

基于平方和优化的多项式模糊系统 H_∞ 控制

马清亮, 邓会选, 吕康文, 陈逸成, 李红增

(第二炮兵工程大学控制工程系, 西安 710025)

摘要: 提出一种基于平方和(SOS)优化的多项式模糊系统 H_∞ 状态反馈控制器设计方法。运用 Lyapunov 方法和多项式平方和分解技术, 提出一种多项式模糊系统 H_∞ 性能准则, 基于该性能准则, 推导出多项式模糊系统 H_∞ 状态反馈控制器存在的充分条件; 并进一步将控制器设计问题转化为具有平方和多项式约束的参数优化问题。理论分析和仿真结果表明了所提方法的有效性。

关键词: 多项式模糊系统; H_∞ 控制; 状态反馈控制; 平方和优化

中图分类号: TP13 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-637X(2014)10-0080-05

H_∞ Control of Polynomial Fuzzy Systems Based on SOS Optimization

MA Qing-liang, DENG Hui-xuan, LÜ Kang-wen, CHEN Yi-cheng, LI Hong-zeng

(Department of Control Engineering, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

Abstract: The problem of H_∞ state feedback controller design is investigated for polynomial fuzzy systems based on sum-of-squares (SOS) optimization. Firstly, an H_∞ performance criteria of polynomial fuzzy systems was proposed by using Lyapunov approach and SOS decomposition. Then, the sufficient conditions for the existence of state feedback H_∞ controller were derived in terms of SOS based on the proposed performance criteria. Furthermore, the optimal H_∞ controller design problem was converted into a parameter optimization problem with SOS constraints. Both theoretical and numerical simulation demonstrated the effectiveness of the proposed design approach.

Key words: polynomial fuzzy systems; H_∞ control; state feedback control; sum-of-squares optimization

0 引言

T-S 模糊控制系统是目前模糊控制领域最活跃的一个分支, 该模型由 Takagi 和 Sugeno 于 1985 年提出^[1]。在 T-S 模糊模型中, 模糊规则后件是采用线性方程描述的, 便于运用成熟的线性控制理论进行模糊控制系统稳定性分析和控制器设计, 因而受到广泛关注, 并取得了大量的研究成果^[2-4]。

2007 年, 在 T-S 模糊模型的基础上, Tanaka 等进一步提出了多项式模糊模型^[5]。多项式模糊模型是 T-S 模糊模型的推广。与 T-S 模糊模型的后件采用线性方程描述不同, 多项式模糊模型的后件采用多项式非线

性方程描述。与 T-S 模糊模型相比, 采用多项式模糊模型描述复杂非线性系统, 不仅所需要的模糊规则数较少, 而且能够降低模糊控制系统设计的保守性^[6-7]。

目前, 对于多项式模糊系统的稳定性分析、镇定控制器设计、保性能控制器设计以及观测器设计等问题, 已有学者进行了相关研究^[5-8]。但对于多项式模糊系统的 H_∞ 控制问题, 相关研究成果目前尚未见报道。

本文研究多项式模糊系统的 H_∞ 状态反馈控制器设计问题。综合运用 Lyapunov 方法和平方和分解技术, 提出了一种多项式模糊系统的 H_∞ 性能准则; 基于该性能准则, 推导出多项式模糊系统 H_∞ 状态反馈控制器存在的充分条件; 然后, 结合平方和优化技术, 给出了 H_∞ 状态反馈模糊控制器的优化设计方法。仿真结果表明了所提方法的可行性和有效性。

1 问题描述

考虑一类非线性动态系统

收稿日期: 2014-05-22

修回日期: 2014-06-17

基金项目: 国家自然科学基金(61203007)

作者简介: 马清亮(1974—), 男, 河南商水人, 博士, 副教授, 研究方向为飞行器控制、智能控制等。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)) + g_1(\mathbf{x}(t))\mathbf{w}(t) + g_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}_\infty(t) = h(\mathbf{x}(t)) + p_1(\mathbf{x}(t))\mathbf{w}(t) + p_2(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (1)$$

