

基于简化平方根容积卡尔曼滤波的跟踪算法

戴定成, 蔡宗平, 牛 创

(第二炮兵工程大学自动化系, 西安 710025)

摘要: 目标跟踪的模型通常可表示为一个线性的状态方程与一个非线性的观测方程, 为提高平方根容积卡尔曼滤波(SCKF)算法的跟踪精度和实时性, 提出了一种简化的平方根容积卡尔曼滤波(RSCKF)算法。简化算法在时间更新环节, 直接利用状态转移矩阵计算状态变量以及协方差矩阵的一步预测值, 避免了原算法中采用一组容积点近似计算的复杂过程, 推导证明, 简化后的算法其时间更新环节与卡尔曼滤波的一步预测结果一致。最后对两种算法进行了计算复杂度比较以及角跟踪仿真实验。实验结果表明, 简化的算法能够降低运算时间并提高跟踪精度。

关键词: 目标跟踪; 平方根容积卡尔曼滤波; 实时性; 非线性系统

中图分类号: V271.4; TP391 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-637X(2015)03-0011-04

Target Tracking Algorithm Based on Reduced Square-Root Cubature Kalman Filter

DAI Ding-cheng, CAI Zong-ping, NIU Chuang

(Department of Automation, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

Abstract: Considering the fact that the target tracking problems are always modeled by a linear system equation and a non-linear measurement equation, we proposed a Reduced Square-root Cubature Kalman Filter (RSCKF) to improve the estimation accuracy and the real-time performance. The simplified algorithm utilizes state transition matrix to calculate one-step prediction value of state variable and covariance matrix in time update step, which avoids the complex process of the original algorithm. According to theoretical derivation, the value of time update step in the simplified SCKF is the same as that of the one-step prediction of the Kalman filter. Finally, the two algorithms were used in bearing-only tracking experiment, and the complexity was analyzed quantitatively. Simulation results show that the new algorithm can reduce the operation time effectively and improve the tracking accuracy.

Key words: target tracking; square-root cubature Kalman filter; real time performance; non-linear system

0 引言

机动目标的跟踪在军事和民用领域有着广泛的应用^[1], 如何提高目标跟踪的实时性和精确性是历来研究的热点。通常, 目标的动态模型是在笛卡尔坐标系下建模, 状态方程为线性, 而目标的观测模型则常用极坐标建模, 观测方程一般为非线性^[2]。对于整个目标跟踪系统来说, 其模型依然是非线性的, 因此目标跟踪也是一种非线性滤波的问题。

扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman Filter, EKF)

是处理非线性估计问题的经典方法^[3-4], 但是该方法线性化误差较大, 只适用于弱非线性问题, 对于强非线性问题容易出现滤波发散。针对这个情况, 文献[5-6]提出了无迹卡尔曼滤波(Unscented Kalman Filter, UKF)。UKF通过选取一组确定的Sigma点来逼近随机变量的分布函数, 从而避免了EKF所出现的局部线性化误差。然而, 对于三维以上的高维状态估计, UKF必须仔细调节参数以避免滤波精度降低的问题。最近, Arasaratnam和Haykin提出了一种新的非线性滤波方法——容积卡尔曼滤波^[7](Cubature Kalman Filter, CKF), 其核心是基于三阶球面-径向容积准则的概率积分, 通过一组等权值的容积点来替代复杂的积分运算, 为了避免复杂的矩阵求逆和分解运算, 两位学者提出了滤波精度和稳定性更高的平方根容积卡尔曼滤波

收稿日期: 2014-05-07 修回日期: 2014-12-26

基金项目: 国家自然科学基金(61203007)

作者简介: 戴定成(1991—), 男, 湖北麻城人, 硕士生, 研究方向为雷达目标跟踪。

(Square-root Cubature Kalman Filter, SCKF) 算法。

本文利用目标跟踪模型的状态方程是线性的特点,通过状态转移矩阵直接求取状态变量以及协方差矩阵的一步预测值,替代了原算法采用 $2n$ 个容积点进行加权求和的过程,简化了算法的时间更新环节,理论推导的结果显示,简化算法的时间更新环节与卡尔曼滤波算法的一步预测结果一致。最后通过计算复杂度的定量比较以及角跟踪模型的仿真实验,验证了算法的有效性。

1 简化的平方根容积卡尔曼滤波

考虑如下的非线性系统

$$\mathbf{x}_k = \Phi \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma \mathbf{v}_{k-1} \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \quad (2)$$

