

基于零控脱靶量的剩余飞行时间改进估算方法

谢道成, 胡亚忠, 张宏强
(第二炮兵驻8602厂军代室, 武汉 430040)

摘要: 剩余飞行时间是飞行器制导环节的一个重要参数, 决定着控制增益和能量代价。运用最优控制理论得到了最优加速度矢量作用下末端脱靶量的表达式, 建立了末端脱靶量与零控脱靶量之间的关系。在最近接近点(PCA)的拦截场景下, 在假定常逃逸速度的前提下得到了新的剩余飞行时间的闭式解, 提出考虑相对位置和相对速度间夹角信息剩余时间的估算方法。仿真表明: 当夹角较大时, 应用PCA方法的剩余飞行时间估计误差较传统的一阶近似方法小; PCA方法针对变速度目标情况同样适用。

关键词: 飞行器制导; 剩余飞行时间; 零控脱靶量; 最优控制; 最近接近点法; 估算误差

中图分类号: V271.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-637X(2014)10-0070-05

A Modified Time-to-Go Estimation Algorithm Based on Zero Effort Miss

XIE Dao-cheng, HU Ya-zhong, ZHANG Hong-qiang
(The Military Deputy Office of the Second Artillery in No. 8602 Plant, Wuhan 430040, China)

Abstract: Time-to-go is an important parameter in guidance law design of air vehicles, and may determine the control gain and energy cost. This paper presents a new time-to-go estimation algorithm. Based on optimal control theory, the expression for terminal miss distance is obtained, and the correlation between terminal miss and zero-effort-miss is derived. To the intercept scene called Point of Closest Approach (PCA), a new closed-form solution to time-to-go estimation is given supposing that the evasive velocity is constant. The new estimation algorithm makes use of the included angle between relative position and relative velocity vector. Simulation result shows that: 1) When the included angle is big, the PCA based method has less estimation error than traditional first-order approximation; and 2) The PCA based algorithm can also be applicable when the evasive velocity is variable.

Key words: guidance of air vehicle; time-to-go; zero effort miss; optimal control; point of closest approach; estimation error

0 引言

剩余飞行时间(time-to-go)是指从当前位置飞至期望目标点的待飞时间, 是最优导引律的基本组成部分^[1-4], 剩余飞行时间决定着控制增益和能量消耗。在设计飞行器的制导律时, 剩余飞行时间的估计精度与制导律的制导效果有很大关系。因为不精确的估计不仅会带来诸如脱靶量等制导性能的下降, 严重时还会使得飞行器偏离飞行轨道。

剩余飞行时间不能使用设备和仪器直接测量得到。目前广泛使用的剩余飞行时间估算公式为相对距离和相对速度的比值 $\tau = -|\mathbf{r}/\dot{\mathbf{r}}|$, 该方法在相对速度矢量贴近相对视线矢量时较为有效, 即目标常速度飞行或机动过载不大的情况。而当两个矢量之间的夹角较大时, 该近似方法误差较大^[5-6]。

在最优导引律、滑模导引律和自适应比例导引律等新的制导律中, 剩余飞行时间是制导律生成公式里的一项重要参数。虽然小的剩余飞行时间估算偏差不会带来大的制导指令偏差, 但当要求精确打击时估算偏差的影响就显现出来了。飞行位置矢量和飞行速度矢量方向很难重合, 甚至两个矢量之间还会存在较大的夹角。这时还用传统的相对距离/相对速度一阶近

收稿日期: 2013-11-25 修回日期: 2013-12-19

基金项目: 国家自然科学基金(51105287)

作者简介: 谢道成(1984—), 男, 湖北枣阳人, 博士, 工程师, 研究方向为飞行器动力学、制导与控制。

似,势必带来较大误差。

本文运用最优控制理论得到脱靶量与零控脱靶量之间的关系,在最近接近点拦截场景下,得到新的剩余飞行时间表达式,该方法考虑速度矢量和位置矢量间的夹角信息,当夹角较大时,剩余飞行时间估计误差较统一阶近似的方法小。