式中： $\mathbf{x}(t) \in R^n$ ，为状态向量； $f(\mathbf{x}(t))$ ， $h(\mathbf{x}(t))$ ， $g_1(\mathbf{x}(t))$ ， $g_2(\mathbf{x}(t))$ ， $p_1(\mathbf{x}(t))$ 和 $p_2(\mathbf{x}(t))$ 是光滑非线性函数，且 $f(0) = 0$ ， $h(0) = 0$ ； $\mathbf{u}(t) \in R^m$ ，为控制输入； $\mathbf{z}_\infty(t) \in R^q$ ，为控制输出； $\mathbf{w}(t) \in L^2[0, \infty)$ ，为能量有界的外部干扰，且 $\mathbf{w}(t) \neq 0$ 。

运用扇形非线性建模技术^[1]，可以将非线性动态系统式(1)表示为如下多项式模糊模型的形式^[5]。

模糊规则 i ：

If $z_1(t)$ is M_{i1} and \dots and $z_p(t)$ is M_{ip} , then

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A_i(\mathbf{x}(t))\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) + B_{wi}(\mathbf{x}(t))\mathbf{w}(t) + B_{ui}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}_\infty(t) = C_i(\mathbf{x}(t))\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) + D_{wi}(\mathbf{x}(t))\mathbf{w}(t) + D_{ui}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2)$$

式中： $i = 1, \dots, r$ ； $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) \in R^N$ ，是由关于 $\mathbf{x}(t)$ 的单项式构成的列向量；多项式矩阵 $A_i(\mathbf{x}(t)) \in R^{N \times N}$ ， $B_{wi}(\mathbf{x}(t)) \in R^{N \times m}$ 和 $C_i(\mathbf{x}(t)) \in R^{l \times N}$ 分别为系统、输入和输出矩阵。

不失一般性，假设当且仅当 $\mathbf{x}(t) = 0$ 时， $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t)) = 0$ 。

为简便起见，以下分别用 \mathbf{x} 、 $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ 、 \mathbf{u} 、 \mathbf{w} 和 \mathbf{z}_∞ 代替 $\mathbf{x}(t)$ 、 $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t))$ 、 $\mathbf{u}(t)$ 、 $\mathbf{w}(t)$ 和 $\mathbf{z}_\infty(t)$ 。

应用单点模糊化、乘积推理和中心加权反模糊化的推理方法，可得多项式模糊模型(2)的全局状态方程^[1,5]

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^r h_i(z) [A_i(\mathbf{x})\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + B_{wi}(\mathbf{x})\mathbf{w} + B_{ui}(\mathbf{x})\mathbf{u}] \\ \mathbf{z}_\infty = \sum_{i=1}^r h_i(z) [C_i(\mathbf{x})\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + D_{wi}(\mathbf{x})\mathbf{w} + D_{ui}(\mathbf{x})\mathbf{u}] \end{cases} \quad (3)$$

式中， $h_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)) / \sum_{k=1}^r \prod_{j=1}^p M_{kj}(z_j(t))$ 。根据隶属函数 $h_i(z)$ 的性质，可知 $h_i(z) \geq 0$ ，且 $\sum_{i=1}^r h_i(z) = 1$ 。

基于并行分布式补偿原理^[1,6]，可设计多项式模糊系统式(3)的 H_∞ 状态反馈模糊控制器，模糊控制规则如下所述。

模糊控制规则 i ：

If $z_1(t)$ is M_{i1} and \dots and $z_p(t)$ is M_{ip} , then

$$\mathbf{u}(t) = -F_i(\mathbf{x})\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (4)$$

经反模糊化可得 H_∞ 状态反馈模糊控制器的全局模型为

$$\mathbf{u}(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z) F_i(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

结合式(3)和式(5)，可得多项式闭环模糊系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \{ [A_i(\mathbf{x}) - B_{wi}(\mathbf{x})F_j(\mathbf{x})] \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + B_{ui}(\mathbf{x})\mathbf{w} \} \\ \mathbf{z}_\infty = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z) h_j(z) \{ [C_i(\mathbf{x}) - D_{wi}(\mathbf{x})F_j(\mathbf{x})] \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + D_{ui}(\mathbf{x})\mathbf{w} \} \end{cases} \quad (6)$$

对于多项式模糊系统式(3)，如果 $\mathbf{w} = 0$ ，称其为无外扰模糊系统；如果 $\mathbf{u} = 0$ ，称其为自治模糊系统。

定义 1 对于自治多项式模糊系统式(3)，在零初始条件下($\mathbf{x}(0) = 0$)，如果对于能量有界的外部干扰 $\mathbf{w} \in L_2[0, \infty)$ ， $\mathbf{w} \neq 0$ ，满足 $\|\mathbf{z}_\infty\|_2 < \gamma \|\mathbf{w}\|_2$ ，则称多项式模糊系统式(3)的 H_∞ 范数小于 γ ，即具有干扰抑制水平 γ 。

