

## 基于2D-Unitary ESPRIT算法的DOA估计新方法

张爱丽<sup>1a,2</sup>, 刘团宁<sup>1a,2</sup>, 李思嘉<sup>1b</sup>, 孙茂泽<sup>1a,2</sup>

(1. 河南师范大学, a. 计算机与信息工程学院; b. 物理与电子工程学院, 河南 新乡 453007;

2. 河南省高校计算机智能与数据挖掘工程技术研究中心, 河南 新乡 453007)

**摘要:** 提出了一种基于2D-Unitary ESPRIT算法的六角星形阵列波达方向(DOA)估计方案。利用星形阵列子阵列的多种平移不变性,将子阵列两两组合,采用2D-Unitary ESPRIT算法分别对每种组合进行估计,获取了DOA估计的候选集,然后运用2D-MUSIC算法的功率谱函数在候选集中对DOA进行最优估计,得出DOA的最优估值,并进行了仿真实验。该方案避免了由2D-MUSIC算法因谱峰搜索而带来的庞大计算成本,且多种平移不变子阵列组合的运用减小了DOA估计误差。仿真表明,此方案与传统2D-Unitary ESPRIT算法相比,减小了估计值的均方根误差,提高了空间分辨率。

**关键词:** DOA估计; 二维; Unitary ESPRIT算法; 六角星形阵列; 多重信号分类算法

**中图分类号:** TN911.23 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-637X(2015)11-0067-05

## A New Method of DOA Estimation Based on 2D-Unitary ESPRIT Algorithm

ZHANG Ai-li<sup>1a,2</sup>, LIU Tuan-ning<sup>1a,2</sup>, LI Si-jia<sup>1b</sup>, SUN Mao-ze<sup>1a,2</sup>

(1. Henan Normal University, a. College of Computer and Information Engineering; b. College of Physics and Electronic

Engineering, Xinxiang 453007, China; 2. Computational Intelligence and Data Mining Engineering Technology Research

Center of Colleges and Universities in Henan Province, Xinxiang 453007, China)

**Abstract:** A DOA (Direction of Arrival) estimation method based on 2D-Unitary ESPRIT algorithm with hexangular star array is proposed. The multiple translation invariance of subarrays from hexangular star array is used to form combinations of each two set of subarrays. 2D-Unitary ESPRIT algorithm is used to respectively estimate every combination, obtaining the candidate set of DOA estimation; then the power spectral function of 2D-MUSIC algorithm is adopted for optimization estimation of DOA in the candidate set, obtaining the optimized estimated value of DOA. Simulation experiment is conducted. The proposed method avoids the huge computational cost caused by spectral peak search of 2D-MUSIC algorithm, and DOA estimation error is reduced by applying combinations of multiple translation invariance subarrays. The simulation shows that: Compared with the traditional 2D-Unitary ESPRIT algorithm, the proposed method can reduce the mean square root error of estimated value and improve the spatial resolution.

**Key words:** DOA estimation; two-dimension; Unitary ESPRIT; hexangular star array; MUSIC

### 0 引言

波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计是智能

天线的主要研究方向之一,目前流行的DOA估计算法主要有多重信号分类算法(Multiple Signal Classification, MUSIC)<sup>[1]</sup>和估计信号参数的旋转不变技术算法(Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT)<sup>[2]</sup>。其中:MUSIC算法具有很高的分辨率、估计精度和稳定性,但该算法需要谱峰搜索,时间复杂度较高<sup>[3-4]</sup>;ESPRIT算法不需要谱峰搜索,相对于MUSIC算法时间复杂度较低,其主要利用阵列几何结构存在平移不变性,使得数据协方差矩阵

