

基于观测器的不确定混沌系统同步

沈志萍¹, 闫荣¹, 郭依林²

(1. 河南师范大学数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007; 2. 广东第二师范学院计算机科学系, 广州 510310)

摘要: 提出了一类混沌系统的观测器同步方法。利用混沌系统的不确定项观测器, 给出了一类混沌系统基于观测器同步的简单有效方法, 该方法不需知道外部扰动的任何信息, 且观测器的设计方法简单, 利于工程应用。通过对 Lorenz 混沌系统的分析和数值模拟研究, 验证了该方法在混沌同步中的优良性能。

关键词: 混沌同步; 混沌系统; 观测器; 信息处理

中图分类号: TN956 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-637X(2015)06-0089-04

Synchronization of Chaotic Systems Based on Observer

SHEN Zhi-ping¹, YAN Rong¹, WU Yi-lin²

(1. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China;

2. Department of Computer Science, Guangdong University of Education, Guangzhou 510310, China)

Abstract: A simple but effective method was proposed for synchronization of a class of chaotic systems by use of uncertainty observer. The method needed no information about the external perturbation, and the design method of the observer was simple, which made it easy for engineering application. Numerical simulation was made to Lorenz chaotic system, which verified the fine performance of the method in chaotic synchronization.

Key words: chaotic synchronization; chaotic system; observer; information processing

0 引言

近年来, 由于混沌系统在信息处理方面特别是安全通信方面展示了良好的应用前景, 因此, 对混沌系统的研究, 尤其是对混沌系统的同步研究已经成为人们最感兴趣的课题之一^[1-14]。

目前已经提出的混沌系统的同步方法多种多样, 如自适应方法^[3]、神经网络方法^[7-9]、观测器同步方法^[4-6]等, 由于观测器方法的同步易于工程上实现, 因此目前得到了更大的关注。文献[7]提出了一类混沌系统的观测器构造方法, 本文基于观测器的思想, 提出了更大范围的一类混沌系统新的观测器同步构造方法, 该方法不需知道外部扰动的任何信息, 且观测器的设计方法简单、构造简单、同步速度快。数值模拟结果显示, 该方法可以广泛应用于通信和信息处理等方面。

1 问题的描述

考虑一类混沌系统

$$\dot{x} = Ax + f(x, t) \quad (1)$$

式中: $x \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量; $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$; $f(x, t)$ 是未知不确定非线性函数。与驱动系统式(1)相对应, 响应系统为

$$\dot{y} = Ay + g(y) + Bu \quad (2)$$

式中: $y \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量; $B \in \mathbf{R}^{n \times l}$ 且列满秩 ($\text{rank}(B) = l$); $u \in \mathbf{R}^{l \times 1}$ 为要设计的控制器; $g(y)$ 是已知非线性函数。

定义误差 $e = y - x$, 由式(1)和式(2)得误差系统

$$\dot{e} = Ae + g(y) - f(x, t) + Bu \quad (3)$$

本文的目的是找一个合适的控制律 $u(t)$ 使得响应系统跟踪上驱动系统, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t)\| = 0$, 式中, $\|\cdot\|$ 表示向量的 Euclid 范数。

定义1(分布加权平均) 若存在函数矩阵 $W(t) = [w_{ij}(t)]$, $\int_0^{\infty} W(t) dt = I$, 则称 $\int_0^{\infty} W(t)f(t) dt$ 为向量函数 $f(t)$ 的分布加权平均值。如果 $f(t)$ 的估计值 $\hat{f}(t)$ 满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{f}(t) = \int_0^{\infty} W(t)f(t) dt$, 则称 $\hat{f}(t)$ 是 $f(t)$ 的渐近无偏估计(加权平均意义下)。

收稿日期: 2014-07-15

修回日期: 2014-08-10

基金项目: 国家自然科学基金(61203293); 广东省自然科学基金(S2012010008462)

作者简介: 沈志萍(1984—), 女, 河南驻马店人, 博士, 讲师, 研究方向为网络控制、最优和鲁棒控制、混沌理论与应用等。

2 基于不确定项观测器实现混沌系统同步

对于连续不确定系统式(3),要进行有效的控制,首先是解决不确定项的估计问题,本文用观测器来解决这个问题。为构造观测器方便,将式(1)系统改写为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + f(x, t) \\ \dot{\hat{f}} = \hat{f} \end{cases} \quad (4)$$

设计观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + \hat{f} + K_1(x - \hat{x}) \\ \dot{\hat{f}} = K_2(x - \hat{x}) \end{cases} \quad (5)$$