式中: $\Phi \in \mathbf{R}^{n \times n}$, 为线性的状态转移矩阵; $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$, 为系统状态; $h(\cdot)$ 为非线性函数; \mathbf{v}_{k-1} 和 \mathbf{w}_k 为相互独立的服从高斯分布的零均值噪声, 其方差分别为 \mathbf{Q}_{k-1} 和 \mathbf{R}_k 。

1.1 平方根容积卡尔曼滤波

首先根据系统状态维数计算容积点和权值, 即

$$\begin{cases} \xi_j = \sqrt{\frac{m}{2}} [1]_j \\ \omega_j = \frac{1}{m} \quad j=1, 2, \dots, n, \quad m=2n \end{cases} \quad (3)$$

式中, $[1] = [I, -I]$, I 为单位阵。SCKF 的算法步骤如下所述。

1) 时间更新。

$$\mathbf{S}_{k-1} = \text{chol}(\mathbf{P}_{k-1}) \quad (4)$$

$$\mathbf{X}_{j,k-1} = \mathbf{S}_{k-1} \xi_j + \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (5)$$

$$\mathbf{X}_{j,k}^* = \Phi \mathbf{X}_{j,k-1} \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \sum_{i=1}^m \omega_i \mathbf{X}_{i,k}^* \quad (7)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_k^T = \text{Tria}([\chi_{k|k-1}^*, \mathbf{S}_{Q,k-1}])^T \quad (8)$$

式中, Tria 为对矩阵进行 QR 分解运算。

$$\chi_{k|k-1}^* = \frac{1}{\sqrt{m}} [\mathbf{X}_{1,k}^* - \bar{\mathbf{x}}_k \quad \mathbf{X}_{2,k}^* - \bar{\mathbf{x}}_k \quad \dots \quad \mathbf{X}_{m,k}^* - \bar{\mathbf{x}}_k] \quad (9)$$

$$\mathbf{Q}_{k-1} = \mathbf{S}_{Q,k-1} \mathbf{S}_{Q,k-1}^T \quad (10)$$

2) 量测更新。

$$\mathbf{X}_{j,k} = \bar{\mathbf{S}}_k \xi_j + \bar{\mathbf{x}}_k \quad (11)$$

$$\mathbf{Z}_{j,k} = h(\mathbf{X}_{j,k}) \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{z}}_k = \sum_{i=1}^m \omega_i \mathbf{Z}_{i,k} \quad (13)$$

$$\mathbf{S}_{R,k} = \text{Tria}([\gamma_k \quad \mathbf{S}_{R,k}]) \quad (14)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{m}} [\mathbf{Z}_{1,k} - \bar{\mathbf{z}}_k \quad \mathbf{Z}_{2,k} - \bar{\mathbf{z}}_k \quad \dots \quad \mathbf{Z}_{m,k} - \bar{\mathbf{z}}_k] \quad (15)$$

$$\mathbf{R}_{k-1} = \mathbf{S}_{R,k} \mathbf{S}_{R,k}^T \quad (16)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x},k|k-1} = \chi_k \gamma_k^T \quad (17)$$

$$\chi_k = \frac{1}{\sqrt{m}} [\mathbf{X}_{1,k} - \bar{\mathbf{x}}_k \quad \mathbf{X}_{2,k} - \bar{\mathbf{x}}_k \quad \dots \quad \mathbf{X}_{m,k} - \bar{\mathbf{x}}_k] \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_k = (\mathbf{P}_{\mathbf{x},k} / \mathbf{S}_{\mathbf{x},k}^T) / \mathbf{S}_{\mathbf{z},k} \quad (19)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \bar{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \bar{\mathbf{z}}_k) \quad (20)$$

$$\mathbf{S}_k = \text{Tria}([\chi_k - \mathbf{K}_k \gamma_k \quad \mathbf{K}_k \mathbf{S}_{R,k}]) \quad (21)$$

1.2 简化的平方根容积卡尔曼滤波

考虑到系统的状态方程为线性, 对 SCKF 的时间更新环节进行简化, 推导过程如下所述。

将式(5)、式(6)代入式(7)中, 有 $\bar{\mathbf{x}}_k = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Phi \mathbf{X}_{i,k} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Phi (\mathbf{S}_{k-1} \xi_i + \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Phi \mathbf{S}_{k-1} \xi_i + \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1} = \frac{1}{m} \Phi \mathbf{S}_{k-1} \sum_{i=1}^m \xi_i + \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$; 根据式(3)可知, $\sum_{i=1}^m \xi_i = 0$, 所以上式可化作

