

## 动中通多传感器融合超球体采样 UKF 姿态估计

李卓群, 贾维敏, 姚敏立, 伍宗伟, 赵建伟

(第二炮兵工程大学, 西安 710025)

**摘要:** 针对动中通系统低成本姿态估计计算复杂、易受侧滑角和机动加速度等外界因素干扰的问题, 提出一种基于超球体采样无迹卡尔曼滤波算法, 融合微机械陀螺、加速度计和单基线 GPS, 对载体姿态进行精确估计。为了提高姿态估计的实时性, 采用超球体采样减少无迹卡尔曼滤波器的采样点数量, 在不影响精度的前提下, 有效降低了算法的计算量; 此外, 加速度计姿态角测量值在加速、转弯行驶过程中会受到机动加速度的影响, 为解决这一问题, 通过单基线 GPS 提供的速度、侧滑角信息进行机动加速度补偿。行车实验表明, 提出的低成本姿态估计方法估计精度较高, 在降低成本的同时能够满足宽带移动卫星通信波束对准要求。

**关键词:** 多传感器融合; 姿态估计; UKF; 超球体采样

中图分类号: V271.4; TN927

文献标志码: A

文章编号: 1671-637X(2014)12-0076-05

## UKF Based Low-Cost Attitude Estimation Algorithm for Satcom-on-the-Move

LI Zhuo-qun, JIA Wei-min, YAO Min-li, WU Zong-wei, ZHAO Jian-wei

(The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

**Abstract:** The low-cost attitude estimation algorithm for Sitcom-on-the-Move (SOTM) system is usually complicated, and easily affected by the maneuvering acceleration and the sideslip angle. To solve the problems, we proposed an algorithm based on the spherical simplex transformation Unscented Kalman Filter (UKF), which fused the information from micromechanical gyroscope, accelerator and GPS for estimating the attitude accurately. To improve the real-time performance, the filter used the spherical simplex transformation to reduce the number of sigma points for speeding up the calculation, reducing the computation load and providing better filtering performance. The GPS-measured velocity was used to compensate for the maneuvering acceleration, and the sideslip angle was used to further correct the maneuvering acceleration when the vehicle was turning. Experimental results show that the low-cost attitude estimation algorithm is feasible for attitude stabilization of SOTM in both pitch angle and roll angle with accuracy of  $\pm 0.5^\circ$ .

**Key words:** multi-sensor fusion; attitude estimation; unscented Kalman filter; spherical simplex transformation

### 0 引言

动中通是基于同步轨道卫星宽带移动通信的地面接收系统, 它不但具有卫星通信覆盖区域广、通信距离远、组网灵活、不受地形地域限制和传输线路稳定可靠等优点, 还真正实现了宽带、移动通信的目的<sup>[1]</sup>, 同时在保密性、隐蔽性方面也具有很强的优势。因此, 动中通在军、民领域都有着广阔的应用前景<sup>[2]</sup>。

为了实现运动中的卫星通信, 时刻与卫星保持通

畅的通信链路, 需要靠测控系统完成天线的稳定和天线波束的实时对准, 隔离载体运动对天线的影响。国内常采用高精度惯性器件和姿态航向参考系统, 造价高昂, 极大限制了动中通的推广及应用, 为了降低动中通成本, 基于微机械惯性传感器的姿态稳定系统成为研究的热点和难点<sup>[3]</sup>。但微机械惯性传感器的输出中带有不确定性误差, 因此需借助其他传感器进行辅助和误差校正来融合估计。

载体的姿态估计是一个典型的非线性问题, 但在非线性估计领域还没有一种算法能兼顾估计精度、实现难易程度、数值稳健性及计算量等各种指标, 因此必须根据具体应用场合和条件综合权衡<sup>[4]</sup>。文献[5]利

用扩展卡尔曼滤波算法(EKF)融合陀螺和加速度计信息进行姿态估计,同时利用自适应算法去除机动加速度对姿态估计带来的影响。但是,由于低成本 MEMS 陀螺漂移较大、速度计测量噪声较大以及磁阻传感器易受电磁干扰的影响,因此姿态估计精度不高。文献[6]在传感器直接融合中加入参数自适应算法,减少了机动加速度的影响,但是在载体动态特性较大时不能保证长期估计精度。

