

无人作战飞机轨迹规划研究综述

胡凡俊¹, 陈 阔², 刘鹤鸣¹, 黄长强³, 王 铀⁴

(1. 空军第一航空学院, 河南 信阳 464000; 2. 中国人民解放军驻 613 所军代表室, 河南 洛阳 471000;
3. 空军工程大学航空航天工程学院, 西安 710038; 4. 中国人民解放军 95856 部队, 南京 210028))

摘要: 无人作战飞机(UCAV)轨迹规划是实现其自主攻击技术的重点和难点, 通过对该领域文献的广泛研究和细致梳理, 建立了UCAV轨迹规划问题的一般模型, 系统归纳了目前用于该问题求解的基本算法、求解思路、存在不足和最新发展动向, 并重点对UCAV隐身突防轨迹优化和不确定环境下的在线轨迹规划方法进行综述。

关键词: 无人作战飞机; 轨迹规划; 自主攻击; 综述

中图分类号: V249.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-637X(2016)01-0019-06

A Survey on Trajectory Planning of UCAVs

HU Fan-jun¹, CHEN Min², LIU He-ming¹, HUANG Chang-qiang³, WANG You⁴

(1. The First Aeronautical Institute of the Air Force, Xinyang 464000, China; 2. Military Representative Office of PLA in the 613th Institute, Luoyang 471000, China; 3. Aeronautics and Astronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an 710038, China; 4. Unit 95856 of PLA, Nanjing 210028, China)

Abstract: Trajectory planning is of great importance for Unmanned Combat Aerial Vehicles (UCAVs) to make autonomous attacking. After extensive research to the related articles, we established a general model for UCAV trajectory planning, summarized the basic algorithms, the solving approaches, existed shortcomings and the latest development trends, with focuses on stealth UCAV penetration trajectory optimization and online trajectory planning methods under uncertain environment.

Key words: UCAV; trajectory planning; autonomous attacking; survey

0 引言

无人作战飞机(UCAV)是未来空军的主要作战力量,实现UCAV自主攻击技术是当前各军事强国研究的焦点。其中,轨迹的自动生成和自动执行是实现UCAV自主攻击过程的关键^[1],也是当前研究的重点。然而,由于轨迹规划过程中庞大的计算量,瞬息万变的战场环境对规划算法较高的实时性要求,以及载机自身严格受限的运算能力等因素的影响,也使其成为实现UCAV自主攻击技术的难点之一。

本文围绕UCAV自主攻击过程中的轨迹规划问题,建立了问题的优化模型;并围绕当前常用的两类轨迹规划算法,即随机搜索算法和数值求解算法进行综述,分析了各自优势和不足;结合UCAV轨迹规划自身的特点,对目前的两个重点研究方向,即UCAV隐身突

防轨迹优化和不确定环境下的UCAV在线轨迹规划进行综述;最后展望了算法下一步的研究方向。

1 问题描述

相对于普通的无人机轨迹规划,UCAV轨迹规划存在以下特点。

1) 约束条件更为复杂。攻击过程中的UCAV面临更加密集的敌方威胁,敌我斗争更加剧烈,规划轨迹同时还需满足武器投放终端约束等要求,这也要求规划算法必须进行多维(同时规划多维状态参数)精细规划。

2) 为了抓住最佳的打击时机,攻击过程常常需要利用UCAV平台的机动性能极限,因而对规划轨迹的可飞性提出了更加严峻的挑战。

3) 复杂的约束条件和瞬息万变的战场环境对规划算法的实时性也提出了较高要求。

针对上述特点,建模的基本思路是以飞机平台的运动学/动力学方程为基础,综合考虑飞机平台性能、燃油、地形、气象、敌方火力或探测威胁、制导武器可投

收稿日期:2015-01-12

修回日期:2015-12-01

作者简介:胡凡俊(1970—),男,山东宁阳人,硕士生,讲师,研究方向为无人飞行器武器系统总体技术,航空制导弹药技术。

射区等构建约束条件,并依据任务需求构造优化目标函数^[2]。最终的轨迹规划问题一般模型可写为

$$\begin{aligned} & \min J & (1) \\ & \text{s. t.} \\ & \frac{dX(t)}{dt} = f[X(t), U(t), t], \\ & \phi[X(t_0), t_0] = 0, \\ & \phi[X(t_f), t_f] = 0, \\ & C[X(t), U(t), t] \leq 0 \end{aligned}$$