收稿日期:2015-02-10

修回日期:2015-03-20

**基金项目:**国家自然科学基金(U1204606);河南省教育厅科学技术研究重点项目(13A510533);河南师范大学大学生创新创业训练计划项目(20130012)

**作者简介:**张爱丽(1966—),女,河南滑县人,学士,教授,硕导,研究方向为信号处理,通信与网络。

的信号子空间存在旋转不变性。Unitary-ESPRIT 算法<sup>[5]</sup>是 ESPRIT 算法的改进,它将复数运算转化为实数运算,简化了计算复杂度。2D-MUSIC 算法<sup>[6]</sup>和 2D-ESPRIT 算法<sup>[7-8]</sup>均可实现无偏估计,2D-MUSIC 算法需要二维的谱峰搜索,过高的时间复杂度限制了其应用。2D-Unitary ESPRIT 算法<sup>[9-11]</sup>不需要谱峰搜索,计算量大大减少,相对于 2D-MUSIC 算法,优势更加明显。考虑到中心对称阵形适合采用 2D-Unitary ESPRIT 算法,提出了一种基于多组子阵列 2D-Unitary ESPRIT 算法的 DOA 估计方案,阵形为六角星形阵列结构,在空间谱估计中的应用,可实现  $0^\circ \sim 360^\circ$  的全方位角和  $0^\circ \sim 90^\circ$  俯仰角的 DOA 无偏估计,有效提高估计精度和阵元的利用率。

本文提出的方法主要分为两个步骤:首先利用星形阵列子阵列的 3 种平移不变性,将子阵列两两组合,每种组合分别采用 2D-Unitary ESPRIT 算法进行估计,将获取的三组 DOA 估值放入 DOA 候选集中;其次运用 2D-MUSIC 算法的功率谱函数得到 DOA 最优估值。最后进行了仿真实验,仿真结果验证了该方法的有效性。

## 1 星形阵列的信号模型

星形阵列由  $M = 13$  个阵元组成,阵元呈六角星形排列,如图 1 所示,相邻阵元间距  $d = \lambda/2$  ( $\lambda$  为波长)。

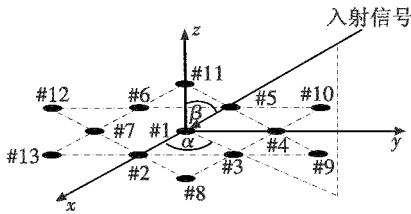


图 1 星形阵列模型

Fig. 1 The model of hexangular star array

假设  $N$  ( $N < M$ ) 个中心频率相同的远场信号入射该阵列,设方位角为  $\alpha_i$ ,  $\alpha_i \in [0, 2\pi]$ , 俯仰角为  $\beta_i$ ,  $\beta_i \in [0, \pi/2]$ , 其中,  $i = 1, 2, \dots, N$ 。  $M$  维阵列的方向向量为

$$\mathbf{a}(\alpha_i, \beta_i) = (1, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_i\cos\alpha_i}, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_i\cos(\alpha_i - \frac{\pi}{3})}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_i\cos(\alpha_i - \frac{2\pi}{3})}, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_i\cos(\alpha_i - \frac{\pi}{6})}, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_i\cos(\alpha_i - \frac{\pi}{2})}, \dots, e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_i\cos(\alpha_i - \frac{5\pi}{6})})^T \quad (1)$$

$\mathbf{a}(\alpha_i, \beta_i)$  是第  $i$  个信号对应的阵列导向矢量,其中  $i = 1, \dots, N$ , 设一个  $M \times N$  维的矩阵  $\mathbf{A}$  为阵列的导向矩阵,定义如下

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}(\alpha_1, \beta_1) \quad \mathbf{a}(\alpha_2, \beta_2) \quad \dots \quad \mathbf{a}(\alpha_N, \beta_N)) \quad (2)$$

如图 1 所示,阵列接收的信号为

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}(\alpha_i, \beta_i) s_i(t) + \mathbf{N}(t) \quad (3)$$

式中,  $s_i(t)$  表示第  $i$  个人射信号矢量。将式(3)写成矩阵形式

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (4)$$

式中:  $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \dots, \mathbf{x}_M(t))^T$  为阵列的接收信号矢量;  $\mathbf{S}(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t))^T$  为入射信号矢量;  $\mathbf{N}(t) = (\mathbf{n}_1(t), \mathbf{n}_2(t), \dots, \mathbf{n}_M(t))$  为高斯白噪声矢量。

假设信号与噪声之间、信号与信号之间以及噪声与噪声之间均不相干,即  $\forall i, j$  有  $\mathbf{E}[s_i, n_j] = 0$ ,  $i \neq j$  时,  $\mathbf{E}[s_i, s_j] = 0$ ,  $\mathbf{E}[n_i, n_j] = 0$ , 则阵列的输出相关矩阵为

