

不确定混沌系统的到达跟踪控制

沈志萍¹, 闫荣¹, 邬依林²

(1. 河南师范大学数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007; 2. 广东第二师范学院计算机科学系, 广州 510310)

摘要: 利用非线性反馈控制实现了不确定混沌系统对任意信号的到达跟踪控制问题。根据系统结构特点选取合适的反馈方式, 设计非线性控制律, 并由滑模变结构控制理论证明了误差信号指数趋于零以及系统所有状态有界。与现有文献所得控制律算法相比, 本文所设计的控制律不仅考虑了系统的不确定性, 同时保证了系统所有状态有界, 该方法是一种物理可实现的到达跟踪控制方法。数值仿真结果进一步证实了该方法的可行性。

关键词: 不确定混沌系统; 跟踪控制; 滑模变结构控制; 混沌同步

中图分类号: TN956; O221.6 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-637X(2015)11-0052-04

Reaching Tracking Control of Uncertain Chaotic System

SHEN Zhi-ping¹, YAN Rong¹, WU Yi-lin²

(1. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China;

2. Department of Computer Science, Guangdong University of Education, Guangzhou 510310, China)

Abstract: Tracking and controlling to reaching of arbitrary signals in uncertain chaotic system is realized by nonlinear feedback control. Proper feedback mode is selected according to the characteristic of system structure, and a nonlinear controller is designed. The sliding mode control theory is applied to prove that the error signal is exponentially stable at zero and all variables in controlled system are bounded. Compared with the control laws in current literature, the controller designed here not only takes the uncertainty of the system into consideration, but also guarantees that all the system states are bounded. The proposed method is a physically feasible tracking control strategy. The results of numerical simulation further proved the feasibility of this method.

Key words: uncertain chaotic system; tracking control; sliding mode control; chaotic synchronization

0 引言

近年来,混沌控制与同步已在振动、保密通讯和生物医学等领域得到了广泛应用,早期提出的是基于驱动-响应原理的混沌同步^[1],随之出现了多种同步方法^[2-9]。近年来相继出现了系统结构相同而参数未知的混沌同步^[10-11]。文献[12-13]的研究表明,采用适当的控制策略,可使特定混沌系统的某一变量跟踪任意参考信号,包括另一完全不同的混沌系统的输出信号,即可以实现所谓的异结构同步。

在实际应用中,参考信号产生系统的结构和参数

一般不同于受控系统,因此相对一般同步方法而言,跟踪控制更具有实际应用价值。文献[12]提出了实现异结构同步概念,实现了离散混沌系统对于参考信号的追踪与同步;文献[13]给出一种 Rossler 混沌追踪控制方案,可使某一状态跟踪任意参考信号并实现异结构同步,但文献[12-13]的设计不能保证系统所有状态都有界,因此在物理上是不可实现的;而文献[14]虽能保证系统所有状态都有界,但它没有考虑到系统的不确定性。针对此问题,本文对不确定混沌系统给出了合适的控制器,不仅能使部分状态实现广义混沌同步,而且保证系统所有状态有界,保证了控制方案的物理可实现性,数值仿真结果进一步证实了此方法的可行性。

1 问题描述

考虑如下混沌系统的对任意指定信号的跟踪问题

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + f_1(x) \\ \dot{x}_2 = f_2(x) + \Delta f_2(x) + u_r(x) \end{cases} \quad (1)$$

收稿日期:2014-12-31

修回日期:2015-04-07

基金项目:国家自然科学基金(61203293);河南师范大学博士科研启动经费(510101917015)

作者简介:沈志萍(1984—),女,河南驻马店人,博士,副教授,研究方向为网络控制、混沌控制、最优控制、鲁棒控制等。

$$\begin{cases} y = C_1 x = x_2 \\ z = C_2 x = x_1 \end{cases} \quad (2)$$

式中: $x_1 \in \mathbf{R}^q; x_2 \in \mathbf{R}^p; u \in \mathbf{R}^p; y, z$ 为系统的输出; 不确定项 $\Delta f_2(x)$ 满足 $\|\Delta f_2(x)\| \leq \alpha(\|x_2\|)$ 。

设 $r \in \mathbf{R}^p, \varphi \in \mathbf{R}^q$ 为任意二阶连续可微向量函数, 满足 $\|r\| \leq \bar{r}, \|\varphi\| \leq \bar{\varphi}_1, \|\dot{\varphi}\| \leq \bar{\varphi}_2$ 。