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (22)$$

根据 QR 分解的定义, 式(8)可表示为

$$[\chi_{k|k-1}^*, \mathbf{S}_{Q,k-1}]^T = \mathbf{H} \bar{\mathbf{S}}_k^T \quad (23)$$

式中, \mathbf{H} 为 Hermite 矩阵, 满足 $\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{I}$, 记 $\mathbf{L} = [\chi_{k|k-1}^*, \mathbf{S}_{Q,k-1}]^T$, 于是有

$$\mathbf{L}^T \mathbf{L} = (\mathbf{H} \bar{\mathbf{S}}_k^T)^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{S}}_k^T = \bar{\mathbf{S}}_k \mathbf{H}^T \mathbf{H} \bar{\mathbf{S}}_k^T = \bar{\mathbf{S}}_k \bar{\mathbf{S}}_k^T \quad (24)$$

记 $\bar{\mathbf{P}}_k = \bar{\mathbf{S}}_k^T \bar{\mathbf{S}}_k$ 。再考虑式(24)的左边部分

$$\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \chi_{k|k-1}^* \chi_{k|k-1}^{*T} + \mathbf{S}_{Q,k-1} \mathbf{S}_{Q,k-1}^T \quad (25)$$

将式(9)、式(10)代入式(25)中, 有

$$\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\mathbf{X}_{i,k}^* - \bar{\mathbf{x}}_k) (\mathbf{X}_{i,k}^* - \bar{\mathbf{x}}_k)^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (26)$$

根据式(22)和式(5)、式(6), 上式可化为

$$\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Phi (\mathbf{X}_{i,k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) (\mathbf{X}_{i,k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1})^T \Phi^T + \mathbf{Q}_{k-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Phi \mathbf{S}_{k-1} \xi_i \xi_i^T \mathbf{S}_{k-1}^T \Phi^T + \mathbf{Q}_{k-1} = \Phi \mathbf{S}_{k-1}^T \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \xi_i \xi_i^T \right) \mathbf{S}_{k-1} \Phi^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (27)$$

记 $\mathbf{P}_{k-1} = \mathbf{S}_{k-1} \mathbf{S}_{k-1}^T$, 根据式(3)知, $\sum_{i=1}^m \xi_i \xi_i^T = m\mathbf{I}$, 因此上式可化为

$$\mathbf{L}^T \mathbf{L} = \Phi \mathbf{P}_{k-1} \Phi^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (28)$$

再结合式(24), 上式可表示为

$$\bar{\mathbf{P}}_k = \Phi \mathbf{P}_{k-1} \Phi^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (29)$$

观测式(22)和式(29)可以发现, 这两步与 KF 算法中的一步状态预测一致。因此简化的 SCKF 算法步骤可以如下表示。

1) 时间更新。

$$\bar{\mathbf{x}}_k = \Phi \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \quad (30)$$

$$\bar{P}_k = \Phi P_{k-1} \Phi^T + Q_{k-1} \quad (31)$$

$$\bar{S}_k = chol(\bar{P}_k) \quad (32)$$

2) 量测更新。

计算式(11)~式(21),然后计算

$$P_{k|k} = S_k S_k^T \quad (33)$$

1.3 计算复杂度比较

由于两种算法的量测更新差别不大,主要对时间更新过程进行定量分析,假设矩阵乘积运算时间为 m_1 ,加减运算时间为 m_2 ,矩阵分解运算时间为 m_3 ,系统状态为 n 维,则 SCKF 算法的时间更新运算时间可表示为

$$T_{SCKF} = n(2m_1 + 5m_2 + 2m_3) \quad (34)$$

考虑到 RSCKF 算法在量测更新后又进行了一次矩阵乘积运算,将此次运算时间一并加入时间更新的时间内进行比较

$$T_{RSCKF} = 3m_1 + m_2 + m_3 \quad (35)$$

上面的运算均不考虑矩阵转置以及分解运算后取非零方阵的时间。从式(29)、式(30)可以看出,SCKF 算法的计算复杂度要大于 RSCKF 算法,而且 SCKF 算法的时间更新运算时间与状态维数有密切联系,这是因为在 SCKF 算法中需要用 $2n$ 个容积点来近似计算高斯加权积分。

