

## 结合 Shearlet 与 Bayesian MAP 估计的图像去噪

王飞<sup>1</sup>, 史彩成<sup>2</sup>, 朱士祥<sup>1</sup>

(1. 中国人民解放军93575部队, 河北承德 067000; 2. 北京理工大学生命学院, 北京 100081)

**摘要:** 针对小波变换及 Contourlet 变换在图像去噪应用中的不足, 提出一种结合 Shearlet 与 Bayesian MAP 估计的图像去噪算法。首先对含噪图像进行 Shearlet 分解, 之后根据 Bayesian MAP 准则对分解后的各子带信号进行估计, 最后通过重构得到去噪图像。实验表明, 相对于其他去噪算法, 该方法很好地保留了图像的细节, 取得了更好的视觉效果。

**关键词:** 图像去噪; 图像重构; Shearlet 变换; Bayesian MAP

中图分类号: V271.4; TN911 文献标志码: A 文章编号: 1671-637X(2015)04-0050-04

## Image Denoising Through Combination of Shearlet Transform and Bayesian MAP Estimation

WANG Fei<sup>1</sup>, SHI Cai-cheng<sup>2</sup>, ZHU Shi-xiang<sup>1</sup>

(1. No. 93575 Unit of PLA, Chengde 067000, China;

2. School of Life Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** Considering the shortcomings of Wavelet and Contourlet when applied to image denoising, we proposed a new method based on Shearlet transform and Bayesian MAP estimation. Firstly, the source images were decomposed into several subbands using Shearlet. Then, Bayesian MAP estimation was adopted to estimate these multi-direction subbands. Finally, the denoised image was obtained by performing the inverse Shearlet transform on the coefficients. The experimental results show that: Compared with other denoising method, this method can contains more details, and get better visual effects.

**Key words:** image denoising; image reconstruction; Shearlet transform; Bayesian MAP

### 0 引言

图像是目前人类获取信息的主要渠道之一, 然而在图像的采集、传输、存储过程中, 不可避免地会受到噪声的干扰。为提高图像质量, 尽可能获取更多有用信息, 必须对受噪声污染图像进行去噪处理, 图像去噪也成为图像处理领域的一个重要课题。

近年来, 小波理论迅速发展并广泛应用于图像去噪领域<sup>[1]</sup>。小波变换因具有良好的时频局部化性质、多分辨率性、去相关性等优异特性, 使其在图像去噪领域相对于传统图像去噪方法, 具有一定的优越性<sup>[2-3]</sup>。但是传统小波分析能有效地处理“点奇异”的函数类, 而对于含线或者面奇异的二维图像, 却不能达到最优的非线性逼近, 从而限制了其在图像处理领域的发展。为克服上述缺点, 人们提出了基于曲线波、轮廓波等

具有方向性及各向异性的多尺度分析方法, 并应用于图像去噪方法中<sup>[2-4]</sup>。文献[4-5]通过具有合成膨胀的仿射系统构造的多尺度几何变换——剪切波变换, 具有各向异性、多方向性和多分辨率特性, 是一种接近最优多维函数稀疏的表示方法, 更能体现图像的细节信息, 并且具有简单的数学结构。所有这些特性, 使之更适用于图像去噪处理。

本文通过分析 Shearlet 变换理论, 提出一种基于 Shearlet 变换的图像去噪算法。该算法首先对含噪图像进行 Shearlet 变换, 得到多方向、多尺度子带, 然后采用贝叶斯最大后验概率估计对各子带信号进行估计, 最后通过重构获得去噪图像。试验结果证明了此方法的有效性。

### 1 Shearlet 变换

具有合成膨胀的仿射系统为<sup>[4-7]</sup>

$$M_{AB}(\psi) = \{\psi_{j,l,k}(x) = |\det A|^{j/2} \psi(\mathbf{B}^l \mathbf{A}^j x - k), \\ j, l \in Z, k \in Z^2\} \quad (1)$$

收稿日期: 2014-05-21

修回日期: 2014-07-18

作者简介: 王飞(1983—), 男, 河北行唐人, 硕士, 助工, 研究方向为信号与信息处理。

式中： $\psi \in L^2(\mathbf{R}^2)$ ； $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  均为  $2 \times 2$  可逆矩阵； $|\det \mathbf{B}| = 1$ 。如果  $M_{AB}(\psi)$  满足 Parseval 框架，则这个系统的元素称作合成小波。

$$\text{设 } \mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \zeta = (\zeta_1, \zeta_2), \text{ 令 } \psi \in$$

