

## 多无人机编队保持轨迹的对偶优化设计

王建宏, 邱继栋

(中国电子科技集团公司第二十八研究所, 南京 210007)

**摘要:** 考虑多无人机编队保持优化模型的设计问题, 联合多无人机的运动学方程、性能指标及其约束构成一个约束优化问题。通过对指标函数的某种线性变换达到解耦的效果, 引入拉格朗日乘子矢量构造该约束优化问题的拉格朗日函数。对于对偶问题中出现的两类优化变量——基变量和对偶变量, 将所有基变量和对偶变量全转化为某一个对偶变量的关系式。对于该对偶变量求解, 采用凸算法中的梯度投影策略, 通过简单的代入运算可得到其他优化变量的数值。最后用仿真算例验证了该方法的有效性。

**关键词:** 多无人机; 编队保持; 对偶优化; 梯度投影算法

中图分类号: V279; TP273

文献标志码: A

文章编号: 1671-637X(2014)12-0015-05

## Dual Optimization Design for Multi-UAV Formation Keeping Trajectory

WANG Jian-hong, QIU Ji-dong

(The 28th Research Institute of China Electronics Technology Group Corporation, Nanjing 210007, China)

**Abstract:** To the problem of how to design a multi-UAV formation keeping optimization model, we combined the kinematic equation of multi-UAV, performance index and constrained condition together to construct a constrained optimization problem. After transformation was made to the performance function to decouple the optimization problem, we introduced the Lagrange multiplier vector to construct a Lagrange function. To the two classes of optimization variables, the basic and dual variables, we found that all the basic and dual variables could be formulated to the expressions of one dual variable. Then the gradient projection method from the convex optimization was proposed to solve this dual variable. And the other optimization variables could also be obtained through simple substitution. Finally, the effectiveness of the proposed strategy was confirmed by the simulation example results.

**Key words:** multi-UAV; formation keeping; dual optimization; gradient projection algorithm

### 0 引言

编队控制是指多无人机在执行任务过程中, 如何形成并保持一定的几何构型, 以适应平台性能、战场环境、战术任务等要求的控制技术。多无人机编队控制主要解决两个问题: 一是编队构成或重构; 二是编队保持, 包括飞行中编队保持问题。

对于单机航迹规划的研究较多, 因单机航迹规划是多无人机编队的一种特例, 而目前研究重心已转向多无人机编队轨迹规划。文献[1]介绍多无人机编队轨迹设

计在多基地、多无人机协同侦察过程中的辅助作用; 文献[2]在多无人机编队建模中引入智能化的多 Agent 系统, 并以此来代表各无人机间的通信结构; 文献[3]介绍无人机路径规划的各种方法, 如蚁群算法、遗传算法、粒子群算法、单元分解法、人工势能场法、路标图法、概率路标法等。所有这些路径规划方法都从不同角度刻画单机或多机的任务目标以及在执行各自任务时的不同限制条件。联合最小化任务目标及约束条件构成一个最优化问题, 对此最优化问题采用智能算法来求解。文献[4]从灰色系统理论来调整智能算法中所涉及的权重值; 文献[5]从信息融合的角度分析怎样对多无人机上的多个传感信息进行融合, 以得到建模过程中的状态融合估计值; 文献[6]将粒子滤波算法应用于非高斯条件下的路径跟踪; 文献[7]提出一种改进的交互

收稿日期: 2013-12-19

修回日期: 2014-02-27

基金项目: 江西省教育厅自然科学基金(GJJ13628)

作者简介: 王建宏(1980—), 男, 江西吉安人, 博士后, 副教授, 研究方向为系统辨识与数值优化。

式多模型粒子滤波算法,并将此新算法应用于无人机的目标跟踪;文献[8]考虑多目标优化的蚁群算法,通过引入一个权重值使多目标优化可等价地转换为常见的单目标优化问题;文献[9]利用一致设计的遗传算法来求解多目标优化问题。