式中: $X(t)$ 为UCAV的状态参数; $U(t)$ 为输入的控制量; J 为优化的目标函数; t_0, t_f 分别为起始时刻和终止时刻。在UCAV轨迹规划的过程中,需要考虑的优化目标主要包括如下内容。

1) 规划轨迹的飞行时间。相应的代价函数为

$$\min J_{\text{time}} = t_0 - t_f \quad (2)$$

2) 敌方雷达、联合防空系统(Integrated Air Defense System, IADS)等对UCAV飞行过程中造成的捕获、毁伤威胁。相应的代价函数为^[3]

$$\min J_{\text{threat}} = \int_{t_0}^{t_f} P_r d\tau \quad (3)$$

式中, P_r 为任一时刻UCAV所受到的威胁代价。

3) 为了降低被敌方发现的概率,UCAV在飞行过程中一般还采用地形跟随/规避策略(TF/TA)。相应的代价函数为

$$\min J_{\text{height}} = \int_{t_0}^{t_f} [h - (h_{\text{terrain}} + 5)]^2 dt \quad (4)$$

式中, h 和 h_{terrain} 分别为任一时刻UCAV的飞行高度和相应位置的地形海拔高度。

上述模型从数学上来说是一个包含微分方程、代数方程和不等式约束下的泛函极值问题。直接对其进行求解往往十分困难甚至是不可解的。目前可行的求解方案主要有随机搜索算法和数值求解算法等。

2 随机搜索算法

目前研究较多的一类算法是智能随机搜索算法,如蚁群算法、粒子群算法(PSO)、进化算法、遗传算法、快速随机搜索树(RRT)算法以及差分进化算法(DE)等。

国外研究主要有:美国华盛顿大学自主飞行系统实验室(AFSL)采用进化算法和市场拍卖机制设计了基于进化算法的协同规划系统^[4],该系统同时具备进化算法的灵活性特点以及市场拍卖机制的分布式结构,能够为多架无人机在动态变化环境中进行实时任务分配和在线轨迹规划;美国爱荷华州立大学的“虚拟战场空间”项目^[5]综合考虑威胁规避、燃料消耗和达成探测目的三方面因素,采用粒子群优化算法规划航迹

点,并利用B样条曲线将航迹点拟合为三维飞行航迹,该算法可同时生成多条飞行航迹,地面“飞行员”只需从可选路径集中选择当前的最佳航迹,从而极大降低操纵难度,增强规划航迹的适应性。

国内研究包括:将改进的小生境遗传算法应用于三维虚拟战场环境,提出一种无人机三维实时航迹规划算法^[6],采用混合多目标进化算法开展多无人机侦察路径规划^[7]等。

采用智能随机搜索算法的优点是这类算法一般具有较强的全局搜索能力,求解过程不依赖梯度信息,且对初值的好坏不敏感。但上述算法也存在诸多缺陷:1)一般仅给出规划航迹的三维坐标点信息,难以获得时间、速度等多维状态信息,同时也难以处理各种复杂的动力学约束模型,导致规划航迹的可飞性难以保证;2)算法搜索空间随着规划问题维数的增加迅速膨胀,进而导致“维数灾难”,因而上述算法仅能完成航路规划,难以完成更为精细的轨迹规划;3)由于“早熟”等问题,算法的稳健性和鲁棒性难以保障。

3 数值求解算法

相对于随机搜索算法,数值求解方法可以较方便地处理各种约束条件,且求解精度较高,因而存在一定的优势。按照求解方式的不同,数值求解方法又可进一步分为直接法和间接法两大类^[8]。

间接法利用庞特里亚金极大值原理推导一阶最优性条件,将求解模型转化为Hamilton边值问题(Hamiltonian Boundary-Value Problem, HBVP),再利用直接打靶法、配点法等进行参数化求解。该方法的优点是求解精度较高,但求解过程较为复杂和繁琐,求解HBVP时的收敛域很小,同时算法对初值估计精度要求较高,因而目前应用比较少。间接法的详细推导过程见文献^[9]。

直接法通过将状态变量参数化,从而将连续的最优控制问题离散并参数化,采用数值法进行性能指标寻优,将最优控制模型转化为非线性规划问题求解,包括直接打靶法、配点法、微分包含法等。按照离散化方式的不同,直接法又可进一步划分,如图1所示。