本文的目的是设计控制器 $u_r(x)$, 使得被控系统的输出 $y(t)$ 经有限时间与指定信号 $r(t)$ 重合, 且保证系统的所有状态有界。

2 混沌系统的到达跟踪

定义误差 $e_r(t) = y(t) - r(t)$, 则由式(1)和式(2)系统方程可得同步误差方程

$$\dot{e}_r = \dot{x}_2 - \dot{r} = f_2(x) + \Delta f_2(x) + u_r(x) - \dot{r} \quad (3)$$

跟踪问题就归结为: 设计控制器 $u_r(x)$, 使得存在时间 $\bar{t} > 0$, 当 $t \geq \bar{t}$ 时, 误差方程式(3)中误差 $e_r(t) = 0$ 。

给出主要结论之前, 先给出系统稳定相关引理。

引理 1^[15] 若 $\lambda_{\max}(A) = -\lambda < 0$, 则存在 $\rho > 0$, 使得 $\|e^{At}\| \leq \rho e^{-\lambda t}$ 。

下面给出主要定理。

定理 1 若矩阵 A_1 稳定 (即矩阵 A_1 的所有特征根均具有负实部), 且 $\|f_1(x)\| \leq \rho_1(\|x_2\|)$, 则取控制律

$$u_r(x) = -f_2(x) + \dot{r} - ks - (\varepsilon + \alpha \|x\|) \operatorname{sgn} s \quad (4)$$

式中: $s = x_2 - r, 0 < \varepsilon < k$, 则被控系统所有状态有界, 且存在 $\bar{t} = -\frac{\ln(\|e_r(0)\| + \varepsilon/k)}{k}, 0 < \varepsilon < k$ 。当 $t \geq \bar{t} > 0$ 时, 输出 $y(t) = x_2(t)$ 与指定信号 $r(t)$ 重合。

证明 取切换函数 $s = x_2 - r$, 则由式(1)可得

$$s^T \dot{s} = s^T [f_2(x) + \Delta f_2(x) + u - \dot{r}] \quad (5)$$

将控制律式(4)代入式(5), 可得 $s^T \dot{s} \leq \|s\| \cdot \|\Delta f_2(x)\| - k\|s\|^2 - (\varepsilon + \alpha)\|s\| \leq -k\|s\|^2 - \varepsilon\|s\|$, 上式两边同时除以 $\|s\| (\|s\| \neq 0)$ 可得

$$\frac{d\|s\|}{dt} = \frac{s^T \dot{s}}{\|s\|} \leq -k\|s\| - \varepsilon \quad (6)$$

求解不等式(6)可得, 当 $t \geq \bar{t}$ 时, $s = 0$, 其中

$$\bar{t} = -\frac{\ln(\|e_r(0)\| + \varepsilon/k)}{k}, \quad 0 < \varepsilon < k \quad (7)$$

从而

$$x_2(t) = r(t) \quad t \geq \bar{t} \quad (8)$$

再求解式(1)中第 1 个方程得

$$x_1(t) = x_1(\bar{t}) e^{A_1(t-\bar{t})} + \int_{\bar{t}}^t e^{A_1(t-\tau)} f_1(x(\tau)) d\tau$$

$$\|x_1\| \leq \|x_1(\bar{t})\| \cdot \|e^{A_1(t-\bar{t})}\| +$$

$$\int_{\bar{t}}^t \|e^{A_1(t-\tau)}\| \cdot \|f_1(x(\tau))\| d\tau \quad (9)$$

因假设 A_1 稳定, 由引理 1, 则存在 $\delta > 0$ 和 $\lambda > 0$, 使得

$$\begin{aligned} \|x_1\| &\leq \delta \|x_1(\bar{t})\| e^{-\lambda(t-\bar{t})} + \delta \int_{\bar{t}}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \cdot \\ &\rho_1(\|x_2(\tau)\|) d\tau \leq \delta \|x_1(\bar{t})\| e^{-\lambda(t-\bar{t})} + \\ &\delta \int_{\bar{t}}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \rho_1(\|r(\tau)\|) d\tau \leq \delta \|x_1(\bar{t})\| e^{-\lambda(t-\bar{t})} + \\ &\delta \rho_1(\bar{r}) \int_{\bar{t}}^t e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau < \delta \|x_1(\bar{t})\| e^{-\lambda(t-\bar{t})} + \\ &\frac{1}{\lambda} \delta \rho_1(\bar{r}) \rightarrow \frac{1}{\lambda} \rho_1 \delta(\bar{r}) \end{aligned} \quad (9)$$

