

基于幂次趋近律的单向辅助面滑模控制

于媛媛, 吴庆宪, 姜长生
(南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016)

摘要: 针对连续非线性系统, 采用一种基于幂次趋近律的单向辅助面滑模控制方法。首先依据给定的连续非线性系统, 设计单向辅助面滑模控制器, 并在此基础上, 引入了幂次趋近律, 设计基于幂次趋近律的单向辅助面滑模控制器, 且给出稳定性和有限时间收敛的理论证明。该方法能够确保系统状态在切换面附近的趋近速度, 即当且仅当系统状态位于原点处时趋近律为零, 较好地削弱了系统抖振。最后, 通过实验仿真, 验证了该方法的有效性。

关键词: 滑模控制; 非线性系统; 单向辅助面; 幂次趋近律

中图分类号: V271.4; TP273

文献标志码: A

文章编号: 1671-637X(2014)04-0029-05

Sliding Mode Control with Unidirectional Auxiliary Surfaces Based on Power Reaching Law

YU Yuan-yuan, WU Qing-xian, JIANG Chang-sheng

(College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: The sliding mode control with unidirectional auxiliary surfaces (UAS-SMC) based on the power reaching law was used for a class of nonlinear continuous systems. According to the nonlinear continuous system, a UAS-SMC was designed. On which basis, the power reaching law was introduced, and a UAS-SMC based on power reaching law was developed. Then, theoretical analysis proved that the system states will converge on the switching surfaces in a finite time and it is stable. The simulation results show that the chattering can be effectively reduced, and the method ensures the reaching speed near the switching surfaces. The reaching law is zero if and only if the system states are zero.

Key words: sliding mode control; nonlinear system; unidirectional auxiliary surface; power reaching law

0 引言

滑模控制方法作为变结构理论中一种具有强鲁棒性的控制策略, 在实际控制系统中得到了广泛的应用^[1-5]。滑模控制中的抖振对于大部分工程系统是有危害的, 因此, 如何去除滑模中的抖振已经成为了变结构控制领域研究的一大主要问题^[6]。目前, 抖振问题的主流处理方法有高阶滑模^[7]、边界层滑模^[8-9]和鲁棒正不变集^[10]。

针对这个问题, 本文提出一种基于幂次趋近律的单向滑模控制方法。该方法能够在去除抖振的同时确保系统状态在切换面附近的趋近速度, 即当且仅当系统状态位于原点处趋近律为零, 同时能保证系统状态

是稳定的, 且在有限时间收敛至切换面。首先提出解决的问题, 其次根据问题设计了基于幂次趋近律的单向辅助面滑模控制器, 然后给出了该控制方法的稳定性和可在有限时间收敛至滑模面的证明, 最后仿真验证并得出结论。

1 基于幂次趋近律的单向辅助面滑模控制器设计

1.1 问题的描述

考虑如下非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1)$$

其中: $f(x) \in \mathbf{R}^n$; $g(x) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是一个可逆矩阵; $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$; 控制向量 $u \in \mathbf{R}^n$ 。

1.2 基于幂次趋近律的单向辅助面滑模控制器设计

针对系统(1), 设计基于幂次趋近律的单向辅助面滑模控制器, 具体过程如下所述。

1) 选择组合切换面。

收稿日期: 2013-06-03

修回日期: 2013-06-18

作者简介: 于媛媛(1987—), 女, 山东枣庄人, 硕士生, 研究方向为飞行控制。

$$\begin{cases} S_1 = x + \xi_1 \int x = 0 \\ S_2 = x + \xi_2 \int x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中: $S_1 = [S_{11}, \dots, S_{1n}]^T; S_2 = [S_{21}, \dots, S_{2n}]^T; \xi_1 = \text{diag}\{\xi_{11}, \dots, \xi_{1n}\}; \xi_2 = \text{diag}\{\xi_{21}, \dots, \xi_{2n}\}; \xi_{1i} > 0, \xi_{2i} > 0, \xi_{1i} \neq \xi_{2i}, i = \{1, 2, \dots, n\}$, 为简便起见, 本文中用 $\int x$ 表示 $\int_0^t x(\tau) d\tau$.