本文将凸优化算法应用于多无人机编队保持轨迹优化中。建立的多无人机编队保持轨迹优化模型中,联立最优化问题的目标函数和各约束条件来构造对应的拉格朗日函数。因拉格朗日函数中存在两类优化变量——基变量和对偶变量,利用最优必要条件对拉格朗日函数关于基变量取最小化运算,可得若干等式。从而将原带有约束条件的优化问题转化为无约束优化问题,并将所有变量的确定转化为对此对偶变量的求取<sup>[10]</sup>。对此对偶变量的求解,利用对偶函数的最大化过程来获取。将较通用的梯度投影算法应用于对偶函数的最大化来求解此对偶变量。当此对偶变量被求解出来后,逐一代入至各个关系式中可得所有基变量和对偶变量。

## 1 多无人机编队保持轨迹模型

针对自由终端条件下的轨迹优化问题建模<sup>[11]</sup>,通过合理选择无人机平台的终端状态以减小编队的能量损耗。定义第*i*架无人机的能量函数为

$$E_i(t) = h_i(t) + \frac{v_i^2(t)}{2g} = s_i'(t) \mathbf{Q} s_i(t) + \mathbf{c}' s_i(t) \quad (1)$$

式中:矢量 $\mathbf{c}$ 和矩阵 $\mathbf{Q}$ 分别为 $\mathbf{c} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ ,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2g} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2g} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2g} \end{bmatrix}; E_i(t) \text{ 为 } t \text{ 时刻第 } i \text{ 架无人机的}$$

的等效总能量,是无人机势能与动能之和; $h_i(t)$ 为无人机位置坐标分量; $v_i(t)$ 为无人机的飞行速度; $s_i(t)$ 为三自由无人机质点运动模型在某坐标变换下的状态变量。多架无人机编队飞行过程中,无人机需同时实现跟踪参考航线,减少能量损耗及保持编队几何结构等多个控制目标。其中,跟踪参考航线与减少能量损耗规定无人机的个体指标,保持编队几何结构则规定协同指标<sup>[12]</sup>。第*i*架无人机的个体指标包括减少能量损耗以及保持对参考轨迹的跟踪,定义为

$$J_i = \sum_{t=1}^T \{ \alpha_i [ s_i'(t) \mathbf{Q} s_i(t) + \mathbf{c}' s_i(t) ] + \beta_i [ z_i(t) - z_i^{\text{ref}}(t) ]' [ z_i(t) - z_i^{\text{ref}}(t) ] \} \quad (2)$$

式中:标量 $\alpha_i, \beta_i$ 为权重系数; $z_i^{\text{ref}}(t)$ 为无人机*i*需跟踪的参考轨迹。在有限中央控制的结构下,由编队长机规划航线,其余无人机只需保持与长机的相对位置<sup>[13]</sup>,因此当无人机*i*不为长机时取 $\beta_i = 0$ 。第*i*架无人机的协同指标使得编队内各无人机尽量保持指定的几何结构,无人机*i*与无人机*j*之间的协同指标定义为

$$J_{ij} = \sum_{t=1}^T \eta_i [ z_i(t) - z_j(t) - \Delta z_{ij}(t) ]' [ z_i(t) - z_j(t) - \Delta z_{ij}(t) ] \quad (3)$$

式中,标量 $\eta_i$ 为权重系数。将无人机指标函数式(2)、式(3)与无人机的运动学模型式(1)相结合,则多无人机编队保持的轨迹优化模型为

$$\min_{u_i(t), s_i(t)/i, t} \sum_{i=1}^T [ J_i + \sum_{j=1}^T J_{ij} ] \quad (4)$$

s. t.  $s_i(t+1) = \mathbf{A} s_i(t) + \mathbf{B} u_i(t), s_i(0) = s_i^0, \forall i \in \{0, \dots, I\}$ ,  $z_i(t) = \mathbf{C} s_i(t), u_i(t) \in U_i, s_i(t) \in S_i, \forall t \in \{1, \dots, I\}$ 。式中: $z_i(t)$ 为第*i*架无人机的观测变量; $U_i$ 与 $S_i$ 分别为无人机控制输入与状态变量的可行凸区域。在采样周期 $\Delta t$ 下,矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 均为离散模型下的状态和

$$\text{观测矩阵, 即 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} & 0 & 0 \\ \Delta t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ 0 & 0 & \Delta t \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