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{E}[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] = \mathbf{A}\mathbf{R}_{ss}\mathbf{A}^H + \mathbf{R}_{nn} \quad (5)$$

式中:  $\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{E}[\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)]$  为入射信号自相关矩阵;  $\mathbf{R}_{nn} = \mathbf{E}[\mathbf{N}(t)\mathbf{N}^H(t)]$  为噪声自相关矩阵, 则  $\mathbf{R}_{nn} = \sigma_n^2 \mathbf{I}_M$ 。入射信号的自相关矩阵  $\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{E}[s(t)s^H(t)] = \text{diag}\{\mathbf{E}[|s_1(t)|^2], \mathbf{E}[|s_2(t)|^2], \dots, \mathbf{E}[|s_N(t)|^2]\}$ , 对  $\mathbf{R}_{xx}$  进行特征值分解

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{E}_s \mathbf{\Gamma}_s \mathbf{E}_s^H + \mathbf{E}_n \mathbf{\Gamma}_n \mathbf{E}_n^H \quad (6)$$

式中:  $\mathbf{E}_s = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N)$  是信号子空间,  $\mathbf{E}_n = (\mathbf{e}_{N+1}, \mathbf{e}_{N+2}, \dots, \mathbf{e}_M)$  为噪声子空间;  $\mathbf{\Gamma}_s$  和  $\mathbf{\Gamma}_n$  为对角阵,  $\mathbf{\Gamma}_s$  的对角元素为  $\mathbf{R}_{xx}$  的特征值由大到小的排列, 而  $\mathbf{\Gamma}_n$  的对角元素为噪声的功率  $\sigma_n^2$ 。

实际计算中,由快拍数为  $K$  的接收信号  $\mathbf{X}(t_k)$  的均值估算出  $\mathbf{R}_{xx}$ , 记为

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{X}(t_k)\mathbf{X}^H(t_k) \quad (7)$$

且有

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \hat{\mathbf{E}}_s \hat{\mathbf{\Gamma}}_s \hat{\mathbf{E}}_s^H + \hat{\mathbf{E}}_n \hat{\mathbf{\Gamma}}_n \hat{\mathbf{E}}_n^H \quad (8)$$

是接收信号协方差矩阵的特征值分解,根据式(8)计算出的特征值求出最小特征值的重数,用  $M$  减去最小特征值的重数,得到来波数目  $N$  的估值。

## 2 2D-Unitary ESPRIT 算法在六角星形阵列中的估计方案

文献[7]是 2D-Unitary ESPRIT 算法在矩形阵列中的 DOA 估计,仅采用一组子阵列的组合进行 DOA 估计,对垂直于平移轴方向的来波估计精度较高,阵列孔径也最大,但是随着来波与平移轴夹角的减小,阵列孔径变小,估计精度也相对变低。本文采用不同方向平移轴子阵列组合进行估计,使估计精度对全方位角的来波均能产生较好的估计效果。

### 2.1 基于多组子阵列的 2D-Unitary ESPRIT 算法

图 2 所示为六角星形阵列的 3 种平移不变子阵列,平移轴与  $x$  轴夹角分别为  $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ , 其中,圆形阵元是子阵列 1 中的元素,方形阵元是子阵列 2 中的元素,方形圆形重合的阵元是两个子阵列重叠的元素,设  $\mathbf{J}_{i,1}$  和  $\mathbf{J}_{i,2}$ ,  $i = 1, 2, 3$  为阵列的选择矩阵,由  $\mathbf{J}_{i,1}$  和  $\mathbf{J}_{i,2}$  对原阵列进行选择得到 3 组平移不变子阵列。