本文研究的问题是：对于多项式模糊系统式(3)，给定 $\gamma > 0$ ，要求设计 H_∞ 状态反馈模糊控制律式(5)，使得相应的闭环模糊系统式(6)是稳定的，且具有 H_∞ 性能 γ 。

2 多项式模糊系统的 H_∞ 性能分析

本节运用多项式平方和分解技术和 Lyapunov 方法，对多项式模糊系统的 H_∞ 性能进行分析。为此，首先介绍多项式平方和分解技术。

2.1 多项式平方和分解

定义 2 对于 n 元实系数多项式 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，若存在一组多项式 $f_1(x)$ ， $f_2(x)$ ， \dots ， $f_m(x)$ ，使得

$$f(x) = \sum_{i=1}^m f_i^2(x) \quad (7)$$

则称 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为平方和(SOS)多项式^[9]。

记 Σ_{SOS} 表示所有平方和多项式的集合。由定义 2 可知，若 $f(x) \in \Sigma_{\text{SOS}}$ ，则对于 $\forall x \in R^n$ ，均有 $f(x) \geq 0$ 成立。

下述命题给出了一个判定 n 元多项式是否为 SOS 多项式的简便方法^[10]。

命题 1 设 $f(x)$ 是一个次数不高于 $2d$ 的 n 元多项式， $\mathbf{Z}(x)$ 是由次数不高于 d 的单项式组成的列向量，则 $f(x)$ 为 SOS 多项式的充要条件是存在一个半正定矩阵 \mathbf{Q} ，使得

$$f(x) = \mathbf{Z}^T(x) \mathbf{Q} \mathbf{Z}(x) \quad (8)$$

下述引理进一步给出了一个判定多项式矩阵是否为半正定矩阵的方法^[11]。

引理 1 设 $\mathbf{x} \in R^n$ ，矩阵 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 是次数为 $2d$ 的 $N \times N$ 维对称多项式矩阵， $\mathbf{Z}(\mathbf{x})$ 是由次数不高于 d 的单项式组成的列向量，考虑如下 3 个条件：

- 1) 对于所有的 $\mathbf{x} \in R^n$ ，均有 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq 0$ ；
- 2) $\mathbf{v}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{v}$ 是 SOS 多项式，其中， $\mathbf{v} \in R^N$ ，是与 \mathbf{x} 不相关的向量；

3) 存在一个半正定矩阵 \mathbf{Q} ，使得 $\mathbf{v}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{v} = (\mathbf{v} \otimes \mathbf{Z}(\mathbf{x}))^T \mathbf{Q} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{Z}(\mathbf{x}))$ ，其中，“ \otimes ”表示 Kronecker 积，则有：1) \Leftrightarrow 2) and 2) \Leftrightarrow 3)。

2.2 多项式模糊系统的 H_∞ 性能准则

本节综合运用 Lyapunov 方法和多项式平方和分

解技术,推导出多项式模糊系统的 H_∞ 性能准则。

在控制输入 $u=0$ 的情况下,多项式模糊系统式(3)可简化为如下自治模糊系统。

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z) [A_i(x)\hat{x}(x) + B_{wi}(x)w] \\ z_\infty(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z) [C_i(x)\hat{x}(x) + D_{wi}(x)w] \end{cases} \quad (9)$$

下述定理以平方和多项式的形式,给出了一种多项式模糊系统的 H_∞ 性能准则。

定理1 给定 $\gamma > 0$, 多项式模糊系统式(9)是稳定的,且具有 H_∞ 性能 γ , 其充分条件是:存在一个对称多项式矩阵 $Q(x) \in R^{N \times N}$, 使得

$$v_1^T [Q(x) - \varepsilon(x)I] v_1 \in \Sigma_{SOS} \quad (10)$$

$$-v_2^T \begin{bmatrix} \Psi & * & * \\ B_{wi}^T(x)T^T(x) & -\gamma^2 I & * \\ C_i(x)Q(x) & D_{wi}(x) & -I \end{bmatrix} v_2 \in \Sigma_{SOS} \quad (11)$$

式中:“*”表示由矩阵的对称性得到的矩阵块,下同;

$$\Psi = T(x)A_i(x)Q(x) + Q(x)A_i^T(x)T^T(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial Q}{\partial x_j}(x)A_j(x)\hat{x};$$