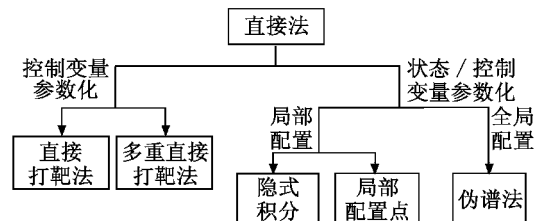


图1 直接法的分类

Fig. 1 Classification of direct method

目前大部分轨迹优化软件(如OTIS, POST, NTG,

GPOPS, TOMLAB 等)主要基于直接法求解。文献[8, 10]对数值法求解飞行器轨迹优化问题进行了综述。文献[9]是数值法求解最优控制问题比较权威的综述。

3.1 伪谱法

在众多数值求解轨迹优化算法中,最优控制数值解法中的一类直接法——伪谱法(Pseudospectral Method),也称全局正交配点方法,以其快速性和高精度备受关[11],并已经成功应用于国际空间站的姿态调整[12]。该方法的核心思想是将状态变量和控制变量在特定点处离散化,并利用正交多项式将复杂的微分/积分约束转化为插值多项式的形式,从而将难以处理的最优控制问题转化为非线性规划问题[13],最后采用大规模非线性规划软件求解。

该方法基于最优控制理论的通用框架,可以很方便地处理运动规划过程中各种复杂的动力学约束。同时,该方法采用离散化的方式求解最优控制问题,避免了传统的间接法求解庞特里亚金最优性条件的困难,因而在轨迹优化问题中具有独特优势[10]。

伪谱法自 20 世纪 90 年代引入最优控制领域以来,发展了 Chebyshev 伪谱法(CPM)、Legendre 伪谱法(LPM)、Gauss 伪谱法(GPM)、Radau 伪谱法(RPM)等。目前发展比较完善的伪谱法包括 BENSON 于 2005 年提出的 Gauss 伪谱法[14]、FAHROO F 等人于 2008 年提出的 Radau 伪谱法[15]和 ELNAGAR G 等人于 1995 年提出的 Legendre 伪谱法[16]等。上述方法的主要区别是配置点不同,以及与此对应的估计多项式不同。

文献[17]对以上 3 种伪谱法进行了比较,其相同点包括:1) 终端时刻的状态量可以表示为配置点的积分形式;2) 初始时刻的状态变量可以通过插值的方式进行估计;3) 控制和状态变量在配置点处进行离散化估计。不同点包括:1) Gauss 伪谱法和 Radau 伪谱法的离散化方案采用的配置点数目与插值估计多项式的阶数相同,而 Legendre 伪谱法离散化方案估计多项式的阶数比配置点数目小一阶;2) 虽然任何一种方案都可以表示为微分形式也可表示为积分形式,Gauss 伪谱法和 Radau 伪谱法的微分和积分矩阵是可逆的,但是 Legendre 伪谱法的微分矩阵为奇异矩阵,因而其微分形式和积分形式不等价;3) Legendre 伪谱法求得的主矢量在其真值附近震荡,且在相同的条件下,Gauss 伪谱法和 Radau 伪谱法的收敛速度和精度要优于 Legendre 伪谱法。

文献[18]指出,最优控制问题采用高斯伪谱法离散化后得到的非线性规划问题 KKT 条件,与 Bolza 问题连续一阶最优性条件采用高斯伪谱离散化后的形式完全一致,即为协态映射定理,如图 2 所示。

与此类似,文献[19]证明了采用 Radau 和 Flipped

Radau 伪谱法(FRPM)同样具有等价性。上述一致性显示出直接法与间接法的统一,从而保证算法的收敛性。

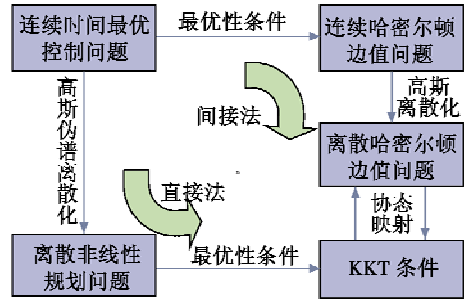


图 2 直接法与间接法高斯伪谱离散化的一致性
Fig. 2 The consistency of the direct method and the indirect method in Gauss's pseudospectral discretization