本文针对降低动中通成本和满足天线波束对准精度要求,提出一种基于 UKF 算法,融合单基线 GPS、微机械陀螺和加速度计信息进行实时姿态估计的方法。该方法以微机械陀螺输出信息作为算法的状态量,加速度计和单基线 GPS 的输出信息作为算法的观测量,并利用单基线 GPS 测量的速度信息和侧滑角信息进行机动加速度补偿和侧滑角补偿。通过无迹卡尔曼滤波器对姿态和陀螺漂移误差进行估计。为了降低计算复杂度,使用超球体采样减少传统 UKF 的采样点数,提高算法的实时性,在不影响精度的前提下,有效地降低了算法的计算量。

## 1 载体姿态确定

定义坐标系:1) 地理坐标系  $n(o_nx_ny_nz_n)$ , 坐标轴指向北、东、地, 地理坐标系也是惯性器件测量的绝对参考系;2) 载体坐标系  $b(o_bx_by_bz_b)$ , 坐标系与车体固联, 坐标轴指向车体前进方向、右侧、下方, 分别对应载体的横滚轴、俯仰轴和航向轴。

姿态表示常用方法有四元数法、欧拉角法、方向余弦矩阵法等。本文使用四元数作为算法状态量。四元数定义为  $\mathbf{q} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ 。

四元数  $\mathbf{q}$  随时间变化过程的等式传递为

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\Omega(\omega)\mathbf{q} \quad (1)$$

式中,  $\omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ , 为陀螺输出的三轴角速率。

虽然姿态解算中采用四元数表示法,但是直观描述还需要将四元数转换成欧拉角,四元数与欧拉角的转化关系为

$$\begin{cases} \psi = \arctan\left(\frac{2(q_1q_2 - q_0q_3)}{q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2}\right) \\ \theta = \arcsin(2(q_0q_1 + q_2q_3)) \\ \varphi = \arctan\left(\frac{2(q_0q_2 - q_1q_3)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2}\right) \end{cases} \quad (2)$$

陀螺置于载体上,可以测量出载体的角速率信息。基于欧拉角的姿态更新形式为<sup>[6]</sup>

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \varphi \tan \theta & \cos \varphi \tan \theta \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi / \cos \theta & \cos \varphi / \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中:  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  表示载体坐标系  $x, y, z$  轴的角速率;  $\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$  分别对应横滚角、俯仰角和航向角。

三轴加速度计的输出即重力矢量  $\mathbf{g}$  在载体坐标系的分量,重力矢量  $\mathbf{g}$  在北东地坐标系的坐标为  $(0, 0, g)$ , 则可得三轴加速度计的输出为<sup>[7]</sup>

$$\begin{cases} \theta = -\arcsin a_x \\ \phi = \arctan(a_y/a_z) \end{cases} \quad (4)$$

式中:  $a_x, a_y, a_z$  为加速度计测量值;  $\theta, \phi$  分别为横滚角和俯仰角。

单基线 GPS 两端各有一个天线, 通过两天线测量的 GPS 载波相位差, 可求出载体的准确的航向角  $\psi$ , 并且可以得到速度信息<sup>[8]</sup>, 根据速度信息又可求出航迹角为

$$\psi_v = \arctan(v_E/v_N) \quad (5)$$

式中,  $v_E, v_N$  分别为地理坐标系下的东向速度和北向速度。

## 2 机动加速度补偿

### 2.1 加速度补偿

由于加速度通过测量重力信息得到俯仰角和横滚角, 因此, 载体的机动加速度会对其产生较大的干扰。利用 GPS 测得的速度信息对其进行补偿。由 GPS 提供的速度信息导出载体的速度为

$$V = \sqrt{v_E^2 + v_N^2 + v_t^2} \quad (6)$$

式中,  $v_E, v_N, v_t$  分别是地理坐标系下的东向速度、北向速度和地向速度。则可分别得出线性加速度和径向加速度  $\mathbf{a}_x = \omega_z \times V, \mathbf{a}_y = dV/dt$ , 则加速度补偿后的姿态角为<sup>[9]</sup>

$$\begin{cases} \theta_m = \arcsin(f_x - a_x) \\ \phi_m = -\arctan((f_y - a_y)/f_z) \end{cases} \quad (7)$$

