

## 基于 $K$ -矩阵的捷联惯导系统初始四元数提取

赵 晗, 汪立新, 赵曦晶, 王杰飞  
(第二炮兵工程大学控制工程系, 西安 710025)

**摘要:** 捷联惯导系统的姿态算法是其导航算法的关键环节,应用四元数来描述运载体姿态的变化在实际工程中应用广泛,其中的初始四元数提取精度直接影响到导航解算精度。针对这个问题,在传统提取算法的基础上,得到了基于  $K$ -矩阵的初始四元数提取算法,并对正交和非正交初始姿态矩阵的四元数提取进行了对比分析。初始姿态矩阵算例的提取验证表明,基于  $K$ -矩阵的提取算法运算量较小,且对于非正交姿态矩阵能有效提高四元数提取的精度,为改进姿态解算的初始四元数提取算法提供了参考。

**关键词:** 捷联惯导; 四元数; 姿态矩阵; 提取

**中图分类号:** U666.1      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1671-637X(2015)06-0035-04

## $K$ -Matrix Based Initial Quaternion Extraction of Strapdown Inertial Navigation System

ZHAO Han, WANG Li-xin, ZHAO Xi-jing, WANG Jie-fei

(Department of Control Engineering, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

**Abstract:** The attitude algorithm of strapdown inertial navigation system (SINS) is a key part of its navigation algorithm. Describing the change of carrier's attitude with quaternion has found a wide application in practical engineering, of which, the accuracy of initial quaternion extraction has a direct influence on the calculation accuracy of navigation. To this problem, on the basis of traditional extraction algorithms, an initial quaternion extraction algorithm based on  $K$ -matrix was obtained, and a comparative analysis of quaternion extraction with orthogonal and non-orthogonal initial attitude matrix was made. The extraction and verification of initial attitude matrix example showed that the extraction algorithm based on  $K$ -matrix has a lower computational complexity, and it can effectively improve the accuracy of quaternion extraction for non-orthogonal attitude matrix. The method provides a reference for improving initial quaternion extraction algorithm of attitude calculation.

**Key words:** strapdown inertial navigation; quaternion; attitude matrix; extraction

### 0 引言

惯性导航一般使用的是一种积分推算的导航算法,故需预先将积分初值(包括姿态、速度和位置)输入给惯性导航系统<sup>[1-2]</sup>。对于捷联惯导系统,姿态更新算法是其导航算法的核心<sup>[3-4]</sup>。捷联惯导系统通常采用四元数来表征姿态<sup>[5]</sup>,需要从初始对准得到的姿态矩阵中提取初始四元数。虽然目前多子样的等效旋转矢量算法逐步取代了四元数算法<sup>[6]</sup>,但是在姿态信息迭代计算过程中,仍涉及四元数的递推更新问题。

因此,无论是使用经典的四元数算法,还是更适用于高动态环境的等效旋转矢量算法,优良的四元数提取算法是保证导航计算精度的首要环节。

传统的四元数提取算法主要是基于四元数与姿态矩阵的代数关系,算法直观易懂且利于实现<sup>[7]</sup>,但存在初始姿态角较大时提取计算精度下降的问题,而且在计算过程中还可能出现需开方运算的值为负的情况。文献[7]总结了文献[8-9]提出的几种初始四元数提取算法,并通过同一算例比较了各方法的优劣。为检验算法的普遍适用性,本文在文献[7]的基础上,给出了一种基于构造的  $K$ -矩阵的四元数提取算法,通过大量算例对算法性能进行检验,以确定算法的适用范围,进而提高四元数提取精度。

收稿日期:2014-07-16

修回日期:2014-08-31

作者简介:赵 晗(1989—),男,浙江杭州人,硕士生,研究方向为捷联惯性导航技术。

## 1 捷联惯导系统的姿态算法

初始对准得到的姿态矩阵  $C$  与姿态四元数  $Q$  存在以下对应关系

$$C_b^N = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中:  $q_0, q_1, q_2, q_3$  为四元数的 4 个元, 即  $Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ 。