优化模型式(4)未给出无人机间的避碰约束,通常指定不同高度层来实现无人机间的避碰<sup>[14]</sup>,这可由无人机状态的可行区域 $S_i$ 给定。编队保持轨迹优化模型中,单架无人机的指标函数不仅取决于自身状态,还取决于其他无人机状态。若添加合适辅助决策变量与约束条件,可将耦合转移到约束中,并进行解耦。针对指标函数存在耦合特点,采用间接分解法实现问题解耦。记状态向量为 $s_i = (s_i'(1) \dots s_i'(T))'$ ,输入向量为 $u_i = (u_i(0) \dots u_i(T-1))'$ ,参考航线为 $z_i^{\text{ref}} = (z_i^{\text{ref}}(1) \dots z_i^{\text{ref}}(T))'$ ,定义 $T \times T$ 的单位矩阵 $\mathbf{I}_T$ ,并令 $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{Q}, \tilde{\mathbf{c}} = (\mathbf{c}' \dots \mathbf{c}')$ , $\mathbf{G} = \mathbf{I}_T \otimes \mathbf{C}$ ,将式(4)中的状态变量方程等式不断地递推改写为

$$s_i = \begin{bmatrix} s_i(1) \\ s_i(2) \\ \vdots \\ s_i(T) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^T \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} s_i^0 + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{AB} & \mathbf{B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{T-1} \mathbf{B} & \mathbf{A}^{T-2} \mathbf{B} & \dots & \mathbf{B} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} u_i \quad (5)$$

将式(5)简记为

$$s_i = \mathbf{E}s_i^0 + \mathbf{F}u_i \quad (6)$$

将式(6)代入式(4), 经过整理可得紧凑形式为

$$\min_{u_i(t), s_i(t), \tilde{s}_i} \sum_{i=1}^T [J_i(s_i, u_i) + \sum_{j=1}^T J_{ij}(s_i, s_j)] \quad (7)$$

$$\text{s. t. } s_i = \mathbf{E}s_i^0 + \mathbf{F}u_i$$

$$u_i(t) \in U_i, s_i(t) \in S_i, \forall t \in \{1, \dots, T\}$$

其中, 第  $i$  架无人机的个体指标为

$$J_i(s_i, u_i) = \alpha_i [s_i' \tilde{\mathbf{Q}}s_i + \tilde{\mathbf{c}}'s_i] + \beta_i [Gs_i - z_i^{\text{ref}}]' [Gs_i - z_i^{\text{ref}}] \quad (8)$$

无人机  $i$  与无人机  $j$  间的协同指标为

$$J_{ij}(s_i, s_j) = \eta_{ij} [Gs_i - Gs_j - \Delta z_{ij}]' [Gs_i - Gs_j - \Delta z_{ij}] \quad (9)$$

式中的列向量为  $\Delta z_{ij} = (\Delta z_{ij}(1) \ \dots \ \Delta z_{ij}(T))'$ 。

为使各无人机平台具有独立的指标函数需要对式(7)进行变换, 使得任意无人机的决策变量仅出现在自身的个体指标函数中, 引入辅助决策变量  $\tilde{s}_i$ :  $\tilde{s}_i = (\tilde{s}_{i1} \ \dots \ \tilde{s}_{ij} \ \dots \ \tilde{s}_{iT})'$ , 可得等价优化问题为

$$\min_{u_i(t), s_i(t), \tilde{s}_i} \sum_{i=1}^T [J_i(s_i, u_i) + \sum_{j=1}^T J_{ij}(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij})] \quad (10)$$

$$\text{s. t. } s_i = \mathbf{E}s_i^0 + \mathbf{F}u_i, u_i(t) \in U_i, s_i(t) \in S_i,$$

$$\tilde{s}_i = s_i, \tilde{s}_{ij} = \tilde{s}_j \quad \forall i, j \in [0, T].$$