### 2.2 侧滑角补偿

侧滑角是当载体在航向角发生变化时, 速率航向  $\psi_v$  与载体航向  $\psi$  之差。如图 1 所示。

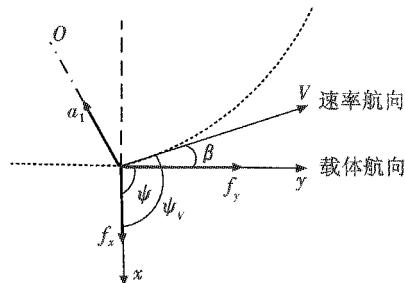


图 1 载体转弯产生侧滑角示意图

Fig. 1 Sideslip angle resulted from vehicle turning

此时, 需进一步补偿侧滑角对机动加速度补偿的影响<sup>[10]</sup>。根据车体运动的几何关系, 可以得出载体坐

标系  $x$  轴和  $y$  轴的机动加速度  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y$  为

$$\begin{cases} \mathbf{a}_x = \dot{V} \cos \beta - (V \cdot \omega_z + V \cdot \dot{\beta}) \sin \beta \\ \mathbf{a}_y = -\dot{V} \sin \beta - (V \cdot \omega_z + V \cdot \dot{\beta}) \cos \beta \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $V \cdot \dot{\beta}$  为侧滑角引起的向心加速度。利用式(8)进一步对机动加速度进行补偿, 可以更好地提高机动加速度计的补偿精度。

### 3 UKF 融合算法

#### 3.1 超球体采样

UKF 计算量与 Sigma 点的数量成正比, 采样点越多, 计算量越大。对于  $n$  维状态矢量, 标准 UKF 采用对称采样策略, 需要  $2n+1$  个 Sigma 点来近似状态的概率分布。超球体采样在空间上呈现超球体形状, 其他 Sigma 点到中心点的距离相同且权值不变。对于  $n$  维分布状态空间, 需要  $n+1$  个采样点来描述其均值和方差, 这样由  $n+1$  个超球体分布采样点和状态的均值点共同构成了  $n+2$  个采样点, 与对称采样相比, 超球体采样 Sigma 点个数由  $2n+1$  个降到  $n+2$  个, 计算量明显减少。Sigma 点求取如下所述。

1) 选择  $0 \leq W_0 \leq 1$ 。

2) 确定 Sigma 权值。

$$W_i = \frac{1 - W_0}{n+1} \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \quad (9)$$

3) 比例修正。

$$\omega_i = \begin{cases} 1 + (W_0 - 1)/\alpha^2 & i = 0 \\ W_i/\alpha^2 & i \neq 0 \end{cases} \quad (10)$$

式中,  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$  为缩放因子, 通过  $\alpha$  可控制采样点与均值  $x$  的距离。

4) 初始化向量序列。

$$\begin{cases} \chi_0^1 = [0] \\ \chi_1^1 = \left[ -\frac{1}{\sqrt{2\omega_1}} \right] \\ \chi_2^1 = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\omega_1}} \right] \end{cases} \quad (11)$$

5) 对于输入维数  $j=2, \dots, n$  时, 迭代式为

$$\chi_j^i = \begin{cases} \left[ \begin{matrix} \chi_0^j \\ 0 \end{matrix} \right] & i = 0 \\ \left[ \begin{matrix} \chi_j^i \\ -\frac{1}{\sqrt{j(j+1)\omega_1}} \end{matrix} \right] & i = 1, \dots, j \\ \left[ \begin{matrix} 0_{j-1} \\ \frac{j}{\sqrt{j(j+1)\omega_1}} \end{matrix} \right] & i = j+1 \end{cases} \quad (12)$$

式中:  $j$  为向量的维数;  $i$  为采样点的顺序。

6) 对于任意的均值  $\bar{x}$  和协方差  $\mathbf{P}_x$ , Sigma 可以由下式获得

$$\chi_i = \bar{x} + S \chi_j^i \quad i = 0, 1, \dots, n+1 \quad (13)$$

式中,  $S$  为协方差矩阵  $\mathbf{P}_x$  经 Cholesky 因式分解后的平方根矩阵。

#### 3.2 UKF 算法

由于微机械陀螺具有较大的常值漂移和随机噪声, 因此需要辅助传感器来实时修正其角度零偏, 而且要对其零偏进行实时估计和补偿, 所以将陀螺零偏引入状态变量实时估计。状态变量定义为

$$\mathbf{X} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ b_x \ b_y \ b_z]^T \quad (14)$$