定义1 $\{(x_i, \int x_i) \mid S_{1i}(x_i, \int x_i) < 0; S_{2i}(x_i, \int x_i) < 0; x_i \in \mathbf{R}; \int x_i \in \mathbf{R}\}$ 为第 0_i 个空间, 同理空间 1_i, ..., 3_i, $i = 1, \dots, n$, 如图 1 所示。

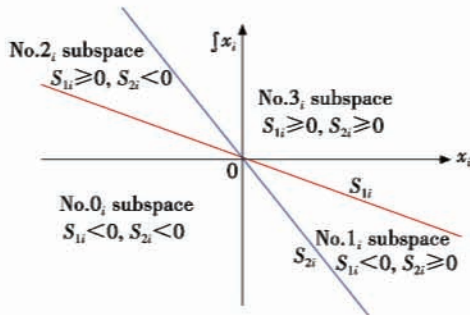


图1 切换面划分二维空间

Fig.1 Switching surfaces divide two dimensional space

2) 构造单向辅助面。

二维空间 $(x_i, \int x_i)$ 对应的切换面为 $S_{1i} = x_i + \xi_{1i} \int x_i = 0, S_{2i} = x_i + \xi_{2i} \int x_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。将其划分为 4 个子空间, 分别记为第 k_i 个子空间, $k = 0, 1, 2, 3$, 在切换面上选取合适的点 $P_{S_{1i}+}, P_{S_{1i}-}, P_{S_{2i}+}, P_{S_{2i}-}$ 构成凸四边形, 由线段 $P_{S_{1i}+}P_{S_{2i}-}, P_{S_{1i}-}P_{S_{2i}+}, P_{S_{1i}+}P_{S_{2i}+}, P_{S_{1i}-}P_{S_{2i}-}$ 构成单向辅助面 $H_{0i}, H_{1i}, H_{2i}, H_{3i}$, 如图 2 所示。

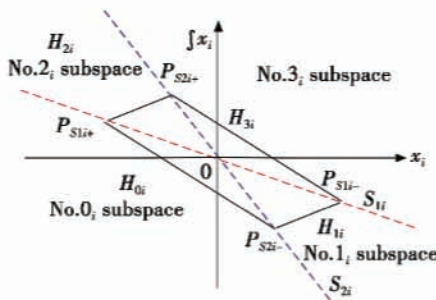


图2 单向辅助面设计

Fig.2 Unidirectional auxiliary surface design

所选取的点在滑模切换面上, 故满足

$$\begin{cases} S_{1i}(P_{S_{1i}+}) = 0, S_{1i}(P_{S_{1i}-}) = 0 \\ S_{2i}(P_{S_{2i}+}) = 0, S_{2i}(P_{S_{2i}-}) = 0 \end{cases}, \text{ 则可得单向辅助面方程}$$

$$H_{ki} = \omega_{ki1} x_i + \omega_{ki2} \int x_i + M_{ki} \quad (3)$$

其中: $k \in \{0, 1, 2, 3\}; M_{ki} > 0, \omega_{ki1} \neq 0, M_{ki}$ 为常数。

3) 设计单向辅助面参数。

当前单向辅助面的第 i 个分量为 ($M_i > 0$ 为常数)

$$H_i = \omega_{i1} x_i + \omega_{i2} \int x_i + M_i \quad (4)$$

其中:

$$\omega_{i1} = \begin{cases} \omega_{0i1}, S_{1i} < 0, S_{2i} < 0 \\ \omega_{1i1}, S_{1i} < 0, S_{2i} \ge 0 \\ \omega_{2i1}, S_{1i} \ge 0, S_{2i} < 0 \\ \omega_{3i1}, S_{1i} \ge 0, S_{2i} \ge 0 \end{cases}; \omega_{i2} = \begin{cases} \omega_{0i2}, S_{1i} < 0, S_{2i} < 0 \\ \omega_{1i2}, S_{1i} < 0, S_{2i} \ge 0 \\ \omega_{2i2}, S_{1i} \ge 0, S_{2i} < 0 \\ \omega_{3i2}, S_{1i} \ge 0, S_{2i} \ge 0 \end{cases}$$