定义观测误差 $e_x = \hat{x} - x, e_f = \hat{f} - f$, 则得观测误差方程

$\dot{e}_x = e_f - K_1 e_x, \dot{e}_f = -K_2 e_x - \dot{f}$, 写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_f \\ \dot{e}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -K_2 \\ I & -K_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_f \\ e_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{f} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

特别取 $K_1 = 2A, K_2 = A^2, A = \text{diag}\{\lambda, \dots, \lambda\}, \lambda > 0$, 则观测误差方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_f \\ \dot{e}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A^2 \\ I & -2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_f \\ e_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{f} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

做变换

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_f \\ \bar{e}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_f \\ e_x \end{pmatrix} \quad (8)$$

则误差方程变为

$$\dot{\bar{e}} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ -I & -A \end{pmatrix} \bar{e} + \begin{pmatrix} \dot{f} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

定理 1 若 $\|\dot{f}\| \leq \eta, \eta > 0$, 按式(5)构造观测器, 则

$$1) \lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{f} - f\| \leq \frac{2\eta}{\lambda};$$

2) \hat{f} 为 f 真值的无偏估计(加权平均意义下)。

证明 1) 解式(9)的第1个子系统方程

$$\begin{cases} \bar{e}_f(t) = e^{-At} \bar{e}_f(0) + \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \dot{f}(\tau) d\tau \\ \|\bar{e}_f(t)\| \leq e^{-\lambda t} \|\bar{e}_f(0)\| + \frac{\eta}{\lambda} \end{cases} \quad (10)$$

解式(9)的第2个子系统方程

$$\begin{cases} e_x(t) = e^{-At} e_x(0) - \int_0^t e^{-A(t-\tau)} \bar{e}_f(\tau) d\tau \\ \|e_x(t)\| \leq e^{-\lambda t} \|e_x(0)\| + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \|\bar{e}_f(\tau)\| d\tau \end{cases} \quad (11)$$

由式(10)得

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \|\bar{e}_f(\tau)\| d\tau &\leq \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} (e^{-\lambda\tau} \|\bar{e}_f(0)\| + \\ &\frac{\eta}{\lambda}) d\tau \leq t e^{-\lambda t} \|\bar{e}_f(0)\| + \frac{\eta}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (12)$$

将式(12)代入式(11)得

$$\|e_x(t)\| \leq e^{-\lambda t} (\|e_x(0)\| + t \|\bar{e}_f(0)\|) + \frac{\eta}{\lambda^2} \quad (13)$$

由式(8)、式(10)和式(13)得: $e_f = Ae_x - \bar{e}_f, \|e_f\| \leq \lambda \|e_x\| + \|\bar{e}_f\| \leq \lambda [e^{-\lambda t} (\|e_x(0)\| + t \|\bar{e}_f(0)\|) + \frac{\eta}{\lambda^2}] + e^{-\lambda t} \|\bar{e}_f(0)\| + \frac{\eta}{\lambda} \frac{2\eta}{\lambda}$ 。

2) 注意式(6)可变形为

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{f}} \\ \dot{e}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -A^2 \\ I & -2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f} \\ e_x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

记 $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -A^2 \\ I & -2A \end{pmatrix}$, 解方程式(14)得 $\begin{pmatrix} \hat{f}(t) \\ e_x(t) \end{pmatrix} =$

$e^{\Gamma t} \begin{pmatrix} \hat{f}(0) \\ e_x(0) \end{pmatrix} - \int_0^t e^{\Gamma(t-\tau)} \Gamma \begin{pmatrix} f(x(\tau), \tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau$ 。因为 Γ 稳定,

所以

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \hat{f}(t) \\ e_x(t) \end{pmatrix} \rightarrow -\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{\Gamma(t-\tau)} \Gamma \begin{pmatrix} f(x(\tau), \tau) \\ 0 \end{pmatrix} d\tau \\ \int_0^t \Gamma e^{\Gamma(t-\tau)} d\tau = I - e^{\Gamma t} \rightarrow I \end{cases} \quad (15)$$

由式(15)和定义1, $\begin{pmatrix} \hat{f}(t) \\ e_x(t) \end{pmatrix}$ 是 $\begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ (加权平均意义

下)的无偏估计, 从而 \hat{f} 是 f (加权平均意义下)的无偏估计。

定理 2 若 $\|\dot{f}\| \leq \eta$ 且选择控制器为

$$u = -B^{-1}(Ae + g(y) - \hat{f}(x, t) + Ke + \varepsilon \text{sign}(e)) \quad (16)$$