对于四元数算法, 导航解算过程中直接通过四元数  $Q$  的迭代计算来更新姿态。以四阶毕卡算法为例,  $Q$  的递推公式为

$$Q(t_{k+1}) = \left( I \left( 1 - \frac{\Delta\theta^2}{8} + \frac{\Delta\theta^4}{384} \right) + \Delta\theta \left( \frac{1}{2} - \frac{\Delta\theta^2}{48} \right) \right) Q(t_k) \quad (2)$$

而等效旋转矢量法通过多子样对角速度的积分问题进行优化处理, 得到载体系相对于导航系的等效旋转矢量  $\eta_k$  后, 仍需将其转换为对应的变换四元数  $Q_{b(k+1)}^{b(k)}$  [10], 即

$$Q_{b(k+1)}^{b(k)} = \cos \frac{\|\eta_k\|}{2} + \frac{\eta_k}{\|\eta_k\|} \sin \frac{\|\eta_k\|}{2} \quad (3)$$

然后利用

$$Q_{b(k+1)}^n = Q_{b(k)}^n Q_{b(k+1)}^{b(k)} \quad (4)$$

完成姿态四元数的更新。

从以上分析可以看出, 等效旋转矢量算法与四元数算法的共同之处在于姿态更新的过程中都需要使用四元数这个数学工具, 因此, 从初始对准给出的方向余弦矩阵提取初始四元数对捷联惯性系统导航解算至关重要。工程中常用的四元数提取算法一般为 [3]

$$\begin{cases} |q_0| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + C_{11} + C_{22} + C_{33}} \\ |q_1| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + C_{11} - C_{22} - C_{33}} \\ |q_2| = \frac{1}{2} \sqrt{1 - C_{11} + C_{22} - C_{33}} \\ |q_3| = \frac{1}{2} \sqrt{1 - C_{11} - C_{22} + C_{33}} \end{cases} \quad (5)$$

式中, 省略四元数各个元的符号处理公式, 该提取方法存在的问题在引言中已有叙述。提取的初始四元数将作为姿态更新计算的积分起点, 也将成为捷联式惯导系统数字平台 [11] 的基础, 对捷联惯导系统的导航精度有较大的影响。

## 2 K-矩阵的构造

特征值算法需要以  $K$ -矩阵的特征值与特征向量作为四元数提取的依据, 鉴于文献 [7] 只是直接给出了利用  $K$ -矩阵提取四元数的步骤, 本节详细阐述了  $K$ -

矩阵的构造方法。

$K$ -矩阵的构造使用了坐标转换精度的代价函数。设  $r_i (i=1, 2, 3)$  为导航坐标系的 3 个坐标轴;  $b_i (i=1, 2, 3)$  为载体坐标系的 3 个坐标轴;  $D$  为  $3 \times 3$  的正交姿

$$\text{态转换矩阵, } D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}, \text{ 则构造表征坐标转}$$

换误差大小的代价函数  $L$  为

$$L(D) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i |b_i - Dr_i|^2 \quad (6)$$

试图通过寻找合适的  $D$  使得代价函数  $L$  最小, 但是针对四元数提取的问题, 应当用四元数代替矩阵  $D$  来表示姿态, 上式替换为

$$J(D) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i |b_i - D(Q)r_i|^2 \quad (7)$$

在通常情况下, 矢量  $b_i$  为初始对准的测量结果, 而  $r_i$  由计算得到。

根据 Bar-Itzhack 的描述, 所需提取的四元数  $Q$  即为特定的矩阵  $K$  最大特征值所对应的特征向量, 其构造过程如下。

定义  $\sigma, B, S$  和  $z$  为

$$\sigma = \sum_{i=1}^3 a_i b_i^T r_i \quad (8)$$

$$B = \sum_{i=1}^3 a_i b_i r_i^T \quad (9)$$

$$S = B + B^T \quad (10)$$

$$z = \sum_{i=1}^3 a_i b_i \times r_i \quad (11)$$

式中,  $a_i$  为式 (7) 中每一对转换差值的权重, 代表了分配给每对转换差值的信任程度。

$K$ -矩阵构造为如下矩阵形式

$$K_1 = \begin{bmatrix} S - \sigma I_3 & z \\ z^T & \sigma \end{bmatrix} \quad (12)$$