1 末端交会情况下的脱靶量

1.1 拦截交会模型

图1所示为一个基本的末端交会场景^[7-9]。图中: r 表示飞行器与目标间的相对距离; V_p 和 V_e 分别表示飞行器和目标的速度。

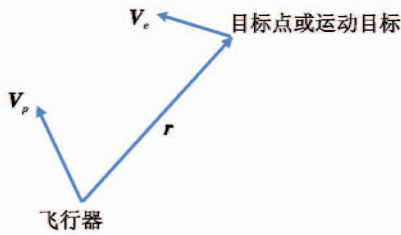


图1 交会场景

Fig.1 Engagement geometry

记 r_p 为惯性系中飞行器距离矢量, r_e 为惯性系中目标距离矢量。相对距离 r 可以写成

$$r = r_e - r_p \quad (1)$$

相对距离的一阶微分为

$$\dot{r} = V_e - V_p \quad (2)$$

对目标速度 V_e 和飞行器速度 V_p 进行微分运算,则追逐-逃逸场景可描述为

$$\begin{cases} \dot{r} = V_e - V_p \\ \dot{V}_e = A_e \\ \dot{V}_p = A_p \end{cases} \quad (3)$$

式中, A_e 和 A_p 分别为目标加速度和飞行器加速度。

1.2 脱靶量

脱靶量定义为在飞行末端时刻 t_f 的相对距离矢量 r ,可由上节中的状态方程积分得到。积分飞行器加速度矢量 A_p ,即

$$V_p(t_f) - V_p(t) = \int_t^{t_f} A_p(\gamma) d\gamma \quad (4)$$

积分目标加速度矢量 A_e ,即

$$V_e(t_f) - V_e(t) = \int_t^{t_f} A_e(\gamma) d\gamma \quad (5)$$

积分相对速度矢量 \dot{r} ,得

$$\begin{aligned} r(t_f) &= r(t) + \int_t^{t_f} [V_e(\gamma) - V_p(\gamma)] d\gamma = \\ &r(t) + \int_t^{t_f} \left[(V_e(t_f) - \int_t^{t_f} A_e(\gamma) d\gamma) - (V_p(t_f) - \right. \end{aligned}$$

$$\left. \int_t^{t_f} A_p(\gamma) d\gamma \right] d\beta = r(t) + (t_f - t) [V_e(t_f) - V_p(t_f)] - \int_t^{t_f} \int_t^{t_f} (A_e(\gamma) - A_p(\gamma)) d\gamma d\beta \quad (6)$$

分别利用式(4)和式(5)求得 $V_p(t_f)$ 、 $V_e(t_f)$,并把结果代入式(6),有

$$\begin{aligned} r(t_f) &= r(t) + (t_f - t)\dot{r}(t) + (t_f - t) \int_t^{t_f} [A_e(\gamma) - \\ &A_p(\gamma)] d\gamma - \int_t^{t_f} \int_t^{t_f} [A_e(\gamma) - A_p(\gamma)] d\gamma d\beta \quad (7) \end{aligned}$$

应用分步积分法可以得到

$$\int_t^{t_f} (t_f - t) a(\gamma) d\gamma = (t_f - t) \int_t^{t_f} a(\gamma) d\gamma - \int_t^{t_f} \int_t^{t_f} a(\gamma) d\gamma d\beta \quad (8)$$

将部分积分结果式(8)代入式(7),同时将 $A_e - A_p$ 简写为 a ,脱靶量为

$$\begin{aligned} r(t_f) &= r(t) + \tau \dot{r}(t) + \int_t^{t_f} (t_f - \gamma) a(\gamma) d\gamma = \\ &r(t) + \tau \dot{r}(t) + \int_0^\tau \eta a(t_f - \eta) d\eta = r(t) + \tau \dot{r}(t) + \\ &\int_0^\tau \eta A_e(t_f - \eta) d\eta - \int_0^\tau \eta A_p(t_f - \eta) d\eta \quad (9) \end{aligned}$$

式中, $\tau = t_f - t$,为剩余飞行时间。

1.3 零控脱靶量

零控脱靶量^[9-10]定义为飞行器不施加控制加速度($A_p = 0$)的情况下,飞行器的末端脱靶量。式(9)中令 A_p 项为零,得零控脱靶量为

$$r_{ZEM} = r(t) + \tau \dot{r}(t) + \int_0^\tau \eta A_e(t_f - \eta) d\eta \quad (10)$$