$L^2(\mathbf{R}^2)$  满足

$$\hat{\psi}(\zeta) = \hat{\psi}(\zeta_1, \zeta_2) \hat{\psi}_1(\zeta_1) \hat{\psi}_2\left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1}\right) \quad (2)$$

式中： $\hat{\psi}$  为  $\psi$  的傅里叶变换； $\hat{\psi}_1$  为连续小波； $\text{sub } \hat{\psi}_1 \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ； $\text{sub } \hat{\psi}_2 \in [-1, 1]$ 。则剪切波基函数可定义为

$$\psi_{a,b,k}(x) = a^{-3/4} \psi(\mathbf{B}_b^{-1} \mathbf{A}_a^{-1}(x - k)) \quad (3)$$

则函数  $f$  的 Shearlet 变换为

$$f_{\text{SH}}(a, b, k) = \langle f, \psi_{a,b,k} \rangle \quad a > 0, b \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{R}^2 \quad (4)$$

本文中采用离散化 Shearlet，具体分解步骤为：

- 1) 通过拉普拉斯塔式分解，将源图像分解为低频图像  $I_0$  和各尺度高频图像  $I_l, l=1, 2, \dots, N$ ；
- 2) 对各高频子带进行二维 FFT 变换，得到各高频子带的频域参数  $FI_l, l=1, 2, \dots, N$ ；
- 3) 用剪切滤波器组对  $FI_l$  进行多向分解，对各分解系数进行二维 IFFT 变换，得到各子带系数  $S_l^k(i, j), l=1, 2, \dots, N, k=1, 2, \dots, M$ 。

更多关于 Shearlet 变换及其离散化的理论见参考文献[4-9]。

## 2 贝叶斯最大后验概率估计去噪

图像经 Shearlet 分解后，可得到各图像的低频子带  $C_0(i, j)$ ，高频子带  $D_l^k(i, j)$ 。其中： $l=1, 2, \dots, N$ ，为尺度参数； $k=1, 2, \dots, M$ ，为方向参数； $D_l^k(i, j)$  为  $k$  尺度上  $l$  方向的剪切波系数。它可分解为信号分量  $S_l^k(i, j)$  和噪声分量  $N_l^k(i, j)$  之和<sup>[10-12]</sup>，即

$$D_l^k(i, j) = S_l^k(i, j) + N_l^k(i, j) \quad (5)$$

利用 Bayesian MAP 估计信号  $S_l^k(i, j)$  的值，设估计值为  $\hat{S}_l^k(i, j)$ ，该估计值应使得以下条件风险函数最小化

$$\hat{S}_l^k(i, j) = \arg_{S_l^k(i, j)} \min \int L[S_l^k(i, j), \hat{S}_l^k(i, j)] \cdot$$

$$P_{S_l^k(i, j) | D_l^k(i, j)}(S_l^k(i, j) | D_l^k(i, j)) ds \quad (6)$$

式中： $P$  为概率密度函数； $L$  为代价函数，通常选为

$$L[S_l^k(i, j), \hat{S}_l^k(i, j)] = \begin{cases} 0 & \text{if } |S_l^k(i, j) - \hat{S}_l^k(i, j)| < \varepsilon \\ i & \text{其他} \end{cases} \quad (7)$$

则最优估计值满足

$$\hat{S}_l^k(i, j) = \arg_{S_l^k(i, j)} P_{S_l^k(i, j) | D_l^k(i, j)}(S_l^k(i, j) | D_l^k(i, j)) \quad (8)$$

根据贝叶斯定理，可得到

$$\hat{S}_l^k(i, j) = \arg_{S_l^k(i, j)} \min P_{N_l^k(i, j)}(N_l^k(i, j)) P_{S_l^k(i, j)}(S_l^k(i, j)) \quad (9)$$

式中： $P_{N_l^k(i, j)}(N_l^k(i, j))$  为噪声的概率密度函数，服从高斯分布，定义为

$$P_{N_l^k(i, j)}(N_l^k(i, j)) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma_n) \exp(-n^2/2\sigma_n^2) \quad (10)$$

$P_{S_l^k(i, j)}(S_l^k(i, j))$  为  $S_l^k(i, j)$  邻域窗口内子块信号的概率密度函数，可近似为高斯分布，定义为

$$P_{S_l^k(i, j)}(S_l^k(i, j)) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma_s) \exp(-s^2/2\sigma_s^2) \quad (11)$$