当前的单向辅助面为

$$H = \omega_1 x + \omega_2 \int x + M \quad (5)$$

其中: $H = [H_1, \dots, H_n]^T; \omega_1 = \text{diag}\{\omega_{11}, \dots, \omega_{n1}\}; \omega_2 = \text{diag}\{\omega_{12}, \dots, \omega_{n2}\}; M = [M_1, \dots, M_n]^T$ 。

4) 基于幂次趋近律的单向辅助面。

$$\dot{H} = N = \lambda(M - H)^\alpha \quad (6)$$

其中: M, H 与式(3)中相同; $\lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} > 0; N$ 为趋近律; $0 < \alpha < 1$ 。对式(5)两边同时求导, 可得

$$\dot{H} = \omega_1 \dot{x} + \omega_2 x \quad (7)$$

对比式(6)与式(7)可得

$$\dot{H} = N = \lambda(M - H)^\alpha = \omega_1 \dot{x} + \omega_2 x \quad (8)$$

把系统(1)代入到式(7)中, 则可得到基于幂次趋近律的单向辅助面滑模控制器为

$$u = [\omega_1 g(x)]^{-1} [\lambda(M - H)^\alpha - \omega_1 f(x) - \omega_2 x] \quad (9)$$

其中: $H = [H_1, \dots, H_n]^T; \omega_1 = \text{diag}\{\omega_{11}, \dots, \omega_{n1}\}; \omega_2 = \text{diag}\{\omega_{12}, \dots, \omega_{n2}\}; M = [M_1, \dots, M_n]^T; 0 < \alpha < 1; \lambda > 0$, 为可调参数。由文献[11]引理1知 $M > 0, M - H \ge 0$, 当且仅当 $M = H$ 时, 有 $x_i(t) = 0$ 。

2 基于幂次趋近律的单向辅助面滑模满足可达性和稳定性条件

定理1 针对非线性系统(1), 设计基于幂次趋近律的单向滑模控制器如式(9)所示, 则 $x_i(t)$ 可在有限时间内到达滑模面 (S_{1i} 或者 S_{2i}), 收敛时间为

$$T_i \leq \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{1 - \alpha} [Z_i(x_i(0))]^{1 - \alpha} \quad (10)$$

其中: $x_i(0)$ 为 $x_i(t)$ 的初始值; $Z_i(x_i(t)) = M_i - H_i(x_i(t))$, $i = 1, \dots, n$ 。

证明 由文献[11]中引理1知 $M_i > 0, M_i - H_i(x_i(t)) \ge 0$, 且仅当 $M_i = H_i(x_i(t))$ 时, 有 $x_i(t) = 0; V = \frac{1}{2} \left[\frac{M_i - H_i(x_i(t))}{M_i} \right]^2$ 是连续函数, 因为 M_i 为常数, 故 $H_i(x_i(t))$ 也是连续函数。令

$$Z_i(x_i(t)) = M_i - H_i(x_i(t)) \quad (11)$$

对式(11)两边同时求导,因为 M_i 是常值,故可得

$$\dot{Z}_i(x_i(t)) = -\dot{H}_i(x_i(t)) \quad (12)$$

比较式(6)与式(12)可得

$$\begin{aligned} \dot{Z}_i(x_i(t)) &= -\lambda_i [M_i - H_i(x_i(t))]^\alpha = \\ &= -\lambda_i [Z_i(x_i(t))]^\alpha \end{aligned} \quad (13)$$

对式(13)两边同时积分,可得

$$t = \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{1-\alpha} \{ [Z_i(x_i(0))]^{1-\alpha} - [Z_i(x_i(t))]^{1-\alpha} \} \quad (14)$$