利用零控脱靶量 r_{ZEM} 表示的末端脱靶量为

$$r(t_f) = r_{ZEM} - \int_0^\tau \eta A_p(t_f - \eta) d\eta \quad (11)$$

2 最优控制理论下的飞行器加速度和脱靶量

优化目标是^[11-12]:飞行器在最短时间内以最小能量代价接近目标。最优性能指标为

$$J = k_t t_f + \frac{k_r}{2} r^T(t_f) r(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} A_p^T A_p dt \quad (12)$$

加入下列约束方程

$$\dot{c} = k_t + \frac{1}{2} A_p^T A_p \quad (13)$$

状态向量为

$$x = [r \quad V_p \quad c]^T \quad (14)$$

性能指标式(12)变为

$$J = \frac{k_r}{2} r^T r + c \quad (15)$$

哈密顿函数式为

$$H = \left(k_t + \frac{1}{2} A_p^T A_p \right) \lambda_c + \lambda_r^T (V_e - V_p) + \lambda_p^T A_p \quad (16)$$

得到最优解极值条件为

$$\frac{\partial H}{\partial A_p} = 0 \quad (17)$$

正则方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^\top = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{\lambda}_c = 0 \\ \dot{\lambda}_r = 0 \\ \dot{\lambda}_p = \lambda_r \end{cases} \quad (18)$$

横截条件为

$$\begin{cases} \lambda_f^\top = \frac{\partial J}{\partial x} \Big|_{t=t_f} \\ \lambda_c(t_f) = 1 \\ \lambda_r(t_f) = k_r r(t_f) \\ \lambda_p(t_f) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

伴随变量为

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_c(t) \\ \lambda_r(t) \\ \lambda_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ k_r r(t_f) \\ -k_r(t_f - t)r(t_f) \end{bmatrix} \quad (20)$$

极值条件为

$$\frac{\partial H}{\partial A_p} = 0_{3 \times 1} = A_p^\top \lambda_c + \lambda_p^\top \quad (21)$$

从式(21)中求解最优控制为

$$A_p = -\frac{\lambda_p}{\lambda_c} = k_r(t_f - t)r(t_f) \quad (22)$$

式(22)为想要达到式(12)中给出的最优指标,飞行器所应该施加的加速度矢量。可以看出 A_p 与剩余飞行时间 $\tau = t_f - t$ 和脱靶量 $r(t_f)$ 有关。

将式(22)代入式(11),得到在最优控制 A_p 作用下飞行器的末端脱靶量

$$\begin{aligned} r(t_f) &= r_{ZEM} - \int_0^\tau \eta k_r [t_f - (t_f - \eta)] r(t_f) d\eta = \\ & r_{ZEM} - k_r r(t_f) \int_0^\tau \eta^2 \end{aligned} \quad (23)$$

观察式(23)的两端,求解末端脱靶量

$$r(t_f) = \frac{1}{1 + \frac{k_r}{3}\tau^2} r_{ZEM} \quad (24)$$

式(24)建立了在最优控制 A_p 的作用下,末端脱靶量 $r(t_f)$ 与零控脱靶量 r_{ZEM} 间的关系^[12]。

3 一种新的剩余飞行时间估算方法

注意到式(19)中最优控制下的伴随变量的变化率 $\dot{\lambda}_c = 0$, 则伴随变量 $\lambda_c(t)$ 应为常值。取常值 $\lambda_c = 1$ 并代入哈密顿函数,式(16)成为^[12]

$$\begin{aligned} H &= \left(k_t + \frac{1}{2} A_p^\top A_p \right) \lambda_c + \lambda_r^\top (V_e - V_p) + \lambda_p^\top A_p = \\ & \left(k_t + \frac{1}{2} A_p^\top A_p \right) \cdot 1 + \lambda_r^\top \dot{r} + \lambda_p^\top A_p \quad (25) \end{aligned}$$

最优控制情况下的哈密顿函数 H 为零, 如果系数 k_t 为零, 则末端时刻相对距离矢量 $r(t_f)$ 垂直于相对速度矢量 $\dot{r}(t_f)$, 相对距离矢量垂直于相对速度矢量的接近方法被称作最近接近点法(Point of Closest Approach, PCA), 如图2所示。