式中, $\varepsilon > 2\eta/\lambda$, 则式(3)是渐近稳定的, 亦即系统式(2)和式(1)渐近达到同步。

证明 由式(3)和式(16)得

$$\dot{e} = e_f - Ke - \varepsilon \text{sign}(e) \quad (17)$$

取

$$V = \frac{1}{2} e^T e \quad (18)$$

对 $V(t)$ 进行求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T e_f - K \|e\|^2 - \varepsilon \|e\|_1 \leq \\ &-K \|e\|^2 - (\varepsilon - \frac{2\eta}{\lambda}) \|e\|_1 < 0 \end{aligned} \quad (19)$$

式中, $\|\cdot\|_1$ 表示1范数, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, 定理得证。

3 数值算例

考虑 Lorenz 系统, 设驱动系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1) + d(t) \\ \dot{x}_2 = 28x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - 8x_3/3 \end{cases} \quad (20)$$

式中, $d(t) = 5\sin t$, 当 $d(t) = 0$ 时, 其相平面图如图 1 所示, 设其初值为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, -1, -1.01)$ 。

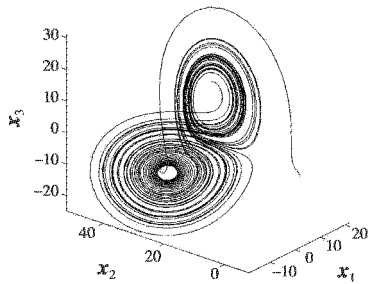


图1 Lorenz 系统的相平面图

Fig. 1 Phase plane plot of Lorenz system

响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 10(y_2 - y_1) + u_1 \\ \dot{y}_2 = 28y_1 - y_2 - y_1y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - 8y_3/3 + u_3 \end{cases} \quad (21)$$

在仿真过程中取 $A = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8/3 \end{pmatrix}, g =$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_1y_2 \end{pmatrix}, K_1 = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, K_2 = A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon = 2。$$

同步误差 $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ 的效果图如图 2 所示。

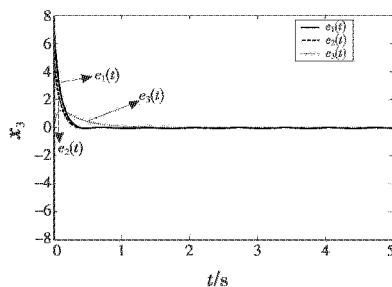


图2 同步误差 $e_1(t), e_2(t), e_3(t)$ 效果图

Fig. 2 The synchro error state of drive-response systems

设计观测器为: $\dot{\hat{x}}_1 = 10(x_2 - x_1) + \hat{f}_1 - 2(x_1 - \hat{x}_1);$

$\dot{\hat{x}}_2 = 28x_1 - x_2 + \hat{f}_2 - 2(x_2 - \hat{x}_2); \dot{\hat{x}}_3 = -8x_3/3 + \hat{f}_3 - 2(x_3 -$

$\hat{x}_3); \dot{\hat{f}}_1 = -(x_1 - \hat{x}_1); \dot{\hat{f}}_2 = -(x_2 - \hat{x}_2); \dot{\hat{f}}_3 = -(x_3 - \hat{x}_3)。$

控制律 $u(t)$ 取为 $u = -B^{-1}(Ae + g(y) - \hat{f}(x, t) + Ke + \varepsilon \text{sign}(e))。$

仿真结果如图 2 所示, 从仿真结果可以看出, 在存在外部扰动的情况下系统仍然能保持良好的同步性能, 即表明本文的方法是有效的。

4 结束语

本文提出了一类混沌系统的同步方法, 通过构造系统的不确定项观测器, 可以实现一大类具有外部扰动混沌系统的同步, 该方法不需知道外部扰动的任何信息, 且观测器的设计方法简单, 利于工程应用, 数值模拟验证了该方法有效实用。

参考文献

- [1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. Physical Review Letters, 1990, 64(8): 821-824.
- [2] GRASSI G, CAFAGNA D, VECCHIO P, et al. A new scheme to synchronize chaotic discrete-time systems via a scalar signal[C]//IEEE 55th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS), 2012: 654-657.
- [3] 岳冬, YONEYAMA J. 含不确定性混沌系统的模糊自适应同步[J]. 物理学报, 2003, 52(2): 292-297. (YUE D, YONEYAMA J. Adaptive fuzzy synchronization of chaotic systems with uncertainties[J]. Acta Physica Sinica, 2003, 52(2): 292-297.)
- [4] HASLER M. Synchronization of chaotic systems and transmission of information[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering, 1998, 8(4): 647-659.
- [5] GRASSI G, MASCOLO S. Nonlinear observer design to synchronize hyperchaotic system via a scalar signal[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1997, 44(10): 1011-1014.
- [6] 关新平, 何宴辉, 范正平. 扰动情况下一类混沌系统的观测器同步[J]. 物理学报, 2003, 52(2): 276-280. (GUAN X P, HE Y H, FAN Z P. Synchronization of a class of chaotic systems in the presence of perturbation by an observer[J]. Acta Physica Sinica, 2003, 52(2): 276-280.)