根据式(14)做如下几点讨论。

1) 假设状态运动轨迹到达原点之前,始终未在滑模面上滑行。当轨迹到达原点时,也同时到达了滑模面,则此时 $x_i(t) = 0, Z_i(x_i(t)) = 0$ 。由式(14)可知,到达滑模面的时间计算式为

$$t = \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{1-\alpha} [Z_i(x_i(0))]^{1-\alpha} \quad (15)$$

2) 假设系统状态运动轨迹在 t_1 时刻到达滑模面上,并在滑模面上滑行至原点,且 $x_i(t_1) \neq 0$ 。

由式(11)及文献[11]中引理1可知,仅当 $M_i = H_i(x_i(t))$ 时,有 $x_i(t_1) = 0$ 。此时 $x_i(t_1) \neq 0$,可得 $Z_i(x_i(t)) = M_i - H_i(x_i(t)) > 0$ 。由式(14)可知,到达滑模面上的时间计算为

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{1-\alpha} \{ [Z_i(x_i(0))]^{1-\alpha} - [Z_i(x_i(t))]^{1-\alpha} \} < \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{1-\alpha} [Z_i(x_i(0))]^{1-\alpha} \end{aligned} \quad (16)$$

根据以上分析,基于幂次趋近律的单向辅助面滑模在有限的时间 T_i 内收敛到滑模面上,满足可达性,且

$$T_i \leq \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{1-\alpha} [Z_i(x_i(0))]^{1-\alpha} \quad (17)$$

定理得证。

定理2 设计基于幂次趋近律的单向辅助面滑模控制器 $u = [\omega_1 g(x)]^{-1} [\lambda(M-H)^\alpha - \omega_1 f(x) - \omega_2 x]$, 则系统(1)是渐近稳定的。

证明 由定理1可知, $x_i(t)$ 可在有限时间内到达滑模面 (S_{1i} 或者 S_{2i}), 故只需证在滑模面上是稳定的。选取 $S_{1i} = x_i + \xi_{1i} \int x_i = 0$ 讨论,同样适用于另一切换面。对上述切换面求导可得

$$\dot{x}_i + \xi_{1i} x_i = 0, \text{ 即 } \dot{x}_i = -\xi_{1i} x_i \quad (18)$$

选取 Lyapunov 函数为 $V = x^T x$, 为正定二次型,故 $V \geq 0$, 当且仅当 $x = [0, 0, \dots, 0]^T \in \mathbf{R}^n$ 时, $V = 0$ 。

下面讨论 \dot{V} , 证明 $x \neq 0$ 时, $\dot{V} < 0$ 。 $\dot{V} = 2 \sum_{i=1}^n x_i \dot{x}_i$, 又因式(18), 得 $\dot{V} = -2 \sum_{i=1}^n \xi_{1i} x_i^2$, 其中 $\xi_{1i} > 0$ 。当 $x \neq 0$ 时,

$$\dot{V} < 0。$$

综上所述,系统状态 $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$, 是渐近稳定。

3 仿真结果分析

系统方程为^[12]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x) + g(x)u \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases} \quad (19)$$

其中: $x = [x_1 \ x_2]^T; u \in \mathbf{R}; g(x) = \frac{3 \cos x_2}{20 - 3 \cos^2 x_2}; f(x) = \frac{294 \sin x_2 - x_1 \sin 2x_2}{20 - 3 \cos^2 x_2}$ 。

1) 设计切换面。 $x_2 = \int x_1$, 切换面选择为

$$\begin{cases} S_{11} = x_1 + \int x_1 = x_1 + x_2 \\ S_{21} = 2x_1 + \int x_1 = 2x_1 + x_2 \end{cases} \quad (20)$$