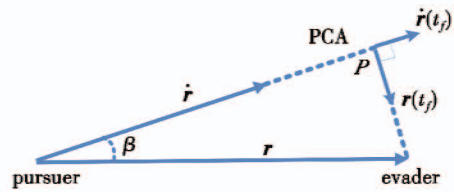


图2 最近接近点法

Fig.2 Point of closest approach

定义相对距离矢量 r 和相对速度矢量 \dot{r} 间的夹角为 β 。最近接近点法下的末端距离和末端速度点积为

$$r^\top(t_f) \dot{r}(t_f) = |r(t_f)| |\dot{r}(t_f)| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \quad (26)$$

3.1 剩余飞行时间近似估算

相对距离的末值 $r(t_f)$ 即为脱靶量, 即

$$r(t_f) = r(t) + \tau \dot{r}(t) + \int_0^\tau \eta \ddot{r}(t_f - \eta) d\eta \quad (27)$$

相对速度的末值 $\dot{r}(t_f)$ 可由式(4)的 $V_p(t_f)$ 和式(5)的 $V_e(t_f)$ 获得, 即

$$\dot{r}(t_f) = V_e(t_f) - V_p(t_f) = \dot{r}(t) + \int_0^\tau \ddot{r}(t_f - \beta) d\beta \quad (28)$$

将式(27)和式(28)代入到式(26)中, 有

$$\begin{aligned} [r(t) + \tau \dot{r}(t) + \int_0^\tau \eta \ddot{r}(t_f - \eta) d\eta]^\top \cdot \\ [\dot{r}(t) + \int_0^\tau \ddot{r}(t_f - \beta) d\beta] = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

设定式(29)中飞行器和目标间的相对加速度项为零 ($\ddot{r} = 0$), 有

$$[r(t) + \tau \dot{r}(t)]^\top \dot{r}(t) = 0 \quad (30)$$

近似的剩余飞行时间 τ 为^[3-4, 12]

$$\tau = - \left| \frac{r^\top r}{r^\top \dot{r}} \right| \quad (31)$$

在飞行器和目标都具有常值速度的情况下, 式(31)的估算是可行的, 给出了到达最近接近点(PCA)的近似时间。这与广泛使用的 $\tau = - \left| \frac{r}{\dot{r}} \right|$ 估算方法相近, 可以看作真实剩余飞行时间的一阶近似^[3-4]。

3.2 应用最近接近点法的剩余飞行时间估计

如果飞行器(追逐者)受理想加速度控制, 即加速

度以 $A_p = k_r(t_f - t)r(t_f)$ 变化(见式(22)), 则相对速度 \dot{r} 的末值为

$$\dot{r}(t_f) = \dot{r} + \int_t^{t_f} \ddot{r}(\beta) d\beta \approx \dot{r} + \int_t^{t_f} A_e(\beta) d\beta - \frac{3}{2\tau} r_{ZEM} \quad (32)$$

为了求解方便, 假定目标具有定常逃逸速度 ($A_e = 0$)。设 $|r|$ 和 $|\dot{r}|$ 分别为 r 和 \dot{r} 的大小, 将式(24)和式(32)代入式(26)得到

$$\frac{r_{ZEM}^T}{1 + \frac{k_r}{3}\tau^2} \left(\dot{r} - \frac{3}{2\tau} r_{ZEM} \right) = \frac{-2\tau}{1 + \frac{k_r}{3}\tau^2} \cdot$$

$$(3|r^T||r| + 4|r^T||\dot{r}|\tau + |\dot{r}^T||\dot{r}|\tau^2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \quad (33)$$

对于已知的目标加速度 A_e 变化, 注意到 r_{ZEM} 也是关于剩余飞行时间 τ 的函数(式(10)), 故精确的剩余飞行时间 τ 可通过牛顿迭代法由式(33)求得^[12]

$$r_{ZEM}^T \left(\dot{r} - \frac{3}{2\tau} r_{ZEM} \right) =$$

$$-2\tau(3|r^T||r| + 4|r^T||\dot{r}|\tau + |\dot{r}^T||\dot{r}|\tau^2) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \quad (34)$$