由式(8)和式(9)可得被控系统的状态有界, 且当 $t \geq \bar{t}$ 时, 系统输出 $y(t) = x_2(t)$ 与指定信号 $r(t)$ 重合。

证毕。

下面给出式(1)系统结构中 $f_1(x) = A_2 x_2$, 这种特殊结构时的控制律。

定理 2 若式(1)系统中的 $f_1(x) = A_2 x_2, A_2$ 非奇异, 则取控制律

$$u_\varphi(x) = -kx_2 - f_2(x) - A_2^{-1} [(kI_q + A_1)A_1 x_1 + A_1 A_2 x_2 - \dot{\varphi} - k\dot{\varphi} + ks + (\varepsilon + \alpha \|A_2\|) \operatorname{sgn} s] \quad (10)$$

式中, $s = k(x_1 - \varphi) + A_1 x_1 + A_2 x_2 - \dot{\varphi}$ 。

参数 $0 < \varepsilon < k$, 则被控系统状态有界, 且系统输出 $z(t) = x_1(t)$ 以指数收敛到 $\varphi(t)$ 。

证明 取切换函数 $s = k(x_1 - \varphi) + A_1 x_1 + A_2 x_2 - \dot{\varphi}$, 对 s 关于时间 t 求导可得 $\dot{s} = (kI_q + A_1) \dot{x}_1 + A_2 \dot{x}_2 - \ddot{\varphi} - k\dot{\varphi}$, 由切换函数 s 及其导数表达式可得

$$\begin{aligned} s^T \dot{s} &= s^T [(kI_q + A_1)A_1 x_1 + A_1 A_2 x_2 + A_2(kx_2 + f_2 + \\ &\Delta f_2 + u) - \ddot{\varphi} - k\dot{\varphi}] = s^T A_2 \Delta f_2 - ks + \\ &(\varepsilon + \alpha \|A_2\|) \operatorname{sgn} s \leq -k\|s\|^2 - \varepsilon\|s\| \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)两边同时除以 $\|s\| (\|s\| \neq 0)$ 可得 $\frac{d\|s\|}{dt} \leq -k\|s\| - \varepsilon$ 。

类似式(6)的证明, 存在 $\bar{t} > 0$, 当 $t \geq \bar{t}$ 时, 有 $s = ke_\varphi + \dot{e}_\varphi = 0$, 进而

$$\dot{e}_\varphi = -ke_\varphi \quad (12)$$

由式(12)可得 e_φ 指数趋于零, 即

$$x_1(t) \rightarrow \varphi(t) \quad (13)$$

又由系统方程可得

$$\dot{x}_1 = -ke_\varphi + \dot{\varphi} = A_1 x_1 + A_2 x_2 \quad (14)$$

由式(14)可解得 $x_2(t) = A_2^{-1} (-ke_\varphi + \dot{\varphi} - A_1 x_1)$, 对式两边同时取范数可得

$$\|x_2\| = \|A_2^{-1} (-ke_\varphi + \dot{\varphi} - A_1 x_1)\| \rightarrow$$

$$\|A_2^{-1}(\dot{\varphi} - A_1\varphi)\| \leq M_\varphi \quad (15)$$

式中: $M_\varphi = \|A_2^{-1}\| \cdot \|(\dot{\varphi} - A_1\varphi)\|$, 由式(13)和(15)可得被控系统所有状态有界, 且 $x_1(t)$ 以指数收敛到 $\varphi(t)$ 。

证毕。

定理2和定理3给出一般混沌系统的到达跟踪问题, 下面把混沌系统具体化, 给出一些相应的结论。

推论1 对于 Chen 系统^[16]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -35x_1 + 35x_2 \\ \dot{x}_2 = -7x_1 - x_1x_3 + 28x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - 3x_3 \end{cases} \quad (16)$$

在式(16)中第2个方程加控制器 $u = 7x_1 + x_1x_3 - 28x_2 + \dot{r} - ks - \varepsilon \text{sgn } s$, 其中: $s = x_2 - r, 0 < \varepsilon < k$, 则被控系统所有状态有界, 且存在 $\bar{t} = -\frac{\ln(\|e_r(0)\| + \varepsilon/k)}{k}, 0 < \varepsilon < k$ 。

当 $t \geq \bar{t} > 0$ 时, 输出 $y(t) = x_2(t)$ 与指定信号 $r(t)$ 重合, 且其余两个状态有界。

证明 式(16)加入控制器后的前面两个方程变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -35x_1 + 35x_2 \\ \dot{x}_2 = -7x_1 - x_1x_3 + 28x_2 + u \end{cases} \quad (17)$$