式中： $\sigma_s^2$  为每个子块信号的方差，与  $S_l^k(i, j)$  位置有关。 $\sigma_n^2$  为噪声的方差，二者统计独立，满足  $\sigma_d^2 = \sigma_s^2 + \sigma_n^2$ ， $\sigma_d^2$  为由  $S_l^k(i, j)$  决定的邻域内系数方差。 $\sigma_n$  采用下式估计<sup>[3]</sup>

$$\sigma_n = \frac{1}{0.6745} \text{median}(D_l^k(i, j)) \quad (12)$$

$\sigma_s^2$  算式为

$$\sigma_s^2 = \max(0, \sigma_d^2 - \sigma_n^2) \quad (13)$$

基于贝叶斯最大后验概率估计的系数估计值为

$$\hat{S}_l^k(i, j) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_n^2} D_l^k(i, j) \quad (14)$$

在每个子块中利用上式估计受噪声干扰前的信号值，通过逆 Shearlet 变换重构图像，实现噪声的去除。

## 3 本文算法流程

- 1) 对含噪图像进行 Shearlet 分解，得到各尺度，各方向子带系数  $D_l^k(i, j)$ 。
- 2) 对各子带按式(12)估计其噪声方差  $\sigma_n$ 。
- 3) 对于各个系数  $D_l^k(i, j)$ ，计算其一定邻域内系数方差  $\sigma_d^2$ ，本文邻域窗口大小为  $10 \times 10$ 。
- 4) 按式(13)、(14)计算各系数估计值  $\hat{S}_l^k(i, j)$ 。
- 5) 对估计系数进行逆 Shearlet 变换，重构去噪图像。

算法流程如图 1 所示。

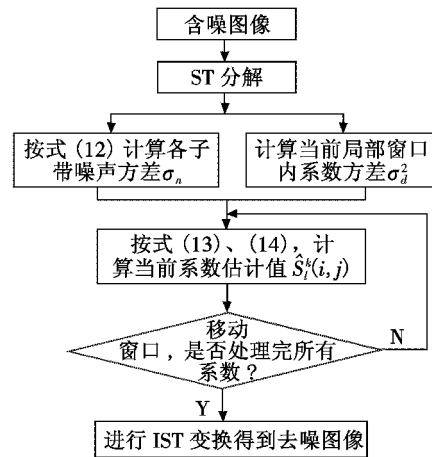


图 1 本文算法流程图

Fig. 1 Flow chart of the proposed algorithm

## 4 实验结果及分析

为验证本文算法的有效性,采用 Matlab2010 软件对三幅含噪图像进行仿真实验。图像采用标准测试图像 Barbara, Peppers, Lena 像素大小均为  $512 \times 512$ , 叠加均值为 0, 标准差分别为 10, 20, 30 的高斯白噪声进行试验。并与目前常用的基于 Wavelet 方法, 基于 Contourlet 方法以及 Shearlet 阈值法进行比较。其中: 方法 1 为基于 Wavelet 变换采用 Birge-Massart 策略软阈值法, 采用“syem4”小波基, 分解层数为 3 层; 方法 2 为基于 Contourlet 变换, K-sigma 固定阈值与循环平移相结合方法, 分解层数为 3 层; 方法 3 为基于 Shearlet 变换的软阈值法; 方法 4 为本文算法, 其中系数邻域窗口的大小及分解层数、方向数均会对去噪效果产生影响, 窗口过大会造成去噪后图像出现模糊, 并增加计算量, 窗口过小又造成去噪效果较差。经试验发现, 窗口由  $3 \times 3$  逐渐变大时, 峰值信噪比 (PSNR) 变化趋势为小 - 大 - 小, 并在  $10 \times 10$  时达到最大值。分解层数越大, 方向数越多, 去噪效果越好, 但计算量也相应增加。在分解层数为 3 层, 方向数分别为 6, 6, 10 时, 能够取得明显的去噪效果。因此, 本文中 Shearlet 变换均采用 3 层分解, 方向数分别为 6, 6, 10。实验结果如图 2 所示 (标准差为 30)。