最优化问题式(10)有 4 个变量  $\{u_i, s_i, \tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}\}$ , 对此约束优化问题可采用对偶优化设计策略。

## 2 对偶优化设计

引入适当维数的拉格朗日乘子矢量  $\lambda_i, \mu_i, \gamma_i$ , 则式(10)对应的拉格朗日函数为

$$L(s_i, u_i, \tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}) = \sum_{i=1}^T [L_i(s_i, u_i, \lambda_i, \mu_i) + \tilde{L}_i(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}, \mu_i, \gamma_i)] \quad (11)$$

其中, 所定义的两个量分别为

$$\begin{cases} L_i(s_i, u_i, \lambda_i, \mu_i) = J_i(s_i, u_i) + \lambda_i s_i - \lambda_i \mathbf{E}s_i^0 - \lambda_i \mathbf{F}u_i + \mu_i s_i \\ \tilde{L}_i(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}, \mu_i, \gamma_i) = \sum_{j=1}^T J_{ij}(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}) - \mu_i \tilde{s}_i + \gamma_i \tilde{s}_{ij} - \gamma_i \tilde{s}_j \end{cases} \quad (12)$$

式(11)的决策量分为对偶变量  $\{\lambda_i, \mu_i, \gamma_i\}_{i=1}^T$  和基变量  $\{u_i, s_i, \tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}\}_{i=1}^T$ , 则原优化问题的对偶函数为

$$\min_{\lambda_i, \mu_i, \gamma_i} \sum_{i=1}^T [L_i(s_i, u_i, \lambda_i, \mu_i) + \tilde{L}_i(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}, \mu_i, \gamma_i)]. \quad (13)$$

对于式(13)的无约束条件的最小化问题, 根据最优性必要条件应满足

$$\begin{cases} \frac{\partial L_i(s_i, u_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial s_i} = \frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial s_i} + \lambda_i + \mu_i = 0 \\ \frac{\partial L_i(s_i, u_i, \lambda_i, \mu_i)}{\partial u_i} = \frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial u_i} - \lambda_i \mathbf{F} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

对于式(14)中的偏导式继续展开得

$$\begin{cases} \frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial s_i} = 2\alpha_i \tilde{\mathbf{Q}}s_i + \alpha_i \tilde{\mathbf{c}} + 2\beta_i G(Gs_i - z_i^{\text{ref}}) \\ \frac{\partial J_i(s_i, u_i)}{\partial u_i} = [2\alpha_i \tilde{\mathbf{Q}}s_i + \alpha_i \tilde{\mathbf{c}} + 2\beta_i G(Gs_i - z_i^{\text{ref}})] \mathbf{F} \end{cases} \quad (15)$$

将式(15)代入式(14)中可得

$$2\alpha_i \tilde{\mathbf{Q}}s_i + \alpha_i \tilde{\mathbf{c}} + 2\beta_i G(Gs_i - z_i^{\text{ref}}) + \lambda_i + \mu_i = 0 \quad (16)$$

从中解出  $s_i$  为  $(2\alpha_i \tilde{\mathbf{Q}} + 2\beta_i GG)s_i = 2\beta_i Gz_i^{\text{ref}} - \alpha_i \tilde{\mathbf{c}} - \lambda_i - \mu_i$ , 因  $s_i$  表示状态变量, 对其取逆运算可得

$$s_i = (2\alpha_i \tilde{\mathbf{Q}} + 2\beta_i GG)^{-1} (2\beta_i Gz_i^{\text{ref}} - \alpha_i \tilde{\mathbf{c}} - \lambda_i - \mu_i) \quad (17)$$