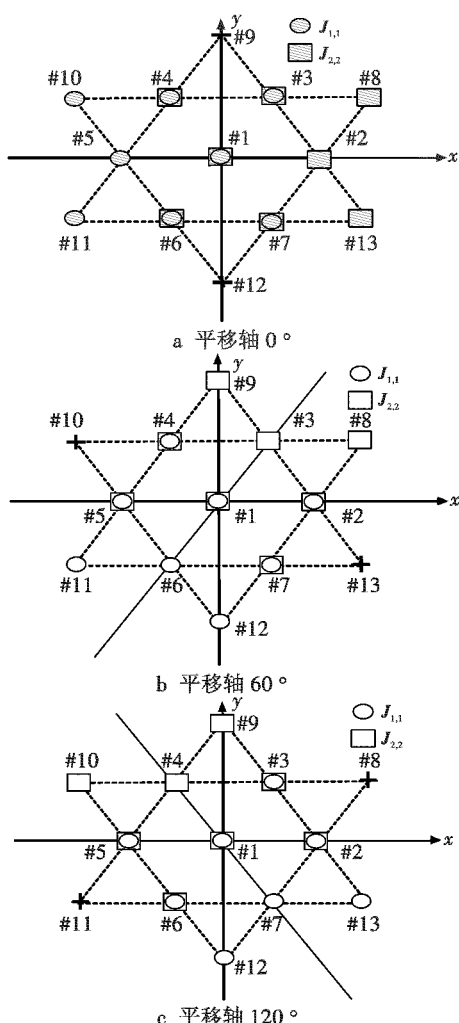


图 2 3 种平移不变子阵列平面图

Fig. 2 Three set-of-subarrays with translational invariance

由图 2 可观察到子阵列中阵元数为 8 个(采用其他平移方式时子阵列数目少于 8 个),理论上最多同时对 8 个信号的来波方向进行估计。3 种子阵列组合的使用虽不能增加同时可估计的来波数目,却可以提高估计精度。

如图 2 所示,由 3 种平移不变子阵列产生的不同组合分别为:图 2a 和图 2b,图 2a 和图 2c,图 2b 和图 2c 的组合,以下为采用图 2a 和图 2b 组合时 2D-Unitary ESPRIT 算法的计算过程。

在图 2a 中,平移轴为  $x$  轴,选择矩阵分别为  $J_{1,1}$  和  $J_{1,2}$ ,由子阵列的平移不变性可得

$$J_{1,1}A\Phi^{(\mu)} = J_{1,2}A \quad (9)$$

$$\Phi^{(\mu)} = \text{diag} \left\{ \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \sin \beta_n \cos(\alpha_n - \psi^{(a)}) \right\} \right\}_{n=1}^N \quad (10)$$

式中: $\psi^{(a)}$  为平移轴与  $x$  轴的夹角; $\Phi^{(\mu)}$  为两个子阵列间的相位延迟。设  $\mu_n = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \beta_n \cos(\alpha_n - \psi^{(a)})$ ,则式(10)可表示为  $\Phi^{(\mu)} = \text{diag} \{ e^{j\mu_n} \}_{n=1}^N$ 。

类似地,图 2b 有

$$J_{2,1}A\Phi^{(v)} = J_{2,2}A \quad (11)$$

$$\Phi^{(v)} = \text{diag} \left\{ \exp \left\{ j \frac{2\pi}{\lambda} \sin \beta_n \cos(\alpha_n - \psi^{(b)}) \right\} \right\}_{n=1}^N \quad (12)$$

同样地,设  $v_n = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \beta_n \cos(\alpha_n - \psi^{(b)})$ ,将式(12)表示为  $\Phi^{(v)} = \text{diag} \{ e^{jv_n} \}_{n=1}^N$ 。

在式(9)和式(11)中, $\Phi^{(\mu)}$  和  $\Phi^{(v)}$  均为对角矩阵,其对角元素为信号的相位因子,求出  $\Phi^{(\mu)}$  和  $\Phi^{(v)}$  的值即解出自动配对的二维角度估值。