在姿态矩阵为非正交阵的情况下, 3 个矢量对分别为

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \end{bmatrix}, r_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \\ d_{32} \end{bmatrix}, r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} d_{13} \\ d_{23} \\ d_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

将式 (13) 的矢量对代入式 (8) ~ 式 (11), 求解过程中认为各项权重均相等, 即  $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ , 再将解算结果代入式 (12), 则可解出非正交姿态阵所对应的  $K$ -矩阵为

$$K_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} d_{11} - d_{22} - d_{33} & d_{21} + d_{12} & d_{31} + d_{13} & d_{23} - d_{32} \\ d_{21} + d_{12} & d_{22} - d_{11} - d_{33} & d_{32} + d_{23} & d_{31} - d_{13} \\ d_{31} + d_{13} & d_{32} + d_{23} & d_{33} - d_{11} - d_{22} & d_{12} - d_{21} \\ d_{23} - d_{32} & d_{31} - d_{13} & d_{12} - d_{21} & d_{11} + d_{22} + d_{33} \end{bmatrix} \quad (14)$$

### 3 基于 $K$ -矩阵的四元数提取

对于  $3 \times 3$  的正交姿态矩阵,构造  $K$ -矩阵的过程中应当注意到:由于姿态矩阵的正交性,在几何表示中载体坐标系只要已知相对于参考坐标系的其中两轴  $r_1, r_2$  的投影,则第三轴的投影自然确定。当姿态矩阵不正交时,需使用第 3 个坐标轴  $r_3^T = [0 \ 0 \ 1]$  与  $r_1, r_2$  一起用于  $K$ -矩阵的确定。

1) 当姿态矩阵为正交阵时,选取导航坐标系的两轴作为参考,即

$$r_1^T = [1 \ 0 \ 0] \quad (15)$$

$$r_2^T = [0 \ 1 \ 0] \quad (16)$$

再根据姿态矩阵确定的  $b_1, b_2$ , 利用式(12)构造出矩阵  $K_1$ ;当姿态矩阵为非正交阵时,直接使用式(14)构造的矩阵  $K_2$  作为提取四元数的  $K$ -矩阵。

- 2) 计算  $K$ -矩阵的特征值和特征向量。
- 3) 选取最大特征值  $\lambda_{\max}$  所对应的特征向量

$$v = [v_0 \ v_1 \ v_2 \ v_3]^T \quad (17)$$

- 4) 则从正交姿态矩阵提取的四元数为

$$Q = [-v_3 \ v_0 \ v_1 \ v_2]^T \quad (18)$$

## 4 算法验证与分析

### 4.1 正交矩阵的四元数提取

为实现算法精度的定量分析,随机生成正交矩阵作为姿态阵进行四元数的提取仿真。由于实际工程中,姿态矩阵很难做到严格正交,因此在所生成的严格正交阵上叠加一个 Euclid 范数为其 0.1% 的随机误差

表 1 正交矩阵四元数提取算法精度对比

Table 1 Quaternion extracting algorithm precision of orthogonal matrix

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
误差均值 ( $10^{-3}$ )	经典算法	0.124 7	0.124	0.123 9	0.124 6	0.123 6	0.124	0.124	0.126 2	0.123 9	0.123 9
	$K$ -矩阵算法	0.146 0	0.144 5	0.145 2	0.145 9	0.143 5	0.144 8	0.144 9	0.146 2	0.145 3	0.145
误差标准差 ( $10^{-3}$ )	经典算法	0.027 8	0.030 1	0.028 9	0.029	0.028 5	0.029 8	0.028 7	0.029 5	0.029 5	0.029 2
	$K$ -矩阵算法	0.033 0	0.035 7	0.032 7	0.034 3	0.033 4	0.034 3	0.033 7	0.034 5	0.034 4	0.035 6
仿真时间 ( $10^{-3}$ s)	经典算法	0.358	0.291	0.303	0.356	0.291	0.313	0.311	0.304	0.310	0.283
	$K$ -矩阵算法	0.175	0.107	0.127	0.163	0.102	0.106	0.109	0.100	0.138	0.096