又因式(14)的第 2 个等式有

$$2\alpha_i \tilde{\mathbf{Q}}s_i + \alpha_i \tilde{\mathbf{c}} + 2\beta_i G(Gs_i - z_i^{\text{ref}}) = \lambda_i \quad (18)$$

将式(18)代入式(14)的第 1 个等式有

$$\lambda_i + \lambda_i + \mu_i = 0$$

即得

$$\mu_i = -2\lambda_i \quad (19)$$

将式(19)再代入式(17)可得第 1 个基变量  $s_i$  为

$$s_i = (2\alpha_i \tilde{\mathbf{Q}} + 2\beta_i GG)^{-1} (2\beta_i Gz_i^{\text{ref}} - \alpha_i \tilde{\mathbf{c}} + \lambda_i) \quad (20)$$

再根据状态方程可得第 2 个基变量  $u_i$  为

$$u_i = \mathbf{F}^{-1} (s_i - \mathbf{E}s_i^0) \quad (21)$$

由式(19)~式(21)可知: 两基变量  $\{u_i, s_i\}_{i=1}^T$  都能改写为对偶变量  $\{\lambda_i\}_{i=1}^T$  的关系式, 且对偶变量  $\{\mu_i\}_{i=1}^T$  也为  $\{\lambda_i\}_{i=1}^T$  的关系式, 即表明若对偶变量  $\{\lambda_i\}_{i=1}^T$  能被求解出来, 则  $\{u_i, s_i, \mu_i\}_{i=1}^T$  只需代入  $\{\lambda_i\}_{i=1}^T$  的数值即得。对式(13)第 2 个目标函数应用最优必要条件可得

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{L}_i(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}, \mu_i, \gamma_i)}{\partial \tilde{s}_i} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{L}_i(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij}, \mu_i, \gamma_i)}{\partial \tilde{s}_{ij}} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

对式(22)展开整理可得

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^T \frac{\partial J_{ij}(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij})}{\partial \tilde{s}_i} - \mu_i - \gamma_i = 0 \\ \sum_{j=1}^T \frac{\partial J_{ij}(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij})}{\partial \tilde{s}_{ij}} + \gamma_i = 0 \end{cases} \quad (23)$$

分别对两偏导数计算可得

$$\begin{cases} \frac{\partial J_{ij}(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij})}{\partial \tilde{s}_i} = \eta_{ij} G[G\tilde{s}_i - G\tilde{s}_{ij} - \Delta z_{ij}] \\ \frac{\partial J_{ij}(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij})}{\partial \tilde{s}_{ij}} = -\frac{\partial J_{ij}(\tilde{s}_i, \tilde{s}_{ij})}{\partial \tilde{s}_i} \end{cases} \quad (24)$$

将式(24)代入式(23)中可得

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^T \eta_{ij} G[G\tilde{s}_i - G\tilde{s}_{ij} - \Delta z_{ij}] = \mu_i + \gamma_i \\ \eta_{ij} G[G\tilde{s}_i - G\tilde{s}_{ij} - \Delta z_{ij}] = \gamma_i \end{cases} \quad (25)$$

由上式可明显得到  $\sum_{j=1}^r \gamma_j = \mu_i + \gamma_i$ , 即有

$$\gamma_i = \frac{\mu_i}{I-1} = -\frac{2}{I-1}\lambda_i \quad (26)$$

上式表明对偶变量  $\{\gamma_i\}_{i=1}^r$  也为  $\{\lambda_i\}_{i=1}^r$  的关系式。对式(25)的第2个等式展开可得

$$\eta_i GG(\tilde{s}_i - \tilde{s}_y) = \gamma_i + \eta_i G\Delta z_{ij}$$

即有

$$\tilde{s}_i = \tilde{s}_y + (\eta_i GG)^{-1}(\gamma_i + \eta_i G\Delta z_{ij}) \quad (27)$$