式中,  $b_x, b_y, b_z$  为三轴陀螺零偏, 非线性状态方程为

$$\dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}) = \left[ \frac{1}{2} \Omega(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{b} - \boldsymbol{\eta}) \mathbf{q} \right] \quad (15)$$

式中:  $\mathbf{b} = [b_x \ b_y \ b_z]^T$ , 为陀螺零偏;  $\boldsymbol{\eta}$  是过程噪声向量, 得到状态噪声协方差  $\mathbf{Q}$ 。

设离散非线性系统满足

$$\mathbf{X}_k = \mathbf{F}_{k,k-1} \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{W}_{k-1} \quad (16)$$

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k + V_k \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{X}_k$  为状态向量;  $\mathbf{F}_{k,k-1}$  为  $t_{k-1}$  时刻至  $t_k$  时刻的状态一步转移矩阵;  $\mathbf{Y}_k$  为观测向量;  $\mathbf{H}_k$  为量测矩阵;  $\mathbf{W}_k \sim N(0, \mathbf{Q})$  为系统噪声序列;  $V_k \sim N(0, \mathbf{R})$  为量测噪声序列。UKF 状态估计如下所述。

1) 初始化。

$$\hat{\mathbf{X}}_0 = E[\hat{\mathbf{X}}_0] \quad (18)$$

$$\mathbf{P}_0 = E[(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)(\mathbf{X}_0 - \hat{\mathbf{X}}_0)^T] \quad (19)$$

2) Sigma 点选取。

$$\mathbf{X}_{k-1} = [\hat{\mathbf{X}}_{k-1} \ S_{k-1} C_{k-1}] \quad (20)$$

式中:  $S$  为协方差矩阵  $\mathbf{P}_x$  经 Cholesky 因式分解后的平方根矩阵;  $C$  为采样点矩阵;  $k \in \{1, \dots, \infty\}$ 。

3) 状态估计。

时间更新为

$$\mathbf{X}_{k/k-1} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_{k-1}, k-1) \quad (21)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{\bar{k}} = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{W}_i \mathbf{X}_{i,k/k-1} \quad (22)$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1} = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{W}_i [\mathbf{X}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{\bar{k}}][\mathbf{X}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{\bar{k}}]^T + \mathbf{Q} \quad (23)$$

$$\mathbf{Y}_{k/k-1} = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_{k/k-1} \quad (24)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{\bar{k}} = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{W}_i \mathbf{Y}_{i,k/k-1} \quad (25)$$

量测更新为

$$\mathbf{P}_{\hat{Y}_k \hat{Y}_k} = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{W}_i [\mathbf{Y}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{Y}}_{\bar{k}}][\mathbf{Y}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{Y}}_{\bar{k}}]^T + \mathbf{R} \quad (26)$$

$$\mathbf{P}_{X_k Y_k} = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{W}_i [\mathbf{X}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{X}}_{\bar{k}}][\mathbf{Y}_{i,k/k-1} - \hat{\mathbf{Y}}_{\bar{k}}]^T \quad (27)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{X_k Y_k} \mathbf{P}_{\hat{Y}_k \hat{Y}_k}^{-1} \quad (28)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k/k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_{\hat{Y}_k \hat{Y}_k} \mathbf{K}_k^T \quad (29)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \hat{\mathbf{X}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{Y}_k - \hat{\mathbf{Y}}_{k-1}) \quad (30)$$

UKF 算法流程如图 2 所示。

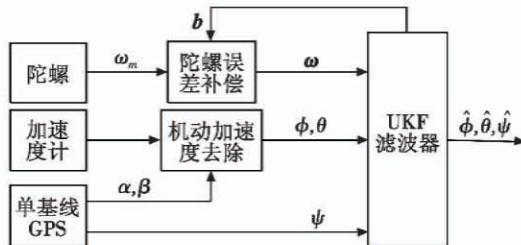


图 2 UKF 算法流程图

Fig. 2 Flow chart of the UKF

#### 4 实验分析

本文选用星网宇达公司的微机械 IMU 产品 XW-IMU5220, 包含 3 个正交放置的陀螺以及 3 个加速度计, 单基线 GPS 产品 XW-ADU3601。