2) 设计单向辅助面。

4 个点为 $P_{S_{11}+}; P_{S_{11}-}; P_{S_{21}+}; P_{S_{21}-}$ 。分别选为: $P_{S_{11}+} = (-0.5, 0.5); P_{S_{11}-} = (0.5, -0.5); P_{S_{21}+} = (-0.275, 0.55); P_{S_{21}-} = (0.275, -0.55)$; 由于 M 为常值, 取 $M = 1$ 。将以上4个点代入式(3)可得到辅助面方程为: $H_{01} = 7.6364x_1 + 5.6364x_2 + 1; H_{11} = -0.3636x_1 + 1.6364x_2 + 1; H_{21} = 0.3636x_1 - 1.6364x_2 + 1; H_{31} = -7.6364x_1 -$

$$5.6364x_2 + 1。 \text{ 则 } \omega_{11} = \begin{cases} 7.6364, & S_{11} < 0, S_{21} < 0 \\ -0.3636, & S_{11} < 0, S_{21} \geq 0 \\ 0.3636, & S_{11} \geq 0, S_{21} < 0 \\ -7.6364, & S_{11} \geq 0, S_{21} \geq 0 \end{cases};$$

$$\omega_{12} = \begin{cases} 5.6364, & S_{11} < 0, S_{21} < 0 \\ 1.6364, & S_{11} < 0, S_{21} \geq 0 \\ -1.6364, & S_{11} \geq 0, S_{21} < 0 \\ -5.6364, & S_{11} \geq 0, S_{21} \geq 0 \end{cases}。$$

3) 设计控制器。

① 假设初始点为 $x_1(0) = 0, x_2(0) = -0.5$ 。

② 传统滑模控制器为 $u = (g(x))^{-1} * [-N \cdot \text{sign } S - f(x) - x_1]$, 趋近律 $N = 0.4$, 切换面 $S = x_1 + x_2$ 。

③ 单向辅助面滑模控制器为 $u = (g(x) * \omega_1)^{-1} * [N - \omega_1 * f(x) - \omega_2 * x_1]$, 因系统状态为一维, 单向辅助面也为一维, 故 $\omega_1 = \{\omega_{11}\}, \omega_2 = \{\omega_{22}\}$, 趋近律 $N = 0.4$ 。

④ 基于幂次趋近律的单向辅助面滑模控制器为 $u = (g(x) * \omega_1)^{-1} * [N - \omega_1 * f(x) - \omega_2 * x_1]$, 其中, $N = \lambda(M-H)^\alpha$, 取 $\lambda = 0.4, \alpha = 7/9$ 。

同上可知, $\omega_1 = \{\omega_{11}\}, \omega_2 = \{\omega_{22}\}$ 。

计算可得 $Z_1(x(0)) = 2.8182$ 。且系统在有限时间 T_1

内收敛到滑模面 (S_{11} 或 S_{21}): $T_i \leq \frac{1}{\lambda_i} \frac{1}{1-\alpha} [Z_i(x_i(0))]^{1-\alpha} =$