对式(17)应用定理1, 得

$$x_2(t) = r(t) \quad t \geq \bar{t} \quad (18)$$

且 x_1 有界, 即 $\|x_1\| \leq M_1$ 。

将式(18)代入式(16)的第3方程得

$$\dot{x}_3 = -3x_3 + rx_1 \quad t \geq \bar{t} \quad (19)$$

求解式(19), 有

$$x_3(t) = e^{-3(t-\bar{t})}x_3(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^t e^{-3(t-\tau)}r(\tau)x_1(\tau)d\tau \quad (20)$$

对上式两边同时取范数, 有 $\|x_3(t)\| \leq e^{-3(t-\bar{t})} \cdot$

$\|x_3(\bar{t})\| + \frac{1}{3}\bar{t}M_1$, 即推论得证。

3 数值研究

本节给出仿真说明定理的有效性。在在保密通信、生物工程、信息科学领域中常见的 Chen 混沌系统为例进行分析, 在式(16)受控系统中, 当不加控制器时, 系统处于混沌状态, 利用 Simulink 仿真, 图1所示其混沌图像, 初值为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, -1, 1)$, 其状态变量 $x_2(t)$ 的时域波形如图2所示。

所选取的跟踪信号是工程上常见的正弦信号和常值信号。因正弦信号有许多非常实用的价值: 一是最简单的信号单元, 且容易产生; 二是满足一定条件的任意周期信号(绝大部分工程上的周期信号都满足)均可以分解为一至无穷种不同频率正弦波的线性组合; 三是正

弦信号的微分还是正弦信号, 正弦信号的积分也是正弦信号; 四是任意两个不同频率的正弦信号在一个周期内的乘积的积分等于零(正弦信号的正交性)。

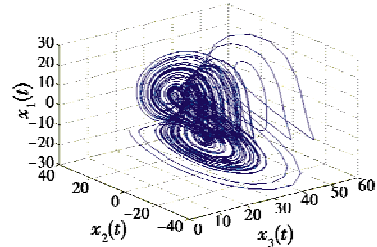


图1 Chen 系统混沌图

Fig.1 Phase portraits of Chen chaotic system

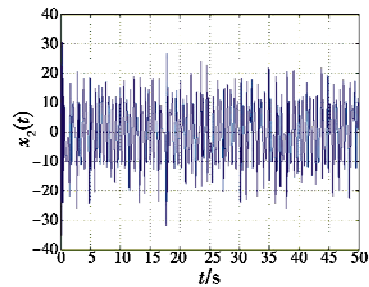


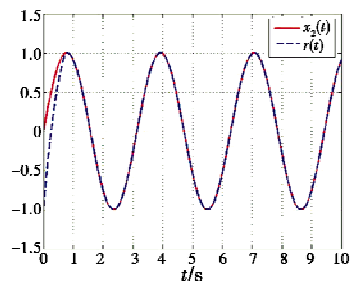
图2 未受控制 Chen 系统变量 $x_2(t)$ 的变化曲线

Fig.2 Time response of $x_2(t)$ for the Chen system without controller

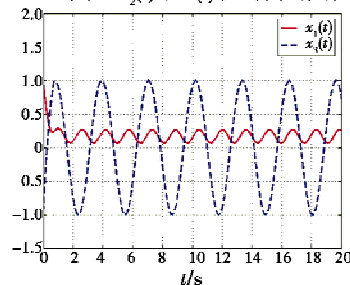
3.1 追踪正弦信号

取参考信号 $r(t) = \sin 2t$, 系统初值 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, -1, 1)$, 由式(4)可得控制律为 $u = 7x_1 + x_1x_3 - 28x_2 + 2\cos 2t - ks - \varepsilon \text{sgn } s$ 。

取控制参数 $k=2, \varepsilon=1$, 采用4阶 Runge-Kutta 法进行计算, 系统状态变量随时间的变化情况如图3a、图3b所示。



a 变量 $x_2(t)$ 和 $r(t)$ 随时间的变化



b 变量 $x_1(t)$ 和 $x_3(t)$ 随时间的变化

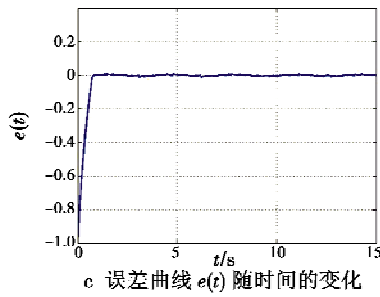


图 3 参考信号为正弦信号的仿真结果
Fig 3 Simulation result of sinusoidal signal

图 3a 是变量 $x_2(t)$ 跟踪 $r(t)$ 的过程,图 3b 是变量 $x_1(t)$ 和 $x_3(t)$ 的时域波形。由图 3b、图 3c 可见,当 $t=0.75$ s 时二者信号完全一致。在此过程中,变量 $x_1(t)$ 和 $x_3(t)$ 始终保持有界。图 3c 是误差曲线图随时间的变化情况,可见 $t \geq 0.75$ s 时,误差基本等于零,说明二者达到跟踪的效果。