将型号为 XW-ADU7612 的 AHRS(姿态精度满足  $\pm 0.2^\circ$ )与 IMU 固联并一同安装在载体上, 作为验证算法的基准。进行行车试验, 采集数据, 并用得到的数据进行姿态角估计, 验证算法的精度与实时性。处理器型号为 i5-3337u, 内存 4 G, 如图 3 所示。

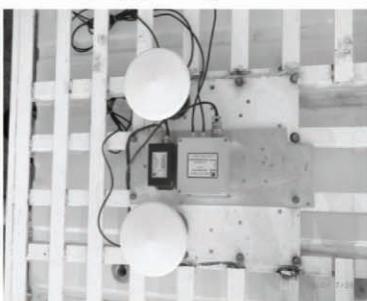


图 3 实验设备

Fig. 3 Laboratory equipment

图 4~图 7 分别为 EKF 和超球体采样 UKF 的姿态角估计值与真实值的比较及误差; 表 1 为 EKF, UKF 和超球体采样 UKF 的姿态角估计误差及运算时间比较。

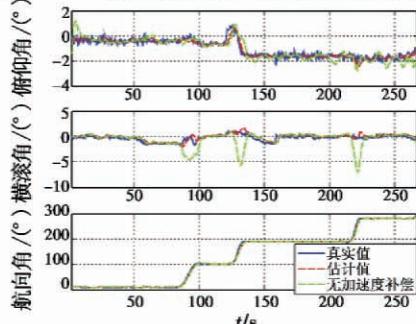


图 4 EKF 姿态角估计

Fig. 4 The attitude estimated by EKF

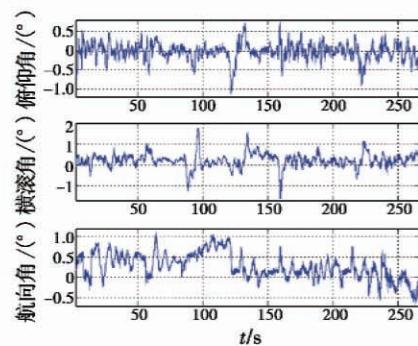


图 5 EKF 姿态角估计误差

Fig. 5 Attitude error of EKF

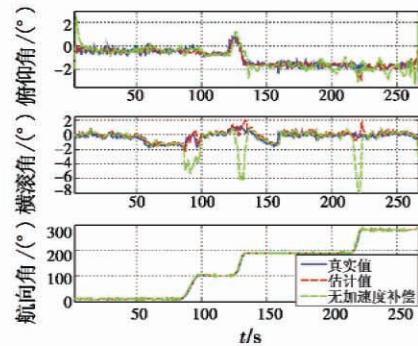


图 6 超球体采样 UKF 姿态角估计

Fig. 6 The attitude estimated by spherical simplex transformation UKF

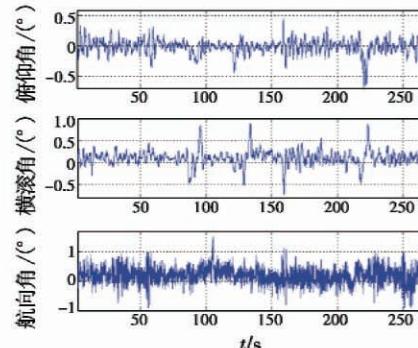


图 7 超球体采样 UKF 姿态角估计误差

Fig. 7 Attitude error of spherical simplex transformation UKF

表 1 EKF、UKF 与超球体采样 UKF 误差及时间

Table 1 Attitude error statistics and time used for the test

算法	均方误差/(°)			时间/s
	航向角	俯仰角	横滚角	
EKF	0.634	0.232	0.402	0.953
UKF	0.586	0.124	0.201	1.309
超球体	0.586	0.124	0.202	1.093

从图中可以看出, 超球体采样 UKF 的估计误差要小于 EKF, 姿态角可控制在  $1^\circ$  以内, 多数情况下输出精度在  $0.5^\circ$  左右, 仅在长时间的转弯时, 航向角有不到  $2^\circ$  的误差。表 1 对比了 3 种算法的精度及运算时间, 通过对比 EKF 和 UKF 可以发现 UKF 算法精度优于 EKF, 但是以增加计算量、牺牲运算时间为代价, 因此采用超球体采样来进行算法改进, 提升运算效率, 增