将上述几种伪谱方法依据控制变量和状态变量的近似多项式、配点选择方案以及是否满足协态映射定理进行对比,结果如表 1 所示[9]。

表 1 不同伪谱方法对比

Table 1 Comparison of different pseudospectral methods

伪谱法	多项式	配点	是否满足协态映射
CPM	Chebyshev	CGL	否
LPM	Lagrange	LGL	否
GPM	Lagrange	LG	是
RPM	Lagrange	LGR	是
FRPM	Lagrange	Flipped LGR	是

美国佛罗里达州立大学的 RAO A V 团队目前在伪谱法算法的研究处于世界领先水平,已经取得了大量研究成果[20-24]。如文献[23]针对转化的非线性规划问题求解需要计算一阶和二阶导数问题,提出了一种基于目标函数梯度、约束雅克比矩阵(Constraint Jacobian)和 Lagrangian Hessian 矩阵的快速梯度求解算法,文献[24]研究了一种基于 Gauss 伪谱法的多段自适应伪谱离散化方案等。

国内学者将该方法应用于各类飞行器的轨迹规划,并取得了良好的效果:文献[25]采用 Gauss 伪谱法研究飞机拦阻过程;文献[3]采用低阶自适应伪谱法研究UCAV攻击段轨迹规划;文献[26]采用 Gauss 伪谱法研究UCAV对地攻击武器投放轨迹等。

上述研究表明,采用最优控制理论框架可以方便地获得规划轨迹的位置、速度、姿态等多维信息,非常适合于攻击轨迹的规划求解。该方法的缺陷是约束条件仅在配点处满足,因而无法保证规划航迹完全满足约束条件;随着配点数目增多,算法的计算代价和时间急剧膨胀,因而难以满足轨迹规划实时性要求;而且该算法仅针对预定的环境展开,如果威胁和目标发生变化,该方法将失效。

3.2 算法改进

针对随机搜索算法和数值求解算法存在的不足,一种可行的解决方案是上述两种方法结合起来,例如将序列二次规划算法(Sequential Quadratic Programming, SQP)与遗传算法结合起来。随机搜索算法对初值不敏感,全局搜索能力强,且不需要梯度信息,但在解附近的局部收敛能力较弱,而且最终解的精度也较低。与随机搜索算法相反, SQP 算法对初值十分敏感,算法收敛半径小,求解过程依赖于梯度信息;而它的优点是可以十分方便地处理各种约束条件,在解附近具有超一次的收敛性,计算效率高,同时求得解的精度也较高。因此,两种算法相互补充,利用遗传算法给出粗糙初始解,并将其作为 SQP 算法的初始值,求解最终的精确最优解,可以极大弥补单一算法的不足。其求解步骤如图 3 所示。

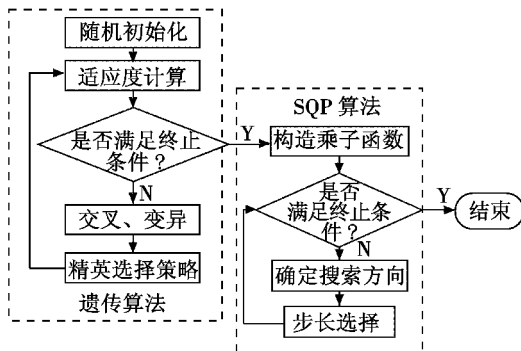


图 3 遗传/序列二次规划混合搜索算法

Fig. 3 Hybrid search algorithm of genetic and sequential quadratic programming

如文献[2]将差分进化算法与序列二次规划算法结合起来,采用 DE-SQP 算法求解最优轨迹一系列的“轨迹节点(node)”,并利用三次样条曲线将轨迹节点拟合为最终的飞机地形跟随轨迹。

4 隐身突防轨迹优化问题

隐身性是UCAV的重要特征。在UCAV轨迹规划过程中,如何充分利用其优良的隐身性能,有效提升UCAV的生存能力,是当前众多学者研究的重点。

文献[27]以UCAV和雷达的相对俯仰和方位角为参数,用椭圆模型概略反映UCAV被雷达捕获的RCS值,并将雷达制导SAMs环境中UCAV航迹规划问题形式化为Minimax最优控制问题,文献[28]在此基础上按RCS值的大小将UCAV周向划分为离散的危险区和安全区,并采用遗传算法进行二维规划等。