$\varepsilon(x)$ 为非负多项式,且当 $x \neq 0$ 时, $\varepsilon(x) > 0$; v_1 和 v_2 是与 x 不相关的向量; $T(x)$ 是一个维数为 $N \times n$ 的多项式矩阵,其第 i 行第 j 列的元素 $T_{ij}(x)$ 为

$$T_{ij}(x) = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x_j}(x), \quad i=1, \dots, N, \quad j=1, \dots, n. \quad (12)$$

证明:结合引理1,采用类似于文献[11]中定理6和文献[12]中定理1的证明方法,可证得该定理,此处略。

注1:定理1中的条件式(10)和式(11)是平方和多项式的可行性判定问题,可以运用 Matlab 平方和优化技术工具箱 SOSTOOLS 进行求解^[13]。

3 多项式模糊系统的 H_∞ 控制器设计

本节在多项式模糊系统 H_∞ 性能准则的基础上,推导出 H_∞ 状态反馈模糊控制器的存在条件,并给出了 H_∞ 状态反馈模糊控制器优化设计方法。

3.1 H_∞ 状态反馈模糊控制器的存在条件

记 $A_i^k(x)$ 表示多项式矩阵 $A_i(x)$ 的第 k 行。

定义 $K = \{k_1, \dots, k_m\}$, 表示由多项式矩阵 $B = [B_{wi}(x), B_{wi}(x)]$ 的全零行标志构成的集合,即

$$K = \{k | e_k^T [B_{wi}(x), B_{wi}(x)] = 0, \forall x \in R^n\} \quad (13)$$

假设集合 K 中有 k_m 个元素,令

$$\tilde{x} = [x_{k_1}, \dots, x_{k_m}]^T, \quad k_1 < \dots < k_m, \quad j_k \in K, \quad k=1, \dots, k_m. \quad (14)$$

下述定理给出了多项式模糊系统 H_∞ 状态反馈控制器的存在条件。

定理2 对于多项式模糊系统式(3),存在 H_∞ 状

态反馈模糊控制器式(5),使得闭环模糊系统式(6)是稳定的,且具有 H_∞ 性能 γ , 其充分条件是:存在一个对称多项式矩阵 $Q(\tilde{x}) \in R^{N \times N}$, 以及多项式矩阵 $M_i(x) \in R^{m \times N}$, 使得

$$v_1^T (Q(\tilde{x}) - \varepsilon_1(x)I) v_1 \in \Sigma_{SOS} \quad (15)$$

$$-v_2^T W_{ii} v_2 \in \Sigma_{SOS}, \quad i=1, \dots, r \quad (16)$$

$$-v_3^T (W_{ij} + W_{ji}) v_3 \in \Sigma_{SOS}, \quad 1 \leq i < j \leq r \quad (17)$$

$$\text{式中: } W_{ij} = \begin{bmatrix} N_{ij} + \varepsilon_{2ij}(x)I & * & * \\ B_{wi}^T(x)T^T(x) & -\gamma^2 I & * \\ C_i(x)Q(\tilde{x}) - D_{wi}(x)M_j(x) & D_{wi}(x) & -I \end{bmatrix}; N_{ij} =$$

$$T(x)A_i(x)Q(\tilde{x}) - T(x)B_{wi}(x)M_j(x) + Q(\tilde{x})A_i^T(x)T^T(x) - M_j^T(x)B_{wi}^T(x)T^T(x) - \sum_{k \in K} \frac{\partial Q}{\partial x_k}(\tilde{x})A_i^k(x)\hat{x}; v_1, v_2, v_3 \text{ 是与 } x$$

不相关的向量; $\varepsilon_1(x)$ 和 $\varepsilon_{2ij}(x)$ 为非负多项式,且满足当 $x \neq 0$ 时, $\varepsilon_1(x) > 0, \varepsilon_{2ij}(x) > 0$, 当 $x=0$ 时, $\varepsilon_1(x) = 0, \varepsilon_{2ij}(x) = 0$ 。

进一步地,根据求得的 $Q(\tilde{x})$ 和 $M_i(x)$, 由下式可计算出 H_∞ 状态反馈模糊控制器式(5)中的增益矩阵

$$F_i(x) = M_i(x)Q^{-1}(\tilde{x}). \quad (18)$$

证明:考虑如下形式的候选 Lyapunov 函数

$$V(x) = \hat{x}^T(x)Q^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x). \quad (19)$$