本文算法将复数矩阵运算转换为实数矩阵运算,对式(9)和式(11)进行酉变换。由于六角星阵满足中心对称性,不需要列扩展,即可将  $A$  转换为对称矩阵  $A_c$ 。

$$A_c = \begin{pmatrix} e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_1\cos(\alpha_1-\frac{\pi}{2})} & e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_2\cos(\alpha_2-\frac{\pi}{2})} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_{N-1}\cos(\alpha_{N-1}-\frac{\pi}{2})} \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_1\cos(\alpha_1-\frac{5\pi}{6})} & e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_2\cos(\alpha_2-\frac{5\pi}{6})} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_{N-1}\cos(\alpha_{N-1}-\frac{5\pi}{6})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_1\cos(\alpha_1-\frac{5\pi}{6})} & e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_2\cos(\alpha_2-\frac{5\pi}{6})} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_{N-1}\cos(\alpha_{N-1}-\frac{5\pi}{6})} \\ e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_1\cos(\alpha_1-\frac{\pi}{2})} & e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_2\cos(\alpha_2-\frac{\pi}{2})} & \dots & e^{j\frac{2\pi}{\lambda}d\sin\beta_{N-1}\cos(\alpha_{N-1}-\frac{\pi}{2})} \end{pmatrix} \quad (13)$$

由文献[5],将中心对称的复数矩阵转换为实数矩阵的酉变换矩阵  $Q$ ,定义如下:

$$Q_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & jI_n \\ \Pi_n & -j\Pi_n \end{pmatrix} \quad (\text{矩阵维数为偶数}),$$

$$Q_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_n & \mathbf{0} & jI_n \\ \mathbf{0}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}^T \\ \Pi_n & \mathbf{0} & -j\Pi_n \end{pmatrix} \quad (\text{矩阵维数为奇数}).$$

由上式求出导向矩阵  $A$  的酉变换矩阵  $Q_M$  和  $Q_N$ ,则  $Q_M^H A_c Q_N \in \mathbf{R}^{M \times N}$  ( $\mathbf{R}^{M \times N}$  代表  $M$  行  $N$  列的实数矩阵的集合)。由于信号之间互不相干,必然存在一个满秩矩阵  $F$ ,使得  $E_s = A_c F$ 。

定义矩阵  $C_{1,i} = J_{1,i} Q_M E_s \in \mathbf{C}^{8 \times N}, i = 1, 2$  ( $\mathbf{C}^{8 \times N}$  代表 8 行  $N$  列的复数矩阵的集合),则有

$$C_{1,1} \Psi^{(\mu)} \approx C_{1,2} \quad (14)$$

进行酉变换,将式(14)的复数方程变换为相同维数的实数方程,即

$$K_{1,1} E_s Y_\mu \approx K_{1,2} E_s \quad (15)$$

已知  $J_{1,1} = \Pi_N J_{1,2} \Pi_M, J_{1,2} = \Pi_N J_{1,1} \Pi_M, K_{1,1}$  和  $K_{1,2}$  由  $J_{1,1}$  和  $J_{1,2}$  得到

$$K_{1,1} = Q_N^H (J_{1,1} + J_{1,2}) Q_M \quad (16)$$

$$K_{1,2} = Q_N^H (J_{1,1} - J_{1,2}) Q_M \quad (17)$$

由文献[5]中定理 1 知  $K_{1,1}$  和  $K_{1,2}$  为真值矩阵,这

样通过变换,式(9)的复数矩阵方程转化为式(15)的实数矩阵方程,用 TLS 方法解式(15)得到  $Y_\mu$  的值,定义函数<sup>[9]</sup>

$$f(x) = -\frac{x-j}{x+j} \quad (18)$$

则有如下关系

$$\Phi_\mu = f(\Omega_\mu) \quad (19)$$

式中

$$Y_\mu = T\Omega_\mu T^{-1}, \quad (20)$$

$\Omega_\mu$  为  $Y_\mu$  的特征值,  $\Phi_\mu$  为  $\Psi^{(\mu)}$  的特征值,同样地,两者的特征向量也满足式(18)的函数变换。

同样,对于图 2b 有

$$Y_\nu = T\Omega_\nu T^{-1}. \quad (21)$$

对  $Y_\nu$  和  $Y_\mu$  的值进行特征值分解,如式(20)和式(21)所示,由文献[9]知,当入射信号的方位角和俯仰角不同时相等时,  $Y_\nu$  和  $Y_\mu$  的特征向量  $T$  相等,联立方程式(20)和式(21)可得

$$\begin{cases} Y_\mu + jY_\nu = T(\Omega_\mu + j\Omega_\nu)T^{-1} \\ \Omega_\mu = \text{diag}\{\tan(\mu_n/2)\}_{n=1}^N \\ \Omega_\nu = \text{diag}\{\tan(\nu_n/2)\}_{n=1}^N \end{cases}. \quad (22)$$