上述研究均停留在二维空间范围,其主要困难在于目前大多数轨迹规划算法仅提供规划航迹的位置坐标,很难获得精确的UCAV实时位置、姿态、速度等多

维状态信息。针对此问题,文献[29]将飞行姿态控制、轨迹约束、边界条件等作为约束条件,以降低雷达探测概率和减少飞行时间为目标函数,建立最优控制模型,并利用高斯伪谱法将连续最优控制问题转化为非线性规划问题求解,因而有效降低了单基地和双基地雷达探测环境下,飞行器的雷达探测概率和暴露时间。上述研究的不足是对飞行器RCS的建模进行了较大程度的简化,因而与实际RCS姿态角响应的特性可能存在较大差异。

除了采用UCAV的动态RCS特性进行隐身突防外,低空地形跟随技术(TF/TA²)利用地表杂波干扰和地形遮蔽也是一种常用的隐身突防手段,其有效性得到了实战的验证。文献[30]研究利用地形遮蔽躲避雷达探测的无人机航路规划问题,通过为航迹长度和雷达探测威胁分配权值,利用A*算法规划低可探测航迹。对于固定翼飞行器而言,低空飞行有着极高的撞地风险,复杂的地形地貌变化要求轨迹规划过程中切实处理好UCAV的平台机动性能约束,这是A*算法难以处理的。针对这个问题,文献[31]通过构建三维数字地形,并采用Legendre伪谱法和滚动时域策略,提出了一种战斗机实时的三维地形跟随轨迹规划算法。

5 不确定环境下的在线轨迹规划

战场形势瞬息万变,离线的轨迹规划算法难以使UCAV满足战场要求,必须将运动的威胁和变化的UCAV作战任务考虑其中。然而,由于众多的约束要求导致庞大的计算量,泛函极值问题自身求解的困难,以及机载环境下极其受限的运算能力等因素的限制,前述算法尚不能满足轨迹规划的实时性要求,如何改进算法的实时性能,也是当前学者研究的重点。

文献[32]针对任务环境中可能存在的快速移动威胁,将无人机的运动状态和运动威胁进行线性化处理,并采用模型预测控制的方法规划无人机路径;文献[33]采用一种行为协同和虚拟目标相结合的方法,当无人机发现突发威胁后,将航迹规划切换到局部行为模式,引导无人机迅速逃离至安全区域。上述研究的不足是仅考虑二维环境,且对UCAV自身的运动特性存在较大程度的简化,规划轨迹的可飞性难以保障。

考虑到战场环境实时变化,全局的轨迹规划方法十分耗时且容易失效,文献[34]采用滚动时域的思想、优化窗口的方式,将轨迹规划限制在局部优化窗口内,用在线滚动的一系列局部优化替代一次性全局优化。该方法一方面大幅降低了算法的计算复杂度和计算资源的消耗,确保了算法的实时性;另一方面,随着任务环境信息的更新和完善,规划算法能够自适应地

更新控制量,消除UCAV状态误差,并可以规避任务区域的突发威胁,从而提高了算法的适应能力。如文献[35]针对无人机在动态环境下,特别是随机运动的障碍和突发出现的威胁等情形,采用模型预测控制策略进行研究,取得了良好的效果。

6 发展展望

1) 多种算法之间的融合。如3.2节所看到的那样,由于轨迹规划问题的复杂性,求解的困难性,以及要求的苛刻性等特点,单一算法往往难以满足其要求,将两种或多种算法相结合,是今后研究的一个重点。

2) 轨迹规划与跟踪控制一体化。当前的设计方法一般首先由轨迹规划单元规划轨迹,而后由跟踪控制模块控制UCAV对规划轨迹进行跟踪。为了保证规划轨迹的可飞性,往往需要对UCAV的飞行参数施加比较苛刻的约束条件,不利于UCAV充分发挥其机动性能,借鉴导弹制导控制一体化设计思想,直接依据任务要求和UCAV自身的飞行包线等约束条件给出最佳的控制信号,送给控制器控制UCAV完成作战任务,将有助于提升其整体作战性能。

3) 兼顾规划轨迹高精度与算法实时性。目前的轨迹规划算法尚不能有效解决规划轨迹较高的实时性要求和多约束、轨迹可飞性要求之间的矛盾。为了追求近实时性能,算法往往会对模型的约束条件做较大程度的简化,或者是为了规划高精度多维状态参数,而采用地面站或是离线的方式进行规划。目前采用模型预测控制仍然难以有效调和二者之间的矛盾,有待学者进行下一步深入研究。