2 仿真分析

角测量跟踪 (Bearing-Only Tracking, BOT) 是雷达目标跟踪中常用的模型^[8-9],也是检验非线性滤波方法的一种常用实验模型。BOT 模型的观测方程为

$$\mathbf{x}_k = \Phi \mathbf{x}_{k-1} + \Gamma \mathbf{v}_{k-1} \quad (36)$$

$$z_k = \arctan(s_y/s_x) + \mathbf{w}_k \quad (37)$$

式中: $\mathbf{x}_k = (s_x, v_x, s_y, v_y)^T$,代表目标在笛卡尔坐标系下机动的位置和速度分量;观测值为方位角; T 为采样间隔; N 为采样时间;

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \Gamma = \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (38)$$

状态噪声和观测噪声服从零均值高斯分布,方差分别为: $R = 0.001^2$, $Q = \text{diag}(0.0005^2, 0.0005^2)$, $T = 1$ s, $N = 50$ s。设定系统的初始状态为 $\mathbf{x}_0 = (-0.05, 0.001, 0.7, -0.055)^T$,初始协方差矩阵 $P_{0|0} = \text{diag}(0.1^2, 0.005^2, 0.1^2, 0.01^2)$,假设滤波估计值与初始状态 \mathbf{x}_0 一致,用 UKF 算法,SCKF 算法与 RSCKF 算法进行对比仿真,目标运动的轨迹如图 1 所示。

采用均方根误差^[10] (Root Mean Square Error, RMSE) 评价算法性能,进行 200 次蒙特卡罗仿真,结果见图 2。

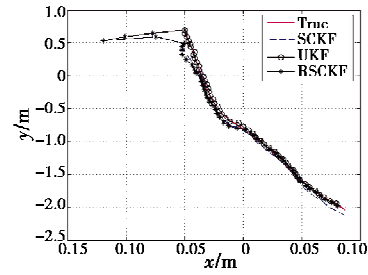


图 1 目标跟踪轨迹

Fig. 1 Tracking trajectory

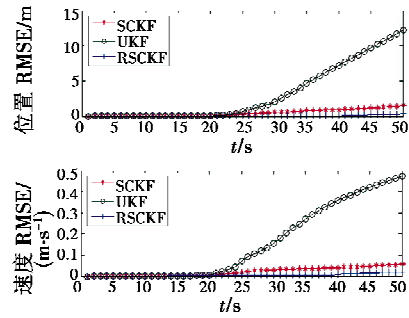


图 2 目标跟踪的均方根误差比较曲线

Fig. 2 RMSE of target tracking

可以看出,SCKF 与 RSCKF 的性能相近,并明显优于 UKF 算法。为进一步比较 SCKF 与 RSCKF 的性能,将图 2 中的 SCKF 和 RSCKF 的 RMSE 进行单独比较,结果如图 3 所示。

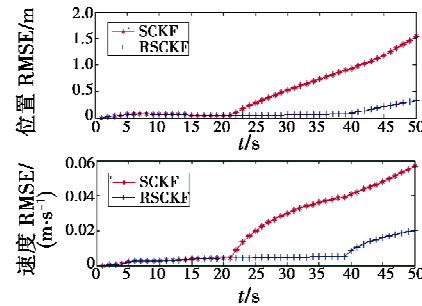


图 3 SCKF 算法与 RSCKF 算法的均方根误差

Fig. 3 RMSE of SCKF and RSCKF

为量化分析 3 种算法的滤波性能,进一步计算 RMSE 的方差和均值并取自然对数,结果如表 1 所示。

表 1 算法性能比较(取自然对数)

Table 1 Performance comparison of two algorithms (natural logarithm)

滤波器	位置 RMSE/m		速度 RMSE/(m·s ⁻¹)	
	均值	方差	均值	方差
UKF	1.149 2	2.773 4	-1.849 9	-3.511 6
SCKF	-0.734 4	-1.483 3	-3.809 0	-7.918 8
RSCKF	-2.408 3	-5.188 2	-5.059 3	-10.460 5

由表 1 可以看出,RSCKF 算法在目标跟踪应用中,性能要优于 SCKF 和 UKF。根据前文的推导,理论上 RSCKF 与 SCKF 的精度应该一致,之所以出现 RSCKF 算法的精度略高的情况,是由于 SCKF 算法步骤中存