加算法实时性。在实际使用中,超球体采样 UKF 算法可提升姿态估计精度,缩短反应时间,降低处理器功耗,对低成本动中通姿态估计的应用有着重要意义。

## 5 结束语

本文采用超球体采样 UKF 算法融合微机械陀螺、加速度计和单基线 GPS 信息的动中通低成本姿态估计方案,解决了传感器受机动加速度和侧滑角等外界干扰时估计精度差的问题。针对 EKF 精度不高、传统 UKF 计算量大的问题,采用超球体采样 UKF 算法,提高了算法精度的同时缩短了运算时间,并使姿态估计效率明显改进,对低成本动中通姿态估计有着重要的实际意义。实验结果表明:超球体采样 UKF 滤波算法计算相对简单,实时性好,姿态估计精度较高,很好地满足了低成本宽带移动卫星通信波束对准要求。

## 参考文献

- [1] JUNG Y B, EOM S Y, JEONS I. Novel antenna system design for satellite mobile multimedia service [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2010, 59(9) : 4237-4247.
- [2] 田方浩,姚敏立,周淑华,等.宽带移动卫星通信系统 LCAE 算法[J].西安交通大学学报,2013,47(6) : 64-68.  
TIAN F H, YAO M L, ZHOU S H, et al. The LCAE algorithm for broad-band mobile satellite communication system [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2013, 47 (6) : 64-68.
- [3] MAEDER U, MORARI M. Attitude estimation for vehicles with partial inertial measurement [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2011, 60(4) : 1496-1504.
- [4] 闫林波,贾维敏,姚敏立,等.基于扩展卡尔曼滤波的动中通低成本姿态估计[J].电光与控制,2013,20(7) : 53-57.  
YAN L B, JIA W M, YAO M L, et al. Low-cost attitude estimation based on extended Kalman filter for satcom-on-the-move [J]. Electronics Optics & Control, 2013, 20(7) : 53-57.
- [5] 沈晓卫,姚敏立,李琳琳,等.宽带移动卫星通信低成本组合姿态确定算法[J].西安交通大学学报,2011,45(6) : 64-68.  
SHEN X W, YAO M L, LI L L, et al. A hybrid attitude determination method with low cost for broadband mobile satellite communication [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2011, 45(6) : 64-68.
- [6] TITTERTON D H, WESTON J L. 捷联惯性导航技术 [M]. 张天光,王秀萍,王丽霞,等译.2 版.北京:国防工业出版社,2007:27-31.
- [7] 伍宗伟,姚敏立,马红光,等.移动卫星通信低成本多传感器融合姿态估计方法[J].西安交通大学学报,2012,46(12) : 55-61.  
WU Z W, YAO M L, MA H G, et al. An attitude estimation method using multi-sensor fusion for low-cost mobile satellite communication [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2012, 46(12) : 55-61.
- [8] WU Z W, YAO M L, MA H G, et al. Low-cost antenna attitude estimation by fusing inertial sensing and two-antenna GPS for vehicle-mounted SatCom-on-the-move [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2013, 62(3) : 1084-1096.
- [9] GRIP H F, FOSSEN T I, JOHANSEN T A. Attitude estimation using biased gyro and vector measurements with time-varying reference vectors [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(5) : 1332-1338.
- [10] WU Z W, YAO M L, MA H G, et al. Low-cost attitude estimation with MIMU and two-antenna GPS for SatCom-on-the-move [J]. GPS Solutions, 2013, 17(1) : 75-87.

(上接第 75 页)

- [13] 杨波,王哲.舵面电动加载系统的自适应 CMAC 复合控制[J].北京航空航天大学学报,2010,36(3) : 333-337.  
YANG B, WANG Z. Adaptive CMAC hybrid control for rudder electric loading systems [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2010, 36(3) : 333-337.
- [14] 宋晶,王学勇.电动负载模拟器系统模型的建立与辨识[J].机械工程与自动化,2010(2) : 82-83.

SONG J, WANG X Y. Electric load simulator system establishment and identification of the model [J]. Mechanical Engineering & Automation, 2010(2) : 82-83.

- [15] 张洪锐,王青.最优控制理论与应用 [M].北京:高等教育出版社,2006:70-75.  
ZHANG H Y, WANG Q. Optimal control theory and application [M]. Beijing: Higher Education Press, 2006:70-75.