若条件式(15)成立,根据引理1显然可知,对 $\forall x \neq 0$, 均有 $V(x) > 0$ 成立。

令 $P(\tilde{x}) = Q^{-1}(\tilde{x})$, 沿闭环模糊系统式(6)的状态轨线,对 $V(x)$ 求导,可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \hat{x}^T(x)P(\tilde{x})\dot{\hat{x}}(x) + \dot{\hat{x}}^T(x)P(\tilde{x})\hat{x}(x) + \\ &\hat{x}^T(x)\dot{P}(\tilde{x})\hat{x}(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z)h_j(z) \begin{bmatrix} \hat{x}(x) \\ w \end{bmatrix}^T \cdot \\ &\begin{bmatrix} U_{ij} & P(\tilde{x})T(x)B_{wi}(x) \\ B_{wi}^T(x)T^T(x)P(\tilde{x}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(x) \\ w \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

式中, $U_{ij} = P(\tilde{x})T(x)A_i(x) - P(\tilde{x})T(x)B_{wi}(x)F_j(x) + A_i^T(x)T^T(x)P(\tilde{x}) - F_j^T(x)B_{wi}^T(x)T^T(x)P(\tilde{x}) + \sum_{k \in K} \frac{\partial P(\tilde{x})}{\partial x_k} A_i^k(x)\hat{x}(x)$ 。

假设存在一个正定对称多项式矩阵 $P(\tilde{x})$, 使得

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z)h_j(z) \begin{bmatrix} \hat{x} \\ w \end{bmatrix}^T \cdot$$

$$\begin{bmatrix} U_{ij} & P(\tilde{x})T(x)B_{wi}(x) \\ B_{wi}^T(x)T^T(x)P(\tilde{x}) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{x} \\ w \end{bmatrix}^T \Phi \begin{bmatrix} \hat{x} \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

式中： $\Phi = \left\{ \sum_{i=1}^r h_i(z) [C_i(x) - D_{wi}(x)F_j(x) D_{wi}(x)] \right\}^T \times \left\{ \sum_{i=1}^r h_i(z) [C_i(x) - D_{wi}(x)F_j(x) D_{wi}(x)] \right\}$ 。

由于 w 是与系统状态 x 无关的外部干扰向量,且根据式(21)可以推出 $U_{ij} < 0$,因此对 $\forall x \neq 0$,均有 $\dot{V}(x) < 0$ 成立,即多项式模糊系统式(6)是稳定的,且 $V(x) = \hat{x}^T(x)Q^{-1}(\tilde{x})\hat{x}(x)$ 是模糊系统式(6)的一个 Lyapunov 函数。

对不等式(21)进行整理,可得

$$\dot{V}(x) + z_\infty^T(t)z_\infty(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) < 0 \quad (22)$$

对上式两边分别从 0 到 T 进行积分,并整理可得

$$\int_0^T z_\infty^T(t)z_\infty(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) dt < -V(x) \Big|_0^T \quad (23)$$

在零初始条件下有

$$\int_0^T z_\infty^T(t)z_\infty(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) dt < -V(x(T)) \quad (24)$$

由于系统是稳定的,且 $t \rightarrow \infty$ 时 $\hat{x}(x) \rightarrow 0$,故在式(24)两边令 $T \rightarrow \infty$,可得

$$\|z_\infty(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2 \quad (25)$$

即 $\|z_\infty(t)\|_2 < \gamma \|w(t)\|_2$,闭环模糊系统式(6)具有 H_∞ 性能 γ 。

下面证明,若定理 1 中的条件式(16)和式(17)成立,则假设条件式(21)成立。

令

$$M_j(x) = F_j(x)Q(\tilde{x}) \quad (26)$$

显然,若平方和条件式(16)和式(17)成立,则有

$$-\sum_{i=1}^r h_i(z)(\Sigma_{ii} + E_{2ii}) > 0 \quad (27)$$

$$-\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j>i}^r h_i(z)h_j(z)(\Sigma_{ij} + \Sigma_{ji} + E_{2ij} + E_{2ji}) > 0 \quad (28)$$

$$\text{式中: } \Sigma_{ij} = \begin{bmatrix} N_{ij} & * & * \\ B_{wi}^T(x)T^T(x) & -\gamma^2 I & * \\ C_i(x)Q(\tilde{x}) - D_{wi}(x)M_j(x) & D_{wi}(x) & -I \end{bmatrix}$$

$$E_{2ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{2ij}(x)I & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