在着多次矩阵分解运算,容易引入一定的计算机截断误差,而简化的算法由于结构更简单,因此在滤波精度上要稍高于 SCKF 算法。

3 结 论

本文通过对目标跟踪的模型进行分析,针对系统模型的状态方程为线性的情况,对 SCKF 算法的时间更新过程进行了简化推导,简化后的时间更新过程与 KF 算法的一步预测过程一致。计算复杂度对比表明,简化算法的运算成本要明显低于 SCKF 算法。利用角测量跟踪实验检验算法性能,并与 UKF 算法以及 SCKF 算法进行对比。仿真结果表明,SCKF 算法的滤波精度要明显优于 UKF 算法,由于计算机截断误差的存在,RSCKF 算法的跟踪精度以及滤波稳定性也要稍好于 SCKF 算法。由于目标跟踪模型的状态方程基本都是线性,因此,RSCKF 算法还可拓展应用到交互式多模型等目标跟踪算法中。

参 考 文 献

- [1] 石勇,韩崇昭. 自适应 UKF 算法在目标跟踪中的应用[J]. 自动化学报,2011,37(6):755-759. (SHI Y, HAN C Z. Adaptive UKF method with applications to target tracking[J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(6):755-759.)
- [2] MOHAMMED D, ABDELKRIM M, MOKHTAR K, et al. Reduced cubature Kalman filtering applied to target tracking [C]// The 2nd International Conference Control, Instrumentation and Automation (ICCIA), Shiraz; IEEE, 2011: 1097-1101.
- [3] SUNAHARA Y, YAMASHITA K. An approximate method of state estimation for non-linear dynamic systems with state-dependent noise[J]. International Journal of Control, 1970, 11(6):957-972.
- [4] BUCY R S, SENNE K D. Digital synthesis of non-linear filters [J]. Automatica, 1971, 7(3):287-298.
- [5] JULIER S J, UHLMANN J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems[C]//Proceedings of AeroSense: The 11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls, Orlando; SPIE, 1997:182-193.
- [6] JULIER S J, UHLMANN J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proceedings of the IEEE, 2004, 92(3):401-422.
- [7] ARASARATNAM I, HAYKIN S. Cubature Kalman filters [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6):1254-1269.
- [8] 张鑫春,郭承军. 均方根嵌入式容积卡尔曼滤波[J]. 控制理论与应用,2013,30(9):1116-1121. (ZHANG X C, GUO C J. Square-root imbedded cubature Kalman filtering [J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(9):1116-1121.)
- [9] ZHANG X C, GUO C J. Cubature Kalman filters: Derivation and extension[J]. Chinese Physics B, 2013, 22(12):501-506.
- [10] 张俊根,姬红兵. IMM 迭代扩展卡尔曼粒子滤波跟踪算法[J]. 电子与信息学报,2010,32(5):1116-1120. (ZHANG J G, JI H B. IMM iterated extended Kalman particle filter based target tracking [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2010, 32(5):1116-1120.)
- (上接第 10 页)
- Astronautics, 2009, 30(3):1052-1056.)
- [3] 曲萍萍,周获. 考虑导弹自动驾驶仪二阶动态特性的三维导引律[J]. 航空学报,2011,32(11):2096-2105. (QU P P, ZHOU D. Three-dimensional guidance law accounting for second-order dynamics of missile autopilot [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(11):2096-2105.)
- [4] 曲萍萍,周获. 考虑导弹自动驾驶仪二阶动态特性的导引律[J]. 系统工程与电子技术,2011,33(10):2263-2267. (QU P P, ZHOU D. Guidance law incorporating second-order dynamics of missile autopilots [J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(10):2263-2267.)
- [5] HU W, WANG J, LI X. An approach of partial control design for system control and synchronization [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2009, 39(3):1410-1417.
- [6] LAZAREVIC M. Further results on finite time partial stability of fractional order time delay systems [C]//The 6th Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, Part I, 2013:155-160.
- [7] CHELLABOINA V S, HADDAD W M. A unification between partial stability and stability theory for time-varying systems [J]. IEEE Control Systems Magazine, 2002, 22(6):66-75.
- [8] BINAZADEH T, YAZDANPANAH M J. Partial stabilization of uncertain nonlinear systems [J]. ISA Transactions, 2012, 51(2):298-303.
- [9] SHAFIEI M H, BINAZADEH T. Partial stabilization-based guidance [J]. ISA Transactions, 2012, 51(1):141-145.
- [10] SHAFIEI M H, BINAZADEH T. Application of partial sliding mode in guidance problem [J]. ISA Transactions, 2013, 52(2):192-197.
- [11] 李士勇,章钱. 智能制导——寻的导弹智能自适应导引律[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011:53-56. (LI S Y, ZHANG Q. Intelligent guidance—intelligent adaptive guidance laws for homing missile [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2011:53-56.)