### 4.3 算法性能分析

对于正交矩阵的提取,从图 1 中可以看出, $K$ -矩阵算法的提取误差要比经典算法略大,而且误差的标准差数据表明  $K$ -矩阵算法的稳定性也不如经典算法,然

阵,以此作为四元数提取的对象。定义  $C_1$  为该存在微小误差的近似正交姿态矩阵,  $\hat{C}_1$  为所提取的四元数由式(1)生成的姿态矩阵。因此可以使用  $C_1$  与  $\hat{C}_1$  差值的 Euclid 范数  $\|C_1 - \hat{C}_1\|$  来表征四元数提取的误差大小。

共进行 10 组仿真实验,每组均生成 500 个姿态矩阵用于四元数提取。提取算法的精度用提取误差的均值和标准差来表征,而算法的计算复杂程度用仿真程序运行的时间来衡量,结果如表 1 所示。其中一组的提取误差大小如图 1 所示。

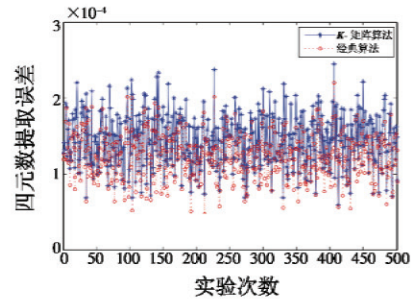


图 1 正交矩阵四元数提取误差对比

Fig. 1 Quaternion extracting error of orthogonal matrix

### 4.2 非正交矩阵的四元数提取

生成服从正态分布的随机矩阵作为四元数提取的非正交矩阵,实验方法与 4.1 节相同。衡量算法性能的各项指标见表 2。其中一组的提取误差大小如图 2 所示。

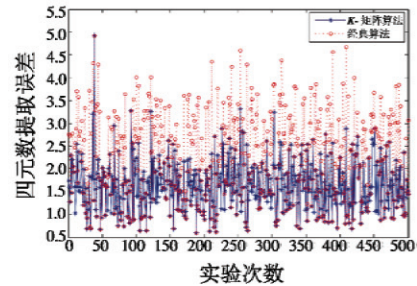


图 2 非正交矩阵四元数提取误差对比

Fig. 2 Quaternion extracting error of non-orthogonal matrix

而在算法的快速性上,通过表 1 的对比可知, $K$ -矩阵算法具有明显的优势。

对于非正交矩阵的提取,图 2 说明了  $K$ -矩阵算法在精度上的优势,而且相对于经典算法提取结果的剧烈振



荡,  $K$ -矩阵算法具有更好的稳定性。表2中的数据表明,在仿真中  $K$ -矩阵算法将稳定性提高了41%左右。

表2 非正交矩阵四元数提取算法精度对比

Table 2 Quaternion extracting algorithm precision of non-orthogonal matrix

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
误差均值	经典算法	2.238 3	2.273 4	2.249 4	2.239 5	2.224 2	2.288 5	2.207 1	2.219 1	2.200 2	2.199 2
	$K$ -矩阵算法	1.639 7	1.640 4	1.646 9	1.642 8	1.638 4	1.656 1	1.636 6	1.633 6	1.618 8	1.625 8
误差标准差	经典算法	0.892 7	0.941 7	0.912 2	0.889 4	0.940 7	0.944 3	0.935	0.915 2	0.939 1	0.922 5
	$K$ -矩阵算法	0.533	0.539 2	0.539 8	0.538 6	0.558 7	0.562 5	0.557 8	0.519 8	0.544 2	0.546
仿真时间( $10^{-3}$ s)	经典算法	0.434	0.402	0.370	0.313	0.799	0.351	0.317	0.312	0.314	0.301
	$K$ -矩阵算法	0.280	0.192	0.174	0.135	0.133	0.182	0.113	0.108	0.117	0.105