- [7] 关新平,范正平,彭海朋,等. 扰动情况下基于 RBF 网络的混沌系统同步[J]. 物理学报,2001,50(9):1670-1674. (GUAN X P, FAN Z P, PENG H P, et al. The synchronization of chaotic systems based on RBF network in the presence of perturbation [J]. Acta Physica Sinica, 2001, 50(9):1670-1674.)
- [8] 刘丁,任海鹏,孔志强. 基于径向基函数神经网络的未知模型混沌系统控制[J]. 物理学报,2003,52(3):531-535. (LIU D, REN H P, KONG Z Q. Control of chaos solely based on RBF neural network without an analytical model[J]. Acta Physica Sinica, 2003, 52(3):531-535.)
- [9] 何国光,曹志彤. 混沌神经网络的控制[J]. 物理学报,2001,50(11):2103-2107. (HE G G, CAO Z T. Controlling chaos in chaotic neural network [J]. Acta Physica Sinica, 2001, 50(11):2103-2107.)
- [10] AYATI M, KHALOOZADEH H. Practical implementation of adaptive impulsive observer based chaotic synchronization scheme [J]//IEEE International Conference on System Science and Engineering(ICSSE), 2011, 44(10):367-372.
- [11] SHAN L, LIU Z, WANG Z. A new MLS chaotic system and its back stepping sliding mode synchronization control[J]. Journal of Computers, 2010, 5(3):456-463.
- [12] CHERRIER E, M'SAAD M, FARZA M. High-gain observer synchronization for a class of time-delay chaotic systems: Application to secure communications[J]. Journal of Nonlinear Systems and Applications, 2010, 1(3/4):102-112.
- [13] AYATI M, KHALOOZADEH H. Stable chaos synchronization scheme for non-linear uncertain systems[J]. IET Control Theory Applications, 2010, 4(3):437-447.
- [14] BEHESHTI S, KHALOOZADEH H. Synchronization of time-delay chaotic systems in the presence of parameters uncertainties with sliding mode observer design[C]//The 2nd International Conference on Control, Instrumentation and Automation(ICCIA), 2011:664-669.

(上接第 76 页)

- [3] GWALTNEY D A, BRISCOE J M. Comparison of communication architectures for spacecraft modular avionics systems[M]. Washington:NASA, 2006.
- [4] MATSUBARA M, KOJIMA T, SHIMAMURA K, et al. Node status monitoring and state transition mechanism for network centric X-by-Wire systems [C]//Autonomous Decentralized Systems, USA:IEEE, 2009:1-6.
- [5] BERGENHEM C, KARLSSON J. A process health status service for safety related systems using TT/ET communication scheduling[C]//Pacific Rim International Symposium on Dependable Computing, IEEE, 2008:122-131.
- [6] MUDALLAR V S. Verification of FlexRay membership protocol using UPPAAL[D]. Manhattan:Kansas State University, 2008.
- [7] SAE S-18 Committee. ARP 4761 guidelines and methods for conducting the safety assessment process on civil airborne systems and equipment[M]. USA:SAE, 1996.
- [8] PFEIFER H. Formal verification of the TTP group membership algorithm [C]//Formal Methods for Distributed System Development FORTE XIII/PSTV XX, 2000:3-18.
- [9] BAUER G, PAULITSCH M. An investigation of membership and clique avoidance in TTP/C[C]//Symposium on Reliable Distributed System, 2000:118-124.
- [10] SAE International Group. TTP Communication protocol [Z]. 2011.

(上接第 88 页)

- [8] 孙枫,吴旭,王根. 舰载机大失准角的快速二次传递对准方法[J]. 华中科技大学学报,2012,40(12):65-69,74. (SUN F, WU X, WANG G. Rapid second time transfer alignment of large misalignment for carrier aircrafts[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology, 2012, 40(12):65-69,74.)
- [9] 王司,邓正隆. 机载导弹空中二次快速传递对准方法研究[J]. 航空学报,2005,26(4):486-489. (WANG S, DENG Z L. Study on a twice rapid transfer alignment approach to missiles carried aboard in flight[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2005, 26(4):486-489.)
- [10] 秦永元,张洪钺,汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安:西北工业大学出版社,2012. (QIN Y Y, ZHANG H Y, WANG S H. Theory of Kalman filter and integrated navigation[M]. Xi'an:Northwestern Polytechnical University Press, 2012.)