定义  $A = \Omega_\mu + j\Omega_\nu = \text{diag}\{\lambda_n\}_{n=1}^N$ , 则有

$$\begin{cases} \mu_n = 2\arctan(\text{Re}\{\lambda_n\}) & n=1,2,\dots,N \\ \nu_n = 2\arctan(\text{Im}\{\lambda_n\}) & n=1,2,\dots,N \end{cases}.$$

通过  $\mu_n$  和  $\nu_n$  的值求出  $\alpha_n$  和  $\beta_n$  的估计值,由图 2a,

图 2b 组合得到的估值记作  $(\hat{\alpha}_n^{(1)}, \hat{\beta}_n^{(1)})$ ,  $n=1, \dots, N$ 。

以上是 2D-Unitary ESPRIT 算法的 DOA 估计,对图 2a 和图 2c 组合、图 2b 和图 2c 组合进行相应计算,即可得到 3 组 DOA 估计值。

## 2.2 2D-MUSIC 算法的功率谱函数选择策略

通过 2D-MUSIC 算法的功率谱函数,从 2.1 节得到的 3 组估计值中选择最优的 DOA 估计。由于来波方向与平移不变子阵列的关系直接影响估计误差<sup>[8]</sup>,采用不同的子阵列,角度的估计误差不同。在  $N$  个来波的情况下,3 组 DOA 估计值表示如下

$$(\hat{\alpha}_n^{(1)}, \hat{\beta}_n^{(1)}), (\hat{\alpha}_n^{(2)}, \hat{\beta}_n^{(2)}), (\hat{\alpha}_n^{(3)}, \hat{\beta}_n^{(3)}) \quad n=1, \dots, N \quad (23)$$

式中,上标(1)、(2)、(3) 3 组值,分别是由图 2a 和图 2b 组合、图 2a 和图 2c 组合、图 2b 和图 2c 组合得到的估值,将 3 组估值放入一个 DOA 候选集中,即

$$\Theta_n = \{(\hat{\alpha}_n^{(p)}, \hat{\beta}_n^{(p)}) | p=1, \dots, 3\} \quad n=1, \dots, N. \quad (24)$$

将每一组的  $N$  个估计值按照方位角值的降序排列,假设  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_N$ 。

对于每一个来波均有 3 个候选者。对于第  $n$  个来

波,通过计算式(25)得到其最优估值为

$$(\hat{\alpha}_n, \hat{\beta}_n) = \underset{(\hat{\alpha}_n^{(p)}, \hat{\beta}_n^{(p)}) \in \Theta_n}{\text{argmax}} S(\hat{\alpha}_n^{(p)}, \hat{\beta}_n^{(p)}) \quad (25)$$

式中,函数  $S$  为经典 2D-MUSIC 算法的功率谱函数,其表示式为

$$S(\hat{\alpha}_n^{(p)}, \hat{\beta}_n^{(p)}) = \frac{\mathbf{a}^H(\hat{\alpha}_n^{(p)}, \hat{\beta}_n^{(p)}) \mathbf{a}(\hat{\alpha}_n^{(p)}, \hat{\beta}_n^{(p)})}{\mathbf{a}^H(\hat{\alpha}_n^{(p)}, \hat{\beta}_n^{(p)}) \mathbf{E}_n \mathbf{E}_n^H \mathbf{a}(\hat{\alpha}_n^{(p)}, \hat{\beta}_n^{(p)})}. \quad (26)$$

将 3 组候选者代入式(26),函数的最大值对应的 1 组候选者为信号最优的 DOA 估计值。由于 2D-MUSIC 算法具有高分辨率的优点,保证了选择结果的最优性。将 DOA 选择范围限制在候选集中,避免了 2D-MUSIC 算法的谱峰搜索。

## 3 仿真结果与分析

为了检验本文算法的有效性,进行如下仿真实验。阵列结构如图 1 所示,阵元数  $M=13$ ,阵元间距  $d=\lambda/2$  ( $\lambda$  为波长),快拍数为 50,噪声为高斯白噪声且与来波信号相互独立。