将式(27)代入式(25)的第1个等式发现,根本未能求解两基变量  $\{\tilde{s}_i, \tilde{s}_y\}_{i=1}^r$ 。假设  $\tilde{s}_i$  和  $\tilde{s}_y$  之间存在一个线性仿射关系,即事先有

$$\tilde{s}_i = M\tilde{s}_y + m \quad (28)$$

将式(27)代入线性仿射关系式(29)中可得:  $M\tilde{s}_y + m = \tilde{s}_y + (\eta_i GG)^{-1}(\gamma_i + \eta_i G\Delta z_{ij})$ , 继续整理可得

$$\tilde{s}_y = (M-I)^{-1}[(\eta_i GG)^{-1}(\gamma_i + \eta_i G\Delta z_{ij}) - m] \quad (29)$$

综上所述:所有基变量和剩余对偶变量都与  $\{\lambda_i\}_{i=1}^r$  有关,  $\{\lambda_i\}_{i=1}^r$  的求解在整个优化问题中较重要。只要  $\{\lambda_i\}_{i=1}^r$  给定,将  $\{\lambda_i\}_{i=1}^r$  代入以上各关系式即可得原优化问题的所有决策变量。

将关系式都代入对偶函数式(13)中得到仅关于  $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_r)'$  的对偶优化问题为

$$\min_{\lambda} f(\lambda) = \min_{\lambda} \sum_{i=1}^r f_i(\lambda) = \min_{\lambda} \sum_{i=1}^r [L_i(\lambda_i) + \tilde{L}_i(\lambda_i)] \quad (30)$$

对式(30)采用梯度投影算法的步骤为

$$\begin{cases} \theta^k = \lambda^k + \sigma^k(\lambda^k - \lambda^{k-1}) \\ \lambda^{k+1} = P(\theta^k - \alpha \nabla f(\theta^k)) \end{cases} \quad (31)$$

式中:算法步骤的第1步为构造步;第2步为投影步;符号  $P$  表示做投影运算<sup>[15]</sup>。迭代初始值的选择为  $\lambda^{-1} = \lambda^0$ , 权重  $\sigma^k \in (0, 1)$ 。当合理选择步长  $\sigma^k$  时,可保证该梯度投影算法的迭代复杂度为  $O(1/\sqrt{\varepsilon})$ ,  $\varepsilon$  为非常小的正数<sup>[16]</sup>。权值步长  $\sigma^k$  通常取法为

$$\sigma^k = \frac{\tau^k(1-\tau^{k-1})}{\tau^{k-1}} \quad k=0, 1, \dots \quad (32)$$

式中,序列  $\{\tau^k\}$  满足  $\tau^0 = \tau^1 \in [0, 1]$ , 且有

$$\frac{(1-\tau^{k+1})}{(\tau^{k+1})^2} \leq \frac{1}{(\tau^k)^2}, \tau^k \leq \frac{2}{k+2} \quad k=0, 1, \dots \quad (33)$$

式中,通常使用的选择策略为

$$\sigma^k = \begin{cases} 0 & \text{if } k=0 \\ \frac{k-1}{k+2} & \text{if } k=1, 2, \dots, \tau^k = \begin{cases} 1 & \text{if } k=-1 \\ \frac{2}{k+2} & \text{if } k=0, 1, \dots \end{cases} \end{cases}$$

分析原优化问题式(10)的对偶函数,得到四基变量各自表达式,建立3个对偶变量间的关系式。将对偶函数转化为仅含有1个对偶变量的优化问题,采用梯度投影算法求解对偶优化问题。