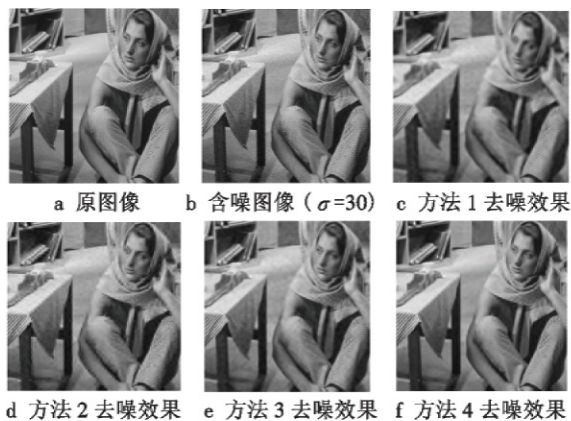


图 2 不同方法去噪效果图

Fig. 2 Denoising results of different algorithms

从视觉效果图可以看出, 小波变换方法去噪效果较差, 边缘纹理等细节部分出现较大失真, Contourlet 变换方法较之小波方法效果明显提高, 但去噪图像仍有一定程度的伪影及模糊块存在, 去噪不够彻底。基于 Shearlet 变换方法纹理特征保存较好, 失真较小, 相对于阈值法, 本文算法去噪效果平滑性更好。

为从客观上评价去噪效果, 采取 PSNR 作为衡量去噪效果的定量评价指标, PSNR 值越大, 说明去噪效果越好。各方法对三幅图像去噪效果对比如表 1 所示。

表 1 不同去噪方法 PSNR

Table 1 PSNR of different algorithms

图像	噪声方差	PSNR/dB			
		方法 1	方法 2	方法 3	方法 4
Barbara	10	74.748 9	73.052 4	73.103 2	81.015 1
	20	72.036 6	74.455 1	74.865 2	77.992 2
	30	71.090 6	77.906 5	77.490 6	76.206 2
Peppers	10	78.828 7	79.122 4	79.835 9	81.919 2
	20	76.373 9	78.246 8	77.885 6	79.411 0
	30	74.773 0	74.365 9	76.354 9	77.451 4
Lena	10	78.832 9	79.629 7	80.095 3	83.061 3
	20	76.377 0	78.336 8	77.759 4	80.157 8
	30	72.863 6	73.267 6	76.305 1	78.324 2

可以看出, 在高斯白噪声污染情况下, 对于细节纹理丰富的不同图像, 本文算法在保持图像轮廓细节的同时, 均取得了较好的去噪效果。随着噪声强度的增强, 本文算法保持了较高的 PSNR 值, 说明其抗噪声攻击能力较强。值得一提的是, 本文算法仅验证了对高斯白噪声去噪效果较为明显, 而对于其他类型噪声的去噪效果, 有待进一步探究。

## 5 结束语

Shearlet 变换在各尺度和方向上均能够接近最优地表示富含方向细节信息的图像, 因而更适用于图像去噪处理。Bayesian MAP 估计, 可从受噪声污染的图像细节系数中估计原来不受噪声影响前的系数, 且不依赖于阈值的选取。本文将二者相结合, 提出一种新的图像去噪算法。实验表明, 本文算法无论在视觉效果还是在客观评价上, 都取得较好效果。但由于其算法的复杂性, 在处理时间上较其他方法要长, 如何提高处理速度, 使之应用于实时处理中, 是接下来主要的研究方向。

## 参考文献

- [1] 成礼智, 王红霞, 罗永. 小波的理论与应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2004. (CHENG L Z, WANG H X, LUO Y. Theory and application of wavelet [M]. Beijing: Science Press, 2004.)
- [2] 雷燕, 唐文娟. 一种基于小波变换的图像去噪方法的应用研 [J]. 河南科学, 2013, 31 (1): 66-69. (LEI Y, TANG W J. Application of image denoising using wavelet transform [J]. Henan Science, 2013, 31 (1): 66-99.)
- [3] DONOHO D L. De-noising by soft-thresholding [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, 41 (3): 613-627.
- [4] GUO K H, LABATE D. Optimally sparse multi-dimensional representation using Shearlets [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2008, 39 (1): 298-318.