根据不等式(27)和(28),可得

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z)h_j(z)\Sigma_{ij} = \sum_{i=1}^r h_i^2(z)\Sigma_{ii} + \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j>i}^r h_i(z)h_j(z)(\Sigma_{ij} + \Sigma_{ji}) < 0 \quad (29)$$

对式(29)运用 Schur 补引理,可得

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z)h_j(z) \begin{bmatrix} N_{ij} & * \\ B_{wi}^T(x)T^T(x) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \left\{ \sum_{i=1}^r h_i(x) \begin{bmatrix} Q(\tilde{x})C_i^T(x) - M_j^T(x)D_{wi}^T(x) \\ D_{wi}^T(x) \end{bmatrix} \right\} \times \left\{ \sum_{i=1}^r h_i(x) [C_i(x)Q(\tilde{x}) - D_{wi}(x)M_j(x) D_{wi}(x)] \right\} < 0。 \quad (30)$$

根据 N_{ij} 的定义,可以将 N_{ij} 改写为如下形式

$$N_{ij} = Q(\tilde{x})U_{ij}Q(\tilde{x}) \quad (31)$$

对式(30)两边分别左乘 $Q^{-1}(\tilde{x})$ 和右乘 $Q^{-1}(\tilde{x})$,并整理可得

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z)h_j(z) \begin{bmatrix} U_{ij} & * \\ B_{wi}^T(x)T^T(x)P(\tilde{x}) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \Phi < 0 \quad (32)$$

因此,若满足条件式(16)和式(17),则式(21)的假设条件成立。

综上,定理得证。

3.2 H_∞ 状态反馈模糊控制器优化设计

在定理 2 的基础上,推论 1 给出了多项式模糊系统 H_∞ 状态反馈控制器的优化设计方法。

推论 1 对于多项式模糊系统式(3),若如下的参数优化问题

$$\begin{aligned} \min_{Q(\tilde{x}), M_i(x)} \gamma \\ \text{s. t. 式(15) ~ 式(17)} \end{aligned} \quad (33)$$

有解,则利用该优化问题的最优解 $(Q^*(\tilde{x}), M_i^*(x))$,可计算出 H_∞ 状态反馈模糊控制器式(5)中的增益矩阵

$$F_i^*(x) = M_i^*(x)(Q^{-1})^*(\tilde{x}) \quad (34)$$

相应闭环模糊系统式(6)的最优 H_∞ 性能为 γ^* 。

4 算例仿真

考虑如下非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 + x_2 + x_1 w + x_1 u \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2 \\ z_\infty = x_1 + x_1 u \end{cases} \quad (35)$$

在 $u = 0$ 的情况下,系统式(35)在不同初始状态下的运行轨迹如图 1 所示。显然,非线性系统式(35)在无控情况下是不稳定的。

为便于对比,首先运用 T-S 模糊模型对非线性系统式(35)进行建模和控制^[1,6]。采用 T-S 模糊模型时,需要 8 条模糊规则才能描述非线性系统式(35),在此基础上,可运用线性矩阵不等式(LMI)方法设计 H_∞ 模

糊控制器,相应闭环模糊系统的最优 H_∞ 性能为 $\gamma_{LMI}^* = 4.2190$ 。

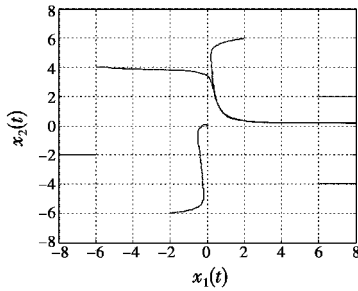


图1 不同初始状态下系统的运行轨迹

Fig.1 State trajectory with different initial conditions

与 T-S 模糊模型相比,采用多项式模糊模型描述非线性系统式(35)只需要 2 条模糊规则。多项式模糊系统的全局状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \sum_{i=1}^2 h_i(z) [A_i(x)\hat{x}(x) + B_{wi}(x)w + B_{ui}(x)u] \\ \dot{z}_\infty = \sum_{i=1}^2 h_i(z) [C_i(x)\hat{x}(x) + D_{wi}(x)w + D_{ui}(x)u] \end{cases} \quad (36)$$