通过对比不同算法 DOA 估计的均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE),对算法的估计性能进行分析,即

$$R_{\text{RMSE}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (R_{\text{RMSE}}(\alpha_n) + R_{\text{RMSE}}(\beta_n)) \quad (27)$$

$$R_{\text{RMSE}}(\alpha_n) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\alpha_n - \hat{\alpha}_n(l))^2} \quad (28)$$

$$R_{\text{RMSE}}(\beta_n) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\beta_n - \hat{\beta}_n(l))^2} \quad (29)$$

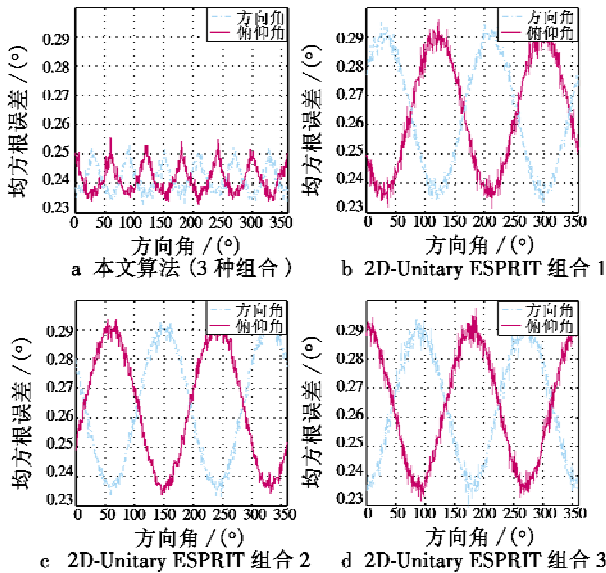
式中: $L$  为 Monte-Carlo 仿真次数; $N$  为来波数。

**仿真 1** 设一个远场窄带信号入射该阵列,信号的俯仰角为  $45^\circ$ ,方向角以  $1^\circ$  的步长在  $0^\circ \sim 360^\circ$  变化,信噪比为 10 dB,分别以本文算法和 2D-Unitary ESPRIT 算法进行 10000 次独立实验,结果如图 3 所示。

图 3 为 RMSE 随来波方向变化曲线图,可以看出,本文算法方向角和俯仰角的 RMSE 值介于 0.23 ~ 0.26 之间,而 2D-Unitary ESPRIT 算法在采用 3 种不同组合时的 RMSE 的值均介于 0.23 ~ 0.3 之间,本文算法与 2D-Unitary ESPRIT 算法相比,具有较小的 RMSE 值。此外观察图 3b、图 3c、图 3d,对同一来波进行估计时,采用不同的阵列组合, RMSE 的值不同,说明来波的方向与平移不变子阵列的关系直接影响估计误差,而本文算法的 RMSE 为 2D-Unitary ESPRIT 算法基于以上 3 种组合产生的 RMSE 最小值。

**仿真 2** 设 4 个远场窄带信号分别从方向  $(40^\circ, 60^\circ)$ ,  $(130^\circ, 45^\circ)$ ,  $(210^\circ, 50^\circ)$ ,  $(300^\circ, 30^\circ)$  入射该阵列,分别以本文算法和 2D-Unitary ESPRIT 算法进行 1000 次独立 Monte-Carlo 统计仿真,二维 DOA 估计的

星座图如图 4 所示,可以看出,本文算法实现了待测信号的二维 DOA 精确估计,较之传统 2D-Unitary ESPRIT 算法,本文算法的估计值限定在较小范围内,具有较高的估计精度。



注：组合 1 是图 2a 和图 2b 组合；组合 2 是图 2b 和图 2c 组合；组合 3 是图 2a 和图 2c 组合。

图 3 方向角 0°~360°、俯仰角 45° 时均方根误差  
Fig. 3 RMSE of elevation at 45° and azimuth varying from 0° to 360° with 1° step