- [5] EASLEY G, LABATE D, LIM W Q. Sparse directional image representation using the discrete Shearlet transform[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2008, 25(1):25-46.
- [6] 冷继兵. 基于 Shearlet 变换域图像噪声混合滤波方法[J]. *电视技术*, 2013, 37(17):51-54. (LENG J B. New hybrid filtering algorithm for image noise based on Shearlet transform domain [J]. *Video Engineering*, 2013, 37(17):51-54.)
- [7] 王晓明, 冯鑫, 党建武. 基于 Shearlet 框架的多尺度去噪算法[J]. *计算机应用研究*, 2012, 29(7):2733-2736. (WANG X M, FENG X, DANG J W. Multiscale denoising algorithm based on Shearlet frame [J]. *Application Research of Computers*, 2012, 29(7):2733-2736.)
- [8] 赵艳飞. Contourlet 变换在图像处理中的应用研究[D]. 合肥:安徽大学, 2007. (ZHAO Y F. Research on Contourlet transform and its application to image processing [D]. Hefei: Anhui University, 2007.)
- [9] 徐华南, 刘哲, 胡钢. Contourlet 变换及其在图像去噪中的应用研究[J]. *计算机应用研究*, 2009, 26(2):401-405. (XU H N, LIU Z, HU G. Research on Contourlet transform and its application to image denoising [J]. *Application Research of Computers*, 2009, 26(2):401-405.)
- [10] 方红, 王年, 章权兵. 基于稀疏贝叶斯学习的图像重建方法[J]. *中国图象图形学报*, 2009, 14(6):1502-1509. (FANG H, WANG N, ZHANG Q B. Approach of image reconstruction based on sparse Bayesian learning [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2009, 14(6):1502-1509.)
- [11] 杨国梁, 雷松泽. 基于贝叶斯估计自适应软硬折衷阈值 Curvelet 图像去噪技术[J]. *西安工程大学学报*, 2011, 25(6):857-861. (YANG G L, LEI S Z. Image denoising based on adaptive compromise threshold by Bayesian estimation using Curvelet transform [J]. *Journal of Xi'an Polytechnic University*, 2011, 25(6):857-861.)
- [12] 丁灿, 曲长文, 杨俭. 基于贝叶斯估计的改进 Contourlet 变换的 SAR 图像滤波[J]. *数据采集与处理*, 2013, 28(6):746-754. (DING C, QU C W, YANG J. Improved denoising method of Contourlet of SAR image based on Bayesian estimation [J]. *Journal of Data Acquisition and Processing*, 2013, 28(6):746-754.)
- (上接第 35 页)
- 小目标检测方法[J]. *红外与激光工程*, 2005, 34(2):208-211. (LI J C, SHEN Z K, LI Q H. Detection of moving and weak target in heavy clutter background [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2005, 34(2):208-211.)
- [2] ZHANG B Y, ZHANG T X, CAO Z G, et al. Fast new small target detection algorithm based on a modified partial differential equation in infrared clutter [J]. *Optical Engineering*, 2007, 46(10):1-6.
- [3] KHAN J F, ALAM M S. Target detection in cluttered FLIR imagery using probabilistic neural network [C]//*Proceedings of SPIE, Automatic Target Recognition XV*, 2005, 5807:55-66.
- [4] ZHANG Y, XIONG M T, WU Q Z. Evaluation of dim target detection and tracking algorithms [C]//*The 4th International Symposium on Advanced Optical Manufacturing and Testing Technologies: Optical Test and Measurement Technology and Equipment, Proceedings of SPIE*, 2009, 7283:1-6.
- [5] 马文伟, 赵永强, 张国华, 等. 基于多结构元素形态滤波与自适应阈值分割相结合的红外弱小目标检测[J]. *光子学报*, 2011, 40(7):1020-1024. (MA W W, ZHAO Y Q, ZHANG G H, et al. Infrared dim target detection based on multi-structural element morphological filter combined with adaptive threshold segmentation [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2011, 40(7):1020-1024.)
- [6] 赵小明, 袁胜春, 马晓丽, 等. 基于移动式管道滤波的红外小目标检测方法研究[J]. *红外技术*, 2009, 31(5):294-297. (ZHAO X M, YUAN S C, MA X L, et al. Research on infrared small target detection technique based on moving pipeline filtering [J]. *Infrared Technology*, 2009, 31(5):294-297.)
- [7] GONZALEZ R C, WOOD R E. 数字图像处理[M]. 阮秋琦, 阮宇智, 译. 3 版. 北京:电子工业出版社, 2013. (GONZALEZ R C, WOOD R E. *Digital image processing* [M]. Translated by RUAN Q Q, RUAN Y Z. 3rd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2013.)
- [8] WANG Y, ZHEN Q B, ZHANG J P. Real-time detection of small target in IR grey image based on mathematical morphology [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2003, 32(1):28-31.
- [9] 张慧燕, 吴顺君. 自适应门限下杂波恒虚警算法[J]. *西安电子科技大学学报:自然科学版*, 2000, 27(1):105-109. (ZHANG H Y, WU S J. Theoretic study of the CFAR algorithm clutters with a self-adaptive threshold [J]. *Journal of Xidian University: Natural Science Edition*, 2000, 27(1):105-109.)
- [10] SHECHTMAN E, IRANI M. Matching local self-similarities across images and videos [C]//*IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2007:1-8.