将零控脱靶量 r_{ZEM} 的表达式代入式(34), 注意到 $A_e = 0$, 可得

$$3r^T r + 4r^T \dot{r} \tau + \dot{r}^T \dot{r} \tau^2 = (3|r^T||r| + 4|r^T||\dot{r}|\tau + |\dot{r}^T||\dot{r}|\tau^2) \cdot (-\sin \beta) \quad (35)$$

求解方程得到

$$\tau = -\frac{|r|}{|\dot{r}|} \frac{2(\cos \beta + \sin \beta) \pm \sqrt{1 + 8\sin \beta \cos \beta - 3\sin^2 \beta - 6\sin \beta}}{1 + \sin \beta} \quad (36)$$

对于相对速度 $|\dot{r}| < 0$, 以及剩余飞行时间 τ 为正值, 方程的唯一根为

$$\tau = -\frac{|r|}{|\dot{r}|} \frac{2(\cos \beta + \sin \beta) - \sqrt{1 + 8\sin \beta \cos \beta - 3\sin^2 \beta - 6\sin \beta}}{1 + \sin \beta} \quad (37)$$

4 算例

设定目标的初始速度分别为 50 m/s, 加速度为 2 m/s²。目标坐标系下飞行器的相对初始运动参数为 $r = (34698 \text{ m}, -64765 \text{ m}, 67277 \text{ m})$, $v = (1274.7 \text{ m/s}, -2242.9 \text{ m/s}, 2542 \text{ m/s})$ 。

从图 3 和图 4 可以看出, 当相对速度和相对位置矢量间的夹角 β 增大时, 新的 PCA 方法在估算精度上明显优于传统方法。在 β 较小时, 两种方法并无太大差别。

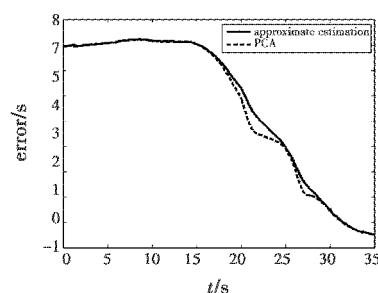


图 3 剩余飞行时间估算误差 ($V_e = 50 \text{ m/s}$)

Fig. 3 Time-to-go estimation error for constant evader velocity $V_e = 50 \text{ m/s}$

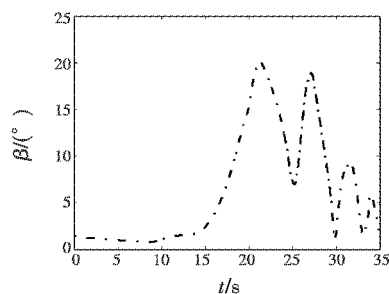


图 4 相对速度和相对位置间夹角大小变化

Fig. 4 Included angle β between relative position and relative velocity vector

5 结论

剩余飞行时间是飞行器制导环节的一个重要参数。本文运用最优控制理论得到脱靶量和零控脱靶量的表达式, 基于 PCA 末端交会场景推导了剩余飞行时间的解。主要工作如下所述。

1) 基于末端拦截场景推导了脱靶量和零控脱靶量的表达式。以最短飞行时间、最小脱靶量和最小控制代价为指标函数, 运用最优控制理论得到了飞行器的最优加速度矢量。在最优控制 A_p 的作用下, 给出飞行器的末端脱靶量 $r(t_f)$, 并建立了 $r(t_f)$ 和零控脱靶量 r_{ZEM} 之间的关系。

2) 在 PCA 末端接近模型下, 给出 $r^T(t_f)\dot{r}(t_f)$ 的表达式。代入末端脱靶量和末端相对速度的值后, 求得剩余飞行时间的两个解。这两个解都考虑了相对位置和相对速度矢量间的夹角 β , 仿真表明这两个解都比传统的一阶近似方法估计误差要小, 尤其在夹角较大的时候。

3) 在推导公式的过程中, 为了得到闭式解, 假定目标具有定常速度。仿真表明, 对于变速度目标, 新方法估计误差依然小于传统方法, 即 PCA 方法对于机动目标同样适用。