式中: $x = \hat{x} = [x_1 \quad x_2]^T$, 前件变量 $z = x_1$,

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} -1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_2(x) = \begin{bmatrix} -1 + x_1 + x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 & 1 \\ 0.2172 & -1 \end{bmatrix},$$

$B_{w1}(x) = B_{w2}(x) = [x_1 \quad 0]^T$, $B_{u1}(x) = B_{u2}(x) = [x_1 \quad 0]^T$,
 $D_{w1}(x) = D_{w2}(x) = 0$, $D_{u1}(x) = D_{u2}(x) = x_1$, $C_1(x) = C_2(x) = [1 \quad 0]$ 。相应的隶属度函数为 $h_1(z) = \frac{\sin x_1 + 0.2172x_1}{1.2172x_1}$,

$$h_2(z) = \frac{\sin x_1 - 0.2172x_1}{1.2172x_1}。$$

在对非线性系统进行多项式模糊建模的基础上,运用推论 1,通过求解具有平方和约束的参数优化问题式(33),由式(34)可设计 H_∞ 状态反馈模糊控制器式(5)中的增益矩阵为

$$F_1(x) = [6.2744 * x_1 + 1.2425 * x_2 + 1.0052, \\ 0.24354 * x_1 + 0.26658 * x_2 + 0.32573],$$

$$F_2(x) = [6.2792 * x_1 + 1.1732 * x_2 + 0.70565, \\ 0.25853 * x_1 + 0.25938 * x_2 + 0.26341]。$$

相应闭环模糊系统的最优 H_∞ 性能为 $\gamma_{SOS}^* = 2.5280$ 。显然,与基于 T-S 模糊模型的控制方法相比,采用多项式模糊模型和平方和优化技术设计 H_∞ 状态反馈模糊控制器,能够有效降低设计的保守性。

为进一步验证本文方法的有效性,对所设计的 H_∞ 控制器的性能进行仿真分析。在外部干扰 $w = \sin 6t + \cos 0.05t$ 的情况下,图 2 给出了所设计的 H_∞ 模糊控制

器的作用下,非线性系统式(35)的状态响应曲线。

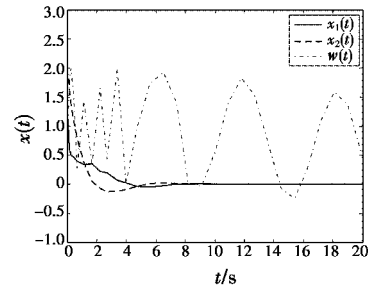


图2 干扰情况下非线性系统的状态响应

Fig.2 State response of nonlinear system with disturbance

由图 2 可以看出,在所设计的 H_∞ 模糊控制器的作用下,非线性系统式(35)不仅能够保持稳定,并且具有良好的干扰抑制性能。

5 结论

本文提出了一种基于平方和优化的多项式模糊系统的 H_∞ 控制器设计方法。运用多项式 Lyapunov 函数方法与平方和优化技术,给出了 H_∞ 控制器存在条件和设计方法。仿真结果表明了所述方法的有效性。

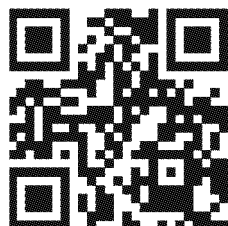
参考文献

- [1] TANAKA K, WANG H O. Fuzzy control systems design and analysis: A linear matrix inequality approach [M]. New York: John Wiley & Sons, Inc, 2001.
- [2] FENG G. A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2006, 14(5): 676-697.
- [3] 刘娣,李宏胜,朱松青,等.基于 T-S 模糊模型的迭代学习初始控制[J].电光与控制,2013,20(10):27-32. LIU D, LI H S, ZHU S Q, et al. Iterative learning initial control based on T-S fuzzy model [J]. Electronics Optics & Control, 2013, 20(10): 27-32.
- [4] 厉虹,邹奎.基于 T-S 模糊模型的 3D 刚体摆姿态控制[J].控制与决策,2013,28(12):1786-1790. LI H, ZOU K. Attitude control of a 3D rigid pendulum based on T-S fuzzy model [J]. Control and Decision, 2013, 28(12): 1786-1790.
- [5] TANAKA K, YOSHIDA H, OHTAKE H, et al. A sum of squares approach to stability analysis of polynomial fuzzy systems [C] // Proceedings of the American Control Conference, New York, 2007: 4071-4076.
- [6] TANAKA K, YOSHIDA H, OHTAKE H, et al. Stabilization of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach [C] // The 22nd IEEE International Symposium on Intelligent Control, Singapore, 2007: 160-165.