3.2 追踪常值信号

取参考信号 $r(t) = 3$, 系统初值 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, -1, 1)$, 由式(4)可得控制律为 $u = 7x_1 + x_1x_3 - 28x_2 - ks - \varepsilon \text{sgn } s$ 。取控制参数 $k=2, \varepsilon=1$, 采用 4 阶 Runge-Kutta 法进行计算, 系统状态变量随时间的变化情况如图 4a、图 4b 所示。

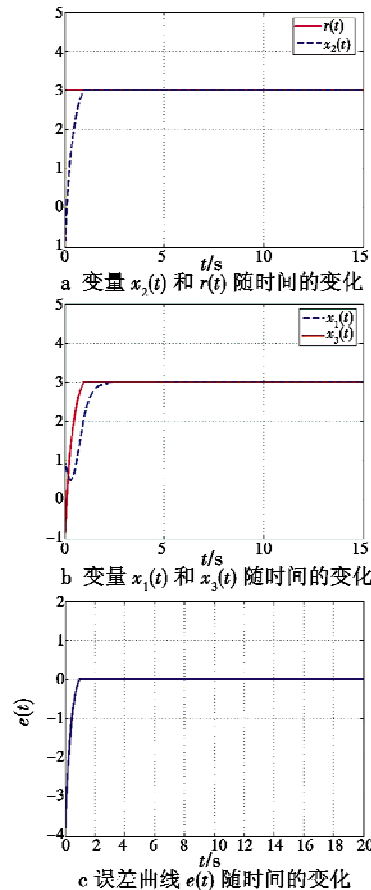


图 4 参考信号为常值的仿真结果
Fig. 4 Simulation result of constant signal

图 4a 是变量 $x_2(t)$ 跟踪 $r(t)$ 的过程,图 4b 是变量 $x_1(t)$ 和 $x_3(t)$ 的时域波形。由图 4b、图 4c 可见,当 $t=0.94$ s 时二者信号完全一致。在此过程中,变量 $x_1(t)$ 和 $x_3(t)$ 始终保持有界。图 4c 是误差曲线图随时间的变化情况,可见 $t \geq 0.94$ s 时,误差基本等于零,说明二者达到跟踪的效果。

4 结语

本文以滑模变结构控制理论为基础。通过非线性反馈控制实现了不确定混沌系统的某一状态变量对任意二阶可微参考信号的到达跟踪,同时保证系统其他状态变量有界。利用滑模变结构控制理论证明了相关定理,数值研究结果与理论分析相符合,该控制方案是物理可实现的方法。

参考文献

- [1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems [J]. Physical Review Letters, 1990, 64 (8) : 821-824.
- [2] LI S Y, GE Z M. Fuzzy modeling and synchronization of two totally different chaotic systems via novel fuzzy model [J]. Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics, IEEE Transactions on, 2011, 41(4) : 1015-1026.
- [3] YANG X, CAO J, LU J. Synchronization of Markovian coupled neural networks with nonidentical node-delays and random coupling strengths [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(1) : 60-71.
- [4] YAHYAZADEH M, RANJBAR N A, GHADERI R. Synchronization of chaotic systems with known and unknown parameters using a modified active sliding mode control [J]. ISA Transactions, 2011, 50(2) : 262-267.
- [5] FENG X, ZHANG F, WANG W. Global exponential synchronization of delayed fuzzy cellular neural networks with impulsive effects [J]. Chaos Solitons Fractals, 2011, 44(1) : 9-16.
- [6] LU J, HO D W, CAO J, et al. Exponential synchronization of linearly coupled neural networks with impulsive disturbances [J]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2011, 22(2) : 329-335.
- [7] HE W, QIAN F, HAN Q L, et al. Synchronization error estimation and controller design for delayed Lur'e systems with parameter mismatches [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(10) : 1551-1563.
- [8] ZHOU W, TONG D, GAO Y, et al. Mode and delay dependent adaptive exponential synchronization in pth moment for stochastic delayed neural networks with Markovian switching [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and