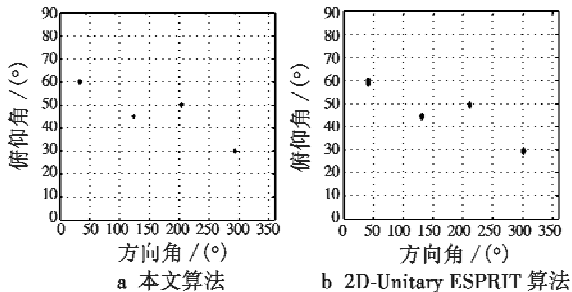


图 4 4 个来波估计星座图

Fig. 4 Constellation diagram of four signals estimation

仿真 3 设 8 个远场窄带信号分别从方向 (40°, 60°), (130°, 45°), (210°, 50°), (300°, 30°), (15°, 10°), (85°, 50°), (250°, 40°), (355°, 70°) 入射该阵列,分别以本文算法和 2D-Unitary ESPRIT 算法进行 1000 次独立 Monte-Carlo 统计仿真,得到的二维 DOA 估计的星座图如图 5 所示,与仿真 2 相比,两种算法的估计性能均有所下降,但本文算法与 2D-Unitary ESPRIT 算法相比星座图更集中,较之 4 个来波时的仿真结果,本文算法估计性能的优势更加明显。特别地,在图 5b 中,当来波信号的角度为 (355°, 70°) 时,估计出的星座图过长,甚至不能区分几个来波,而本文算法的估计性能虽有所下降,但在可接受的范围之内。

仿真 4 设定信噪比在 0~20 dB 区间以 1 dB 的步长变化,在来波数目为 N=1,4,8 时,分别用本文算法和 2D-Unitary ESPRIT 算法进行 1000 次独立仿真,仿真结果如图 6 所示,图中,6 条曲线分别表示来波数目为 1,4,8 时,DOA 估计的 RMSE 随信噪比增大时的变化情况。可以看到,在相同来波数目的情况下,本文算法的 RMSE 值均小于 2D-Unitary ESPRIT 算法,而且在来波数目增多时,本文算法的优势会更明显。

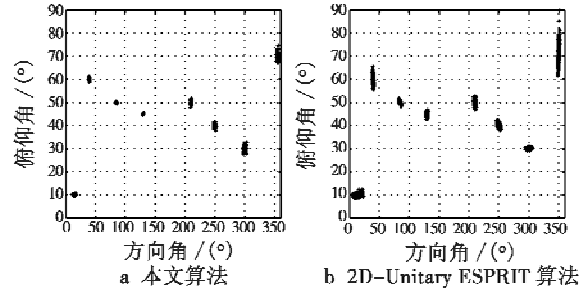


图 5 8 个来波估计星座图

Fig. 5 Constellation diagram of eight signals estimation

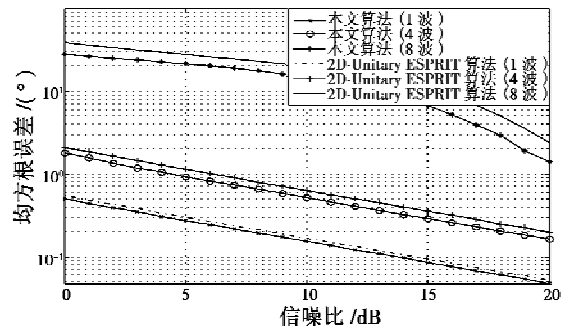


图 6 均方根误差随信噪比变化曲线

Fig. 6 RMSE of angle estimation versus the SNR

综合以上 4 种仿真结果,在对被测信号进行波达方向估计时,本文算法与传统 2D-Unitary ESPRIT 算法相比具有较小的均方根误差、较高的空间分辨率,随着信号数目的增多本文算法优势更加凸显。

### 4 结束语

本文采用了 2D-Unitary ESPRIT 算法的六角星形阵列 DOA 估计方案,该阵形具有多种平移不变子阵列,利用多种子阵列的组合,得到 DOA 估计候选集,采用 2D-MUSIC 算法功率谱函数从候选集中选出最优的估计值,保证了选择结果的最优性。仿真结果验证,该方案相对于传统算法具有较小的 RMSE 和较高的空间分辨率。

### 参考文献

[1] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation [J]. IEEE Transactions on Antenna Propagation, 1986, 34(3):276-280.