- CHE C C, LI Y C, FAN X W, et al. Optical design for off-axis two mirror collimator [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2008, 37(9):1793-1796.
- [2] 田海雷,汪岳峰,张伟. 离轴抛物面反射式红外平行光管设计[J]. *红外技术*, 2007, 29(12):701-703,707.
TIAN H L, WANG Y F, ZHANG W. Design of the off-axis parabolic reflective infrared collimator[J]. *Infrared Technology*, 2007, 29(12):701-703,707.
- [3] 杨建斌,张文瑞,柏树,等. 面源红外定标黑体控温热分析[J]. *真空与低温*, 2011, 17(1):23-27.
YANG J B, ZHANG W R, BAI S, et al. Temperature analysis for infrared radiation calibration plane blackbody[J]. *Vacuum & Cryogenics*, 2011, 17(1):23-27.
- [4] 姜贵彬,蓝天,倪国强,等. 红外热成像系统评价的重要参数及测试方法[J]. *红外与激光工程*, 2008, 37(s):470-473.
JIANG G B, LAN T, NI G Q, et al. Important parameters and testing methods of performance evaluation of thermal infrared imaging system[J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2008, 37(s):470-473.
- [5] 隋修宝,陈钱,陆红红. 红外图像空间分辨率提高方法研究[J]. *红外与毫米波学报*, 2007, 26(5):377-379, 385.
SUI X B, CHEN Q, LU H H. Research on improving spatial resolution of infrared image[J]. *Journal of Infrared Millimeter Waves*, 2007, 26(5):377-379,385.
- [6] 权清科,仇振安,崔志新. 红外热成像系统噪声等效温差数字图像测试方法[J]. *电光与控制*, 2013, 20(9):102-104.
QUAN Q K, QIU Z A, CUI Z X. A method for testing IR imaging system NETD based on digital image[J]. *Electronics Optics & Control*, 2013, 20(9):102-104.
- [7] HOLST G C. *Testing and evaluation of infrared imaging systems* [M]. Winter Park, FL: JCD Pub. Bellingham, WA:SPIE Optical Engineer Press, 1998.
- [8] KOSTRZEWA J, LONG J, GRAFF J H, et al. TOD versus MRT when evaluating thermal imagers that exhibit dynamic performance [C]//*Proceedings of SPIE*, 2003, 5076:220-232.
- [9] 杨乐,孙强,郭邦辉. 离轴三反红外双波段景象模拟器光学系统设计[J]. *应用光学*, 2011, 32(6):1212-1216.
YANG L, SUN Q, GUO B H. Optical design of off-axis three-mirror system for infrared dual-band scene simulator [J]. *Journal of Applied Optics*, 2011, 32(6):1212-1216.

(上接第84页)

- [7] TANAKA K, OHTAKE H, WANG H O. Guaranteed cost control of polynomial fuzzy systems via a sum of squares approach [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—Part B: Cybernetics*, 2009, 39(2):561-567.
- [8] TANAKA K, OHTAKE H, SEO T, et al. An SOS-based observer design for polynomial fuzzy systems [C]//*Proceedings of the American Control Conference*, San Francisco, 2011:4953-4958.
- [9] PARRILO P A. *Structured semi-definite programs and semi-algebraic geometry method in robustness and optimization* [D]. Pasadena: California Institute of Technology, 2000.
- [10] 马清亮,杨海燕,岳瑞华,等. 空间飞行器大角度姿态机动优化控制[J]. *空间控制技术与应用*, 2013, 39(3):8-13.
MA Q L, YANG H Y, YUE R H, et al. Optimization control of spacecraft large angle attitude maneuvers [J]. *Aerospace Control and Application*, 2013, 39(3):8-13.
- [11] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, WU F. Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: A Lyapunov-based approach [C]//*Proceedings of the Asian Control Conference (ASCC)*, Melbourne, 2004:157-165.
- [12] LEE K P, JEUNG E T, PARK H B. Robust fuzzy H_∞ control for uncertain nonlinear systems via state feedback: An LMI approach [J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 120:123-134.
- [13] PRAJNA S, PAPACHRISTODOULOU A, PARRILO P A. Introducing SOSTOOLS: A general purpose sum of squares programming solver [C]//*Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, 2002:741-746.



请扫描二维码
关注我刊

