式(6)触发条件。假定 t_k 时刻恰好完成了一次事件触发, 即有 $\hat{x}(t_k) = x(t_k)$, 则在 t_{k+1} 时刻事件触发条件是

$$\|x(t_{k+1}) - x_k\|^2 - \sigma^2 \|x(t_{k+1})\|^2 > 0 \quad (16)$$

将式(12)代入式(15)左边有 $\|x(t_{k+1}) - x_k\|^2 - \sigma^2 \|x(t_{k+1})\|^2 = x_k^T ((A + BK)^T \quad I) \begin{pmatrix} I - \sigma^2 I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + BK \\ I \end{pmatrix} x_k$ 。如果在 t_{k+1} 时刻触发条件不满足, 则在 t_{k+2} 时刻式(16)左边为 $\|x(t_{k+2}) - x_k\|^2 - \sigma^2 \|x(t_{k+2})\|^2 = x_k^T ((A^2 + ABK + BK)^T \quad I) \begin{pmatrix} I - \sigma^2 I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^2 + ABK + BK \\ I \end{pmatrix} x_k = x_k^T \left(\begin{pmatrix} A \quad BK \\ 0 \quad I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + BK \quad 0 \\ I \quad 0 \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} I - \sigma^2 I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \quad BK \\ 0 \quad I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + BK \quad 0 \\ I \quad 0 \end{pmatrix} x_k$ 。利用数学归纳法可得, 在 t_{k+n} 时刻均没有事件触发, 则 t_{k+n} 时刻式(16)左边为

$$\|x(t_{k+n}) - x_k\|^2 - \sigma^2 \|x(t_{k+n})\|^2 = x_k^T \cdot \begin{pmatrix} (A \quad BK)^{n-1} (A + BK \quad 0) \\ (0 \quad I) \quad (I \quad 0) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I - \sigma^2 I & I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \quad BK \\ 0 \quad I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A + BK \quad 0 \\ I \quad 0 \end{pmatrix} x_k$$

由矩阵最大特征值的特点可知, 在 t_{k+n} 时刻能有事件触发的条件就是式(15)矩阵的最大特征大于零。证毕。

4 数值仿真

考虑形如式(1)和式(2)的线性系统, 其中系数矩阵取值为 $A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, K = (1 \quad -4)$ 。

4.1 仿真 1

仿真 1 的目的是验证定理 1 和推论 1 的正确性。仿真分两步: 1) 利用 Matlab LMI 工具箱编写代码求解定理 1 中线性矩阵不等式优化结果, 寻找使线性矩阵不等式可行解存在的最小参数 γ ; 2) 采用所得结果设计触发机制, 设置非零的初始状态值, 验证事件触发控制的渐近稳定性。仿真中, $h = 0.01$ s。

仿真结果:保证定理 1 中不等式成立的 LMI 优化结果为 $\gamma_{\min} = 6.00$, 将 $\sigma = \gamma^{-1} = 0.1667$ 代入式(3)触发机制, 令初始状态 $x_0 = (3.1 \quad 3.1)$ 所得的状态演化曲线如图 3 所示。显然图中状态曲线是收敛的, 也就是说系统是渐近稳定的, 这证实了定理 1 和推论 1 的正确性。

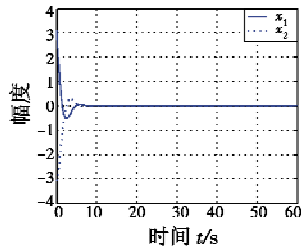


图 3 PETC 状态演化曲线

Fig. 3 The evolution of state in PETC

4.2 仿真 2

仿真 2 的目的是验证推论 2 的正确性。取仿真 1 中的条件, 仿真步骤如下: 首先将矩阵 A, B 和 K 代入推论 2 中式(15)计算满足条件的 n 值, 验证推论 2; 其次, 绘制触发间隔取值散点图。

仿真结果: 代入相关矩阵, 计算可得 n 值为 9, 对应的最小触发间隔为 $T_{\min} = 0.09$ s。采用仿真 1 中的条件可得图 4 所示的触发间隔取值散点图。从图中可以看出, 最小触发间隔也为 0.09 s, 与计算结果一致。可见, 推论 2 所得结论的保守性非常低, 这一点也可从理论推导过程看出, 也就是说推论 2 几乎可以准确计算出 PETC 的最小触发间隔。

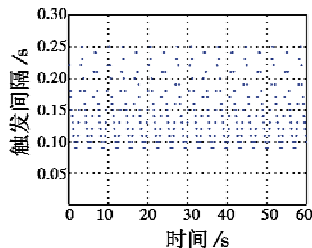


图 4 PETC 触发间隔散点图

Fig. 4 Trigger interval scatter diagram of PETC

4.3 仿真 3

将本文结论与文献[6]结论进行仿真对比, 对比两种方法之间的异同。对比以下几项内容: 参数 σ , 理论计算得到的最小间隔下界 h_{th} , 仿真得到的最小间隔 h_{\min} , 最大间隔 h_{\max} , 平均间隔 h_{mean} , 结果如表 1 所示。显然, 本文的方法可以得到更大的触发门限, 对于特定初始条件仿真所得的事件触发间隔更大, 无论是最小间隔还是最大间隔, 更大的平均间隔表明本文方法所用总体采样次数更少, 这均说明本文方法比文献[6]的方法结论的保守性有明显降低。

表 1 两种方法所得仿真结果

Table 1 Simulation results of the two methods

	σ	h_{th}/s	h_{\min}/s	h_{\max}/s	h_{mean}/s
文献[6]方法	0.05	0.0109	0.0291	0.0782	0.0445
本文方法	0.1667	0.09	0.09	0.25	0.1357

5 总结

为了实现对采用周期监测方法的周期事件触发控制系统的分析和触发机制的设计, 基于受扰系统输入到状态稳定定理, 推导出了保证周期事件触发控制系统稳定的定理, 并得到了线性矩阵不等式形式, 进一步得到了触发条件参数的确定方法。使得事件触发参数能够方便求解, 最后的仿真实验验证了结论的正确性。进一步的仿真结果表明本文方法与文献[6]的触发参数设计方法相比保守性有明显降低, 下一步的研究将着重向具体工程应用方向努力^[11-12]。

参考文献

- [1] CHEN T, FRANCIS B A. Optimal sampled-data control systems[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1995.
- [2] ARZEN K E. A simple event-based PID controller[C]// Proceedings of IFAC World Congress, Beijing, 1999: 423-428.
- [3] ÅSTRÖM K, BERNHARDSSON B. Comparison of Riemann and Lebesgue sampling for first order stochastic systems [C]// Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, 2002: 2011-2016.
- [4] HEEMELS W P M H, SANDEE J H, VAN D B. Analysis of event-driven controllers for linear systems[J]. International Journal of Control, 2008, 81(4): 571-590.
- [5] LUNZE J, LEHMANN D. A state-feedback approach to event-based control[J]. Automatica, 2010, 46(1): 211-215.
- [6] TABUADA P. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(9): 1680-1685.
- [7] HUI P L, YANG S. Periodic event-triggered distributed receding horizon control of dynamically decoupled linear systems [C]// Preprints of the 19th World Congress The International Federation of Automatic Control, Cape Town, 2014: 10066-10071.
- [8] CHEN X, HAO F. Periodic event-triggered state-feedback and output-feedback control for linear systems[J]. International Journal of Control Automation & Systems, 2015, 13(4): 1-9.
- [9] PENG C, FEI M R. Networked H_{∞} filtering for discrete lin-

(下转第 102 页)