14.1626。

传统滑模控制仿真见图 3、图 4。

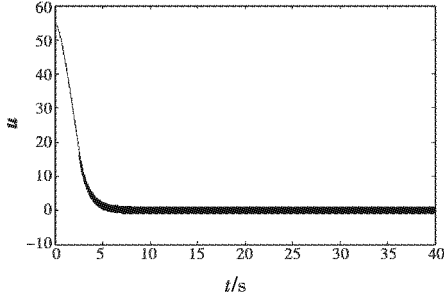


图 3 控制器 u 仿真图

Fig. 3 Simulation diagram of controller u

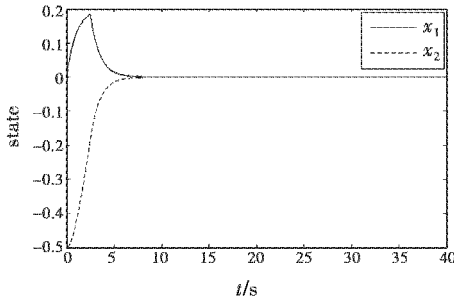


图 4 状态 x_1, x_2 仿真图

Fig. 4 Simulation diagram of states x_1 and x_2

单向辅助面滑模控制仿真见图 5 ~ 图 7。

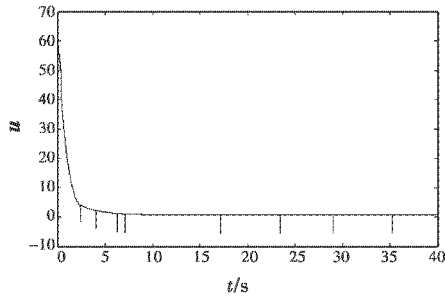


图 5 控制器 u 仿真图

Fig. 5 Simulation diagram of controller u

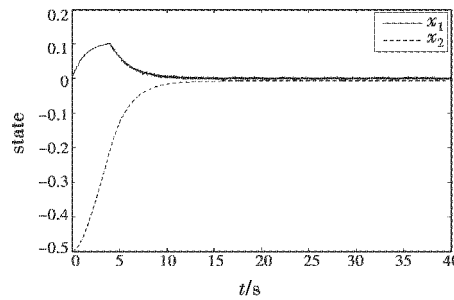


图 6 状态 x_1, x_2 仿真图

Fig. 6 Simulation diagram of states x_1 and x_2

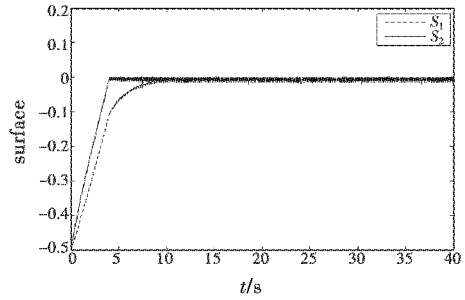


图 7 切换面 S_1, S_2 仿真图

Fig. 7 Simulation diagram of switching surfaces S_1 and S_2

基于幂次趋近律的单向辅助面滑模控制器仿真见图 8 ~ 图 10。

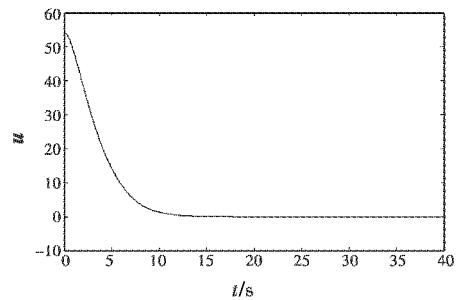


图 8 控制器 u 仿真

Fig. 8 Simulation diagram of controller u

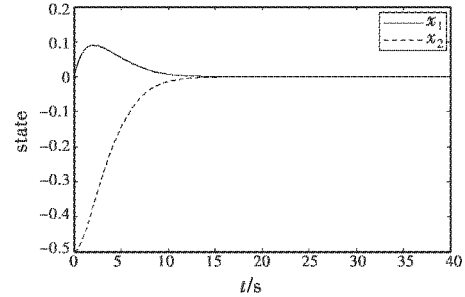


图 9 状态 x_1, x_2 仿真图

Fig. 9 Simulation diagram of states x_1 and x_2

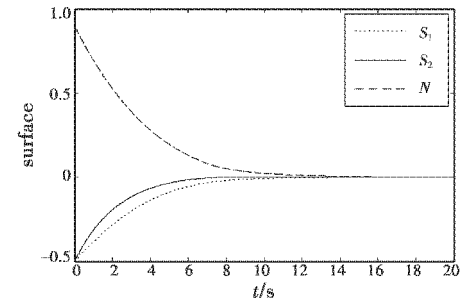


图 10 切换面 S_1, S_2 仿真图

Fig. 10 Simulation diagram of switching surfaces S_1 and S_2

对比图 3、图 5、图 8 可得,传统滑模控制器的抖振较严重,单向辅助面滑模控制器的抖振程度次之,基于幂次趋近律的单向辅助面滑模抗抖振性比较好,基本

没有特别明显的抖振。比较图4、图6、图9可得,传统滑模和单向辅助面滑模状态在收敛过程中有比较严重的抖振现象,基于幂次趋近律的单向辅助面滑模抖振比较小;由图10可知,基于幂次趋近律的单向辅助面滑模控制器,仅当两个切换面都趋近于零时,趋近律才为零,确保系统状态在切换面附近的趋近速度,即当且仅当系统状态位于原点处趋近律为零。从以上的对比分析可知,传统滑模控制抖振比较严重,容易影响系统的性能;单向辅助面滑模控制器削弱了抖振现象,但是还是存在比较明显的抖振。基于幂次趋近律的单向辅助面滑模,能有效地抑制抖振,提高了控制器的性能,增强了在工程上的实用性。