7 结论

围绕UCAV轨迹优化问题,建立了一般模型,阐述目前常用的轨迹优化方法的基本原理、特点和存在问题,并针对UCAV轨迹规划算法,当前重点研究了两个方向,即隐身突防轨迹优化和不确定环境下的在线轨迹规划算法,并进行了综述。本文的工作可以为轨迹规划研究提供很好的参考。

参考文献

- [1] 牛轶峰,沈林成,戴斌,等.无人作战系统发展[J].国防科技,2009,30(5):1-11. (NIU Y F, SHEN L C, DAI B, et al. A survey of unmanned combat system development[J]. National Defense Science and Technology, 2009, 30(5):1-11.)
- [2] KAMYAR R, TAHERI E. Aircraft optimal terrain/threat-based trajectory planning and control[J]. Journal of Guidance Control and Dynamics, 2014, 37(2):466-483.
- [3] 刘鹤鸣,丁达理,黄长强,等.基于自适应伪谱法的UCAV低可探测攻击轨迹规划研究[J].系统工程与电子技术,2013,35(1):78-84. (LIU H M, DING D L, HUANG C Q, et al. UCAV low observable attacking trajectory planning based on adaptive pseudospectral method[J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(1):78-84.)
- [4] CAPOZZI B J. Evolution-based path planning and management for autonomous vehicles[D]. Washington: University of Washington, 2001.
- [5] FOO J L, KNUITZON J, KALIVARAPU V, et al. Path planning of unmanned aerial vehicles using B-splines and particle swarm optimization[J]. Journal of Aerospace Computing, Information, and Communication, 2009, 6(4):271-290.
- [6] 何平川,戴树岭.一种改进的UAV三维航迹实时规划算法[J].北京航空航天大学学报,2010,36(10):1248-1251. (HE P C, DAI S L. Improved 3-D real-time trajectory planning algorithm for UAV[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2010, 36(10):1248-1251.)
- [7] 彭星光,高晓光,魏小丰.基于混合多目标进化算法的多无人机侦察路径规划[J].系统工程与电子技术,2010,32(2):326-331. (PENG X G, GAO X G, WEI X F. Multiple UAVs routing in reconnaissance mission based on hybrid multi-objective evolutionary algorithm[J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(2):326-331.)
- [8] 黄国强,陆宇平,南英.飞行器轨迹优化数值算法综述[J].中国科学:技术科学,2012,42(9):1016-1036. (HUANG G Q, LU Y P, NAN Y. A survey of numerical algorithms for trajectory optimization of flight vehicles[J]. Scientia Sinica Technologica, 2012, 42(9):1016-1036.)
- [9] RAO A V. A survey of numerical methods for optimal control[J]. Advances in the Astronautical Sciences, 2009, 135(1):497-528.
- [10] 雍恩米,陈磊,唐国金.飞行器轨迹优化数值方法综述[J].宇航学报,2008,29(2):397-406. (YONG E M, CHEN L, TANG G J. A survey of numerical methods for trajectory optimization of spacecraft[J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(2):397-406.)
- [11] ROSS I M, KARPENKO M. A review of pseudospectral optimal control; from theory to flight[J]. Annual Reviews in Control, 2012(36):182-197.
- [12] KANG W, BEDROSSIAN N. Pseudospectral optimal control theory makes debut flight, saves NASA \$1M in under three hours[J]. SIAM News, 2007, 40(7):1-3.
- [13] GARG D, PATTERSON M, HAGER W W, et al. A unified framework for the numerical solution of optimal control problems using pseudospectral methods[J]. Automatica, 2010, 46(11):1843-1851.
- [14] BENSON D. A Gauss pseudospectral transcription for op-