### 3 仿真实例

为验证多无人机编队保持轨迹的对偶优化设计,在Windows系统下构建仿真环境。在平面内运动时,3架

无人机的连接关系以矩阵形式表示为  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

矩阵中,元素1表示两无人机间有信息交换<sup>[17]</sup>,对3架无人机的编队保持模型进行离散化时的采样间隔为  $\Delta T=1$  s,各无人机的最大加速率为  $35 \text{ m/s}^2$ ,最大速度为  $250 \text{ m/s}$ ,总的执行时间为  $30 \text{ s}$ 。目标指数函数中的3个参数分别取为  $\alpha_i=0.01, \beta_i=0.1, \eta_i=0.1$ 。当在二维平面内3架无人机做编队平移运动,3架无人机的初始位置分别为  $(0 \text{ m}, 2500 \text{ m}), (0 \text{ m}, 2300 \text{ m}), (0 \text{ m}, 2200 \text{ m})$ 。

图1表示3架无人机编队保持轨迹的对偶优化结果。图中:黑色曲线为参考跟踪曲线;3条彩色曲线分别表示3架无人机的飞行航迹。由图可见,3架无人机都实现了对参考轨迹的跟踪。图2所示为梯度投影算法中目标指数函数随迭代次数的变化过程曲线。由图可见,当迭代到50次后算法将终止,此时已达到了稳定的收敛。

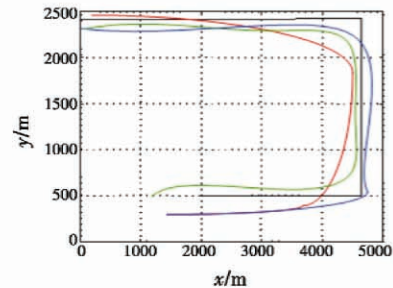


图1 无人机编队飞行轨迹

Fig.1 Trajectory of the UAV formation

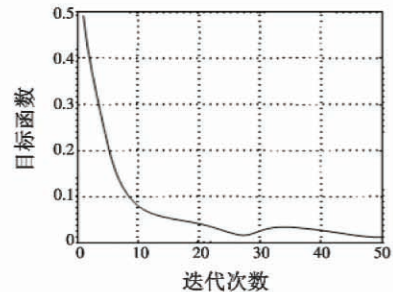


图2 目标指数函数的迭代变化情况

Fig.2 Iterative situation of the target exponential function

再次试验中仿真场景设定为3架无人机在二维平面内构成楔形编队,各无人机的初始状态分别为  $(500 \text{ m}, 500 \text{ m}), (500 \text{ m}, 5000 \text{ m}), (2000 \text{ m}, 5000 \text{ m})$ ,在最终形成的编队中,各无人机相对于汇合点的位移偏移量分

别为 $(-100\text{ m}, 100\text{ m})$ ,  $(-100\text{ m}, 100\text{ m})$ ,  $(0\text{ m}, 0\text{ m})$ 。最优的汇合点为 $(3200\text{ m}, 3500\text{ m})$ , 且汇合点时的编队速度为 $(200\text{ m/s}, 0\text{ m/s})$ 。此外, 限制各无人机的最大加速率为 $35\text{ m/s}^2$ , 最大速度为 $250\text{ m/s}$ , 采样间隔 $\Delta T = 1\text{ s}$ , 总的执行时间为 $30\text{ s}$ 。各无人机间基于优化设计, 寻找能够使得编队汇合过程所消耗能量达到最小的编队汇合点。图 3 用 3 种不同颜色的曲线表示 3 架无人机在优化后确定汇合点时所得到的最优航迹。