4 结束语

本文研究了不同切换面和趋近律对滑模运动的抖振的影响。提出一种基于幂次趋近律的单向辅助面滑模控制器,较之传统滑模,二者有不同的切换面,趋近律也不同,该方法能够在去除抖振的同时确保系统状态在切换面附近的趋近速度,即当且仅当系统状态位于原点处趋近律为零,增强了滑模控制方法在工程上的实用性。

参考文献

- [1] 高为炳. 变结构控制的理论及设计方法[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
GAO W B. Theory and design methods of variable structure control[M]. Beijing: Science Press, 1998.
- [2] WANG X, Chen W D. Fuzzy sliding mode constrained input control for robotic manipulators based on systemic state [C]//Innovative Computing, Information and Control, Beijing, 2006, 1:445-449.
- [3] 张晓宇, 苏宏业. 滑模变结构控制理论进展综述[J]. 化工自动化及仪表, 2006, 33(2): 1-8.
ZHANG X Y, SU H Y. Survey on the developments of sliding mode variable structure control theory[J]. Control and Instruments in Chemical Industry, 2006, 33(2): 1-8.
- [4] 张红. 非线性系统的滑模变结构控制理论研究[D]. 大庆: 大庆石油学院, 2008.
ZHANG H. Research on sliding mode control theory of nonlinear system[D]. Daqing: Daqing Petroleum Institute, 2008.
- [5] SLOTINE J J E, HEDIRCK J K, MISAWA E A. Nonlinear state estimation using sliding observers[J]. Decision and Control, 1986, 25: 332-339.
- [6] KACHROO P. Existence of solutions to a class of nonlinear convergent chattering-free sliding mode control systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(8): 1620-1624.
- [7] CHEN S Y, LIN F J. Robust nonsingular terminal sliding-mode control for nonlinear magnetic bearing system[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011, 19(3): 636-643.
- [8] 杨玲玲, 章云, 陈小龙. 一类不确定性系统的模糊边界层滑模控制[J]. 系统仿真学报, 2009(22): 7262-7265.
YANG L L, ZHANG Y, CHEN X L. Sliding mode control with fuzzy boundary layer for a class of uncertain nonlinear systems[J]. Journal of System Simulation, 2009(22): 7262-7265.
- [9] 赵文杰, 刘吉臻. 一种改进的边界层滑模控制方法[J]. 系统仿真学报, 2005, 17(1): 156-158.
ZHAO W J, LIU J Z. An improved method of sliding mode control with boundary layer[J]. Journal of System Simulation, 2005, 17(1): 156-158.
- [10] 傅健, 吴庆宪, 姜长生, 等. 连续非线性系统的滑模鲁棒正不变集控制[J]. 自动化学报, 2011, 37(11): 1395-1401.
FU J, WU Q X, JIANG C S, et al. Robust sliding mode positively invariant set for nonlinear continuous system [J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(11): 1395-1401.
- [11] 傅健, 吴庆宪, 姜长生, 等. 带状态约束的非线性系统单向辅助面滑模控制[J]. 控制与决策, 2011, 26(9): 1288-1294.
FU J, WU Q X, JIANG C S, et al. Robust sliding mode control with unidirectional auxiliary surfaces for nonlinear system with state constraints[J]. Control and Decision, 2011, 26(9): 1288-1294.
- [12] 刘文秀. 三种趋近律下的倒立摆滑模控制器设计与实现[J]. 韶关学院学报, 2011, 32(10): 34-37.
LIU W X. Inverted pendulum's sliding mode controller design and implementation based on three linde of reaching law[J]. Journal of Shaoguan University, 2011, 32(10): 34-37.