- timal control [D]. Boston: Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [15] FAHROO F, ROSS I M. Pseudospectral methods for infinite horizon optimal control problems [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2008, 31(4):927-936.
- [16] ELNAGAR G, KAZEMI M A, RAZZAGHI M. The pseudospectral Legendre method for discretizing optimal control problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(10):1793-1796.
- [17] GARG D, PATTERSON M A, HAGER W W, et al. An overview of three pseudospectral methods for the numerical solution of optimal control problems [J]. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2009, 135(1):475-487.
- [18] BENSON D A, HUNTINGTON G T, THORVALDSEN T P, et al. Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2006, 29(6):1435-1440.
- [19] GARG D. *Advances in global pseudospectral methods for optimal control*[D]. Gainesville: The University of Florida, 2011.
- [20] PATTERSON M A, RAO A V. GPOPS-II: a matlab software for solving multiple-phase optimal control problems using HP-adaptive Gaussian quadrature collocation methods and sparse nonlinear programming [J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2013, 39(3):1-41.
- [21] DARBY C L. HP pseudospectral method for solving continuous time nonlinear optimal control problems [D]. Gainesville: The University of Florida, 2011.
- [22] MOHAN K, PATTERSON M A, RAO A V. Optimal trajectory and control generation for landing of multiple aircraft in the presence of obstacles[C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 2012:1-16.
- [23] PATTERSON M A, RAO A V. Exploiting sparsity in direct collocation pseudospectral methods for solving optimal control problems[J]. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 2012, 49(2):364-377.
- [24] RAO A V, BENSON D A, DARBY C, et al. Algorithm 902: Gpops, a Matlab software for solving multiple-phase optimal control problems using the Gauss pseudospectral method[J]. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 2010, 37(2):163-172.
- [25] 张澍森, 金栋平. 飞机拦阻过程的非线性最优控制[J]. *航空学报*, 2009, 30(5):849-854. (ZHANG S S, JIN D P. Nonlinear optimal control of aircraft arresting process [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2009, 30(5):849-854.)
- [26] 张煜, 张万鹏, 陈璟, 等. 基于 Gauss 伪谱法的 UCAV 对地攻击武器投放轨迹规划[J]. *航空学报*, 2011, 32(7):1240-1251. (ZHANG Y, ZHANG W P, CHEN J, et al. Air-to-ground weapon delivery trajectory planning for UCAVs using Gauss pseudospectral method[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2011, 32(7):1240-1251.)
- [27] KABAMBA P T, MEERKOV S M, ZEITZ F H. Optimal path planning for unmanned combat: aerial vehicles to defeat radar tracking [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, 29(2):279-288.
- [28] 晏青, 熊峻江, 游思明. 基于动态 RCS 的无人机航迹实时规划[J]. *北京航空航天大学学报*, 2011, 37(9):1115-1121. (YAN Q, XIONG J J, YOU S M. Real-time programming method for flight path of unmanned vehicle based on dynamic RCS [J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2011, 37(9):1115-1121.)
- [29] 陈璟, 陈少飞, 刘鸿福. 基于 RCS 的三维低可探测性轨迹优化方法[J]. *国防科学技术大学学报*, 2012, 34(3):89-93. (CHEN J, CHEN S F, LIU H F. A three-dimensional low observable trajectory optimization method based on RCS [J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2012, 34(3):89-93.)
- [30] PELOSI M, KOPP C, BROWN M. Ragne-limited UAV trajectory using terrain masking under radar detection risk [D]. Fort Lauderdale: Nova Southeastern University, 2010.
- [31] WILLIAMS P. Three-dimensional aircraft terrain-following via real-time optimal control [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, 30(4):1201-1206.
- [32] 任佳, 高晓光, 张艳. 移动威胁情况下的无人机路径规划[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(5):641-647. (REN J, GAO X G, ZHANG Y. Path planning based on model predictive control algorithm under moving threat [J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(5):641-647.)
- [33] 武善杰, 郑征, 蔡开元. 基于行为协同和虚拟目标相结合的无人机实时航路规划[J]. *控制理论与应用*, 2011, 28(1):131-136. (WU S J, ZHENG Z, CAI K Y. Real-time path planning for unmanned aerial vehicles using behavior coordination and virtual goal [J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(1):131-136.)
- [34] 康亮, 赵春霞, 郭剑辉. 基于模糊滚动 RRT 算法的移动机器人路径规划[J]. *南京理工大学学报: 自然科学版*, 2010, 34(5):642-648. (KANG L, ZHAO C X, GUO J H. Path planning based on fuzzy rolling rapidly-exploring random tree for mobile robot [J]. *Journal of Nanjing University of Science and Technology: Nature Science Edition*, 2010, 34(5):642-648.)
- [35] PRÉVOST C G, DESBIENS A, GAGNON E, et al. Unmanned aerial vehicle optimal cooperative obstacle avoidance in a stochastic dynamic environment [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, 34(1):29-43.