参 考 文 献

- [1] GUELMAN M. The closed-form solutions of pure proportional navigation [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1976, 12(7):526-532.
- [2] YUAN P J, CHERN J S. Ideal proportional navigation [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1992, 15(4):1161-1165.
- [3] TAHK M J, RYOO C K, HANGJU C. Recursive time-to-go estimation for homing guidance missiles [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2002, 38(1):13-24.
- [4] RYOO C K, HANGJU C, TAHK M J. Time-to-go weighted optimal guidance with impact angle constraints [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(3):483-492.
- [5] 吕永佳, 王宝贵, 陈晓刚. 剩余飞行时间改进估算方法研究 [J]. *弹箭与制导学报*, 2012, 32(3):23-26.
LÜ Y J, WANG B G, CHEN X G. The study on improved algorithm for residual flight time estimation [J]. *Journal of Projectiles, Rockets, Missiles and Guidance*, 2012, 32(3):23-26.
- [6] VINCENT C L. Time-to-go estimate for missile guidance [C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, San Francisco, California, 2011:151-165.
- [7] BEHROUZ E, MOHSEN B, JAFAR R. Optimal sliding-mode guidance with terminal velocity constraint for fixed-interval propulsive maneuvers [J]. *Acta Astronautica*, 2008, 62:556-562.
- [8] ASIF F, DAVID N L. Bank-to-turn missile guidance with radar imaging constraints [J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2005, 28(6):1157-1170.
- [9] DWIVEDI P N, TIWARI S N, BHATTACHRYA A. A ZEM dynamics based integrated estimation guidance and control of interceptors [C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Portland, Oregon, 2011:79-102.
- [10] DWIVEDI P N, TIWARI S N, BHATTACHRYA A. A ZEM based effective integrated estimation and guidance of interceptors in terminal phase [C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Portland, Oregon, 2011:124-148.
- [11] 程国采. 航天飞行器最优控制理论与方法 [M]. 长沙:国防科技大学出版社, 1997.
CHENG G C. Optimal control theory and method for spacecrafts [M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 1997.
- [12] ROBERT W M. A new paradigm in optimal missile guidance [D]. Tucson: The University of Arizona, 2009.
- (上接第 56 页)
- [5] STRAHLER A H. The use of prior probabilities in maximum likelihood classification of remotely sensed data [J]. *Remote Sensing of Environment*, 1980, 10:135-163.
- [6] SITKENHEAD M J, AALDERS I H. Classification of landsat thematic mapper imagery for land cover using neural networks [J]. *International Journal of Remote Sensing*, 2008, 29(7):4129-4150.
- [7] BRUZZONE L, PRIETO D F, SERPICO S B. A neural-statistical approach to multitemporal and multisource remote-sensing image classification [J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 1999, 37(3):1350-1359.
- [8] RANIA C, DEEPA S N. PSO with mutation for fuzzy classifier design [J]. *Procedia Computer Science*, 2010, 2:307-313.
- [9] MATHER P M, KOCH M. Computer processing of remotely-sensed images: An introduction [M]. New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2011:229-285.
- [10] LEITE P B C, FEITOSA R Q, FORMAGGIO A R, et al. Hidden Markov models for crop recognition in remote sensing image sequences [J]. *Pattern Recognition Letters*, 2011, 32:19-26.
- [11] STUMPF A, KERLE N. Combining random forests and object-oriented analysis for landslide mapping from very high resolution imagery [J]. *Procedia Environmental Sciences*, 2011, 3:14-19.
- [12] BONISSONE P, CADENAS J M, GARRIDO M C, et al. A fuzzy random forest [J]. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2010, 51:729-747.
- [13] STUMPF A, KERLE N. Object-oriented mapping of landslides using random forests [J]. *Remote Sensing of Environment*, 2011, 115:2564-2577.
- [14] TADJUDIN S. Classification of high dimensional data with limited training samples [D]. West Lafayette: Purdue University, 1998.
- [15] LINEAR J L. Unmixing of multispectral signals via wavelet feature selection [D]. Starkville: Mississippi State University, 2002.
- [16] FOODY G M. Status of land cover classification accuracy assessment [J]. *Remote Sensing of Environment*, 2002, 80:185-201.
- [17] BISHOP Y M, FIENBERG S E, HOLLAND P W. Discrete multivariate analysis: Theory and practice [M]. Cambridge: MIT Press, 1975.
- [18] MONTSERUD R A, LEAMANS R. Comparing global vegetation maps with the Kappa statistic [J]. *Ecological Modelling*, 1992, 62:275-293.