## 5 结论

为提高捷联惯导系统初始四元数提取精度,本文对基于  $K$ -矩阵的四元数提取算法和经典的四元数提取算法进行了对比分析,分别以正交、非正交的初始姿态阵为对象进行提取仿真实验。仿真结果表明,对于近似严格正交的姿态矩阵使用经典的四元数提取算法精度较好,然而  $K$ -矩阵算法的运算时间更短,因此可根据具体应用需要选择合适的算法;而对非正交的姿态矩阵,基于  $K$ -矩阵的算法提取精度明显高于经典的提取算法,且具有更好的稳定性和快速性。

## 参考文献

- [1] TITTERTON D H, WESTON J L. Strapdown inertial navigation technology[M]. 2版. 张天光,王秀萍,王丽霞,等,译. 北京:国防工业出版社,2007. (TITTERTON D H, WESTON J L. Strapdown inertial navigation technology [M]. 2nd ed. Translated by ZHANG T G, WANG X P, WANG L X, et al. Beijing: National Defense Industry Press, 2007.)
- [2] 王巍. 光纤陀螺惯性系统[M]. 北京:中国宇航出版社,2010. (WANG W. Fiber optic gyroscope inertial system [M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2010.)
- [3] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京:科学出版社,2006. (QIN Y Y. Inertial navigation[M]. Beijing: Science Press, 2006.)
- [4] 张荣辉,贾宏光,陈涛,等. 基于四元数捷联式惯性导航系统的姿态解算[J]. 光学精密工程,2008,16(10):1963-1970. (ZHANG R H, JIA H G, CHEN T, et al. Attitude solution for strapdown inertial navigation system based on quaternion algorithm [J]. Optics and Precision Engineering, 2008, 16(10):1963-1970.)
- [5] 刘延柱. 关于刚体姿态的数学表达[J]. 力学与实践,2008,30:98-101. (LIU Y Z. Mathematic expression of rigid-body attitude [J]. Mechanics in Engineering, 2008, 30:98-101.)
- [6] 徐景硕,周胜明,蒋华军. 惯性导航系统的发展及其关键技术综述[J]. 科技信息,2009,35:865-866. (XU J S, ZHOU S M, JIANG H J. Survey of the development and the key technology of the inertial navigation system [J]. Science and Technology Information, 2009, 35:865-866.)
- [7] 周绍磊,丛源材,李娟,等. 方向余弦矩阵中四元数提取算法比较[J]. 中国惯性技术学报,2008,16(4):415-418. (ZHOU S L, CONG Y C, LI J, et al. Comparison of algorithms for extracting quaternion from DCM [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(4):415-418.)
- [8] BAR-ITZHACK I Y. New method for extracting the quaternion from a rotation matrix [J]. Journal of Guidance and Control, 2000, 23(6):1085-1087.
- [9] 周江华,苗育红,肖刚. 捷联惯导系统初始四元数提取的新算法[J]. 飞行力学,2003,21(3):63-66. (ZHOU J H, MIAO Y H, XIAO G. New algorithms for initial quaternion extraction of SDINS [J]. Flight Dynamics, 2003, 21(3):63-66.)
- [10] 严恭敏. 车载自主定位定向系统研究[D]. 西安:西北工业大学,2006. (YAN G M. Study on vehicle position and azimuth determining system [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2006.)
- [11] 王巍. 惯性技术研究现状及发展趋势[J]. 自动化学报,2013,39(6):723-729. (WANG W. Status and development trend of inertial technology [J]. Acta Automatica Sinica, 2013, 39(6):723-729.)