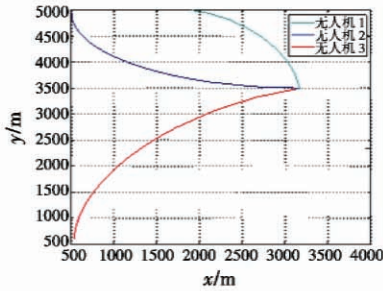


图 3 无人机位置变化的优化结果

Fig. 3 Optimization result of the UAV position

#### 4 结语

建立多无人机编队保持轨迹优化模型, 根据对偶函数建立基变量与对偶变量间的关系式。将原约束优化问题转化为无约束的对偶优化问题, 采用梯度投影算法求解对偶最优化问题。以后考虑如何将对偶优化设计应用于多无人机的集结自组织问题。

#### 参考文献

[1] 田菁, 沈林成. 多基地多无人机协同侦查问题研究[J]. 航空学报, 2007, 28(4): 913-921.  
TIAN J, SHEN L C. Research on multi-base multi-UAV cooperative reconnaissance problem[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2007, 28(4): 913-921.

[2] 王斌, 张尧学, 陈松乔. 一种基于黑板模型的多 Agent 系统通信方法[J]. 小型微型计算机系统, 2002, 23(2): 210-213.  
WANG B, ZHANG Y X, CHEN S Q. A communication method of MAS based on blackboard architecture[J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2002, 23(2): 210-213.

[3] 李子文, 夏洁. 无人侦察机路径规划方法研究[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(3): 112-120.  
LI Z W, XIA J. Reconnaissance path planning for UAV[J]. Journal of System Simulation, 2008, 20(3): 112-120.

[4] 陈孝新, 刘思峰. 一种部分权重信息的灰色多属性群决策方法[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(4): 843-846.

CHEN X X, LIU S F. Grey multiple attribute group decision-making method with partial weight information[J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31(4): 843-846.

[5] 彭冬亮, 叶军军. 多传感器异步采样系统的顺序融合[J]. 信息与控制, 2010, 39(2): 48-53.  
PENG D L, YE J J. Sequential fusion for multi-sensor asynchronous sampling system[J]. Information and Control, 2010, 39(2): 48-53.

[6] 胡洪涛, 敬忠良. 非高斯条件下基于粒子滤波的目标跟踪[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(12): 68-73.  
HU H T, JING Z L. Particle filter based target tracking in non-Gaussian environment[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2004, 38(12): 68-73.

[7] 刘贵喜, 高恩克. 改进的交互式多模型粒子滤波跟踪算法[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(12): 2810-2813.  
LIU G X, GAO E K. Tracking algorithms based on improved interacting multiple model particle filter[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2007, 29(12): 2810-2813.

[8] KARIMODDINI A. Hybrid three dimensional formation control for unmanned helicopters[J]. Automatica, 2013, 49(2): 424-433.

[9] SHAFERMAN V, SHIMA T. Unmanned aerial vehicles cooperative tracking of moving ground target in urban environments[J]. Journal of Guidance and Dynamics, 2008, 31(5): 1360-1371.

[10] AUGERO J C. A virtual closed loop method for closed loop identification[J]. Automatica, 2011, 47(8): 1626-1637.

[11] SHETTY V K. Priority based assignment and routing of unmanned combat aerial vehicles[J]. Computer & Operations Research, 2008, 35(10): 1813-1828.

[12] SILVEN S. A neural network based optimization algorithm for multiple targets tracking[J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2010, 37(4): 56-62.

[13] AUGERO J C. Accuracy of linear multiple input multiple output models obtained by maximum likelihood estimation[J]. Automatica, 2012, 48(4): 632-637.

[14] OHLSSON H. Identification of switched linear regression models using sum of norms regularization[J]. Automatica, 2013, 49(4): 1045-1050.

[15] DORIGO M. Ant colony optimization artificial ants as a computational intelligence technique[J]. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2006, 20(3): 180-192.

[16] FELLER C. An improved algorithm for combinatorial multi-parameteric quadratic programming[J]. Automatica, 2013, 49(5): 1370-1376.

[17] VAN DEN HOF P. Identification of dynamic models in complex networks with prediction error methods[J]. Automatica, 2013, 49(10): 2994-3006.