

# 量测噪声存在时的自抗扰控制分析

黄朝东, 王劲松

(北京航天长征飞行器研究所,北京 100076)

**摘要:** 主要讨论量测噪声对自抗扰控制器(ADRC)的影响,分析了在各种噪声条件下 ADRC 的估计误差,并合理设计滤波器用以减少噪声对系统的影响。最后,通过仿真实例对分析结论进行了验证。

**关键词:** 量测噪声; 自抗扰控制; 扩张状态观测器; 非线性动态; 滤波器

**中图分类号:** V271.4; O231.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-637X(2013)07-0073-04

## Analysis of ADRC in the Present of Measurement Noise

HUANG Chaodong, WANG Jinsong

(Beijing Institute of Space Long March Vehicle, Beijing 100076, China)

**Abstract:** The main purpose of this paper is to study Active Disturbance Rejection Control (ADRC) in the present of measurement noise. Estimation error is analyzed for some types of noise, and a filter is designed to reduce the effect of noise. Finally, simulation results demonstrate the main conclusions.

**Key words:** measurement noise; Active Disturbance Rejection Control (ADRC); extended state observer; nonlinear dynamics; filter

### 0 引言

自抗扰控制(ADRC)是由韩京清提出的一种控制方法<sup>[1]</sup>,迄今为止,已经进行了大量的研究工作<sup>[2-5]</sup>,其核心是扩张状态观测器(ESO)。然而,以往的文献在设计控制器时很少考虑噪声的影响,而系统的输出往往含有量测噪声,如GPS的量测误差和陀螺漂移等。文献[1]讨论了系统输出被噪声污染时的扩张状态观测器,但是没有定量研究,更没有分析闭环系统的稳定性。文献[6-7]定量地讨论了高增益观测器增益与噪声幅值对系统估计精度和控制精度的影响,说明了高增益会放大噪声的影响。

由于扩张状态观测器原理与高增益观测器相似,于是以下问题亟待解决:自抗扰控制在系统输出含有噪声的情况下能否正常工作?量测噪声如何影响闭环系统的性能?设计方法能否最大程度地减少噪声的影响?本文分析了存在量测噪声时自抗扰控制器的工作能力,并定量给出在常值噪声、低频噪声和低频噪声条件下扩张状态观测器的估计精度,为噪声存在时自抗扰控制的研究打下了基础。

### 1 问题描述

考虑单输入单输出状态方程

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(f(x, t) + bu) \\ y = Cx + v(t), \quad t \geq t_0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ 为系统状态变量; $u$ 为控制输入; $y$ 为量测输出; $f(x, t)$ 为非线性时变函数且可能包含未知动态和外部干扰; $b$ 是未知参数; $v(t)$ 是量测噪声; $(A, B, C)$ 满足如下标准型。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}^T$$

注:单输入单输出非线性系统在一定条件下可以通过反馈线性化变成标准型(1)和内动态两部分<sup>[8]</sup>,而大多数文献只能处理稳定的零动态系统(最小相位系统)。本文主要讨论噪声的影响,因此只考虑系统(1),而忽略稳定的零动态部分。

设计扩张状态观测器(ESO)估计不确定动态

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \beta_1(y - z_1) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = z_{n+1} + \beta_n(y - z_1) + b_0 u \\ \dot{z}_{n+1} = \beta_{n+1}(y - z_1) \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $z_i$  为对状态  $x_i$  的估计,  $i=1, 2, \dots, n$ ; 参数  $b_0$  为  $b$  的先验估计;  $z_{n+1}$  为对未知非线性动态  $f(\mathbf{x}, t) + (b - b_0)u$  的估计; 参数  $\beta_j = \frac{\bar{\beta}_j}{\varepsilon^j}$ ,  $j \leq n+1$ ; 多项式  $L(s) = s^{n+1} + \bar{\beta}_1 s^n + \dots + \bar{\beta}_{n+1}$  是 Hurwitz 的;  $\varepsilon$  为一可调的足够小的参数, 用于决定系统的跟踪精度。

文献[9-10]详细讨论了在没有测量噪声的情况下(即  $v(t) = 0$ ) ADRC 的稳定性, 设计控制器为

$$u = \frac{-\mathbf{K}^T \mathbf{z} - z_{n+1}}{b_0} \quad (3)$$

式中:  $\mathbf{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n]^T$ ;  $\mathbf{K}$  为给定控制参数, 则得到以下稳定性定理。

**定理 1** 在一定条件下<sup>[9]</sup>, 若先验估计  $b_0$  满足

$\left\| \frac{\bar{\beta}_{n+1}}{L(s)} \right\| \left\| \frac{b - b_0}{b_0} \right\| \leq \alpha_A < 1$ , 其中,  $\alpha_A$  是常数, 则在 ESO (2) 和反馈控制(3)下, 存在一个  $\varepsilon^*$  使得对于任意  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ , 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| \leq O(\varepsilon) \quad (4)$$

从式(4)可以看出, 通过设置足够小的参数  $\varepsilon$ , ADRC 能很好地估计出不确定性动态并进行补偿, 使得系统达到预定的跟踪精度。并且  $\varepsilon$  越小, 系统的跟踪精度越高。然而, 当量测输出被噪声污染时(即  $v(t) \neq 0$ ),  $\varepsilon$  是否能任意小, 系统的精度又如何, 下文将继续分析。

文献[6]定量讨论了系统含有量测噪声的高增益观测器时的跟踪精度。该文献设计如下高增益观测器(并非扩张状态观测器)估计系统状态

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}(f(\mathbf{x}, t) + bu) + \mathbf{H}(y - \mathbf{C}\mathbf{z}) \quad (5)$$

式中: 观测增益  $\mathbf{H}$  满足  $\mathbf{H}^T = [\frac{\alpha_1}{\varepsilon} \ \frac{\alpha_2}{\varepsilon^2} \ \dots \ \frac{\alpha_n}{\varepsilon^n}]$ ; 多项式  $s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n$  稳定, 则得到定理 2。

**定理 2** 假设存在常数  $\mu$  使得量测噪声满足  $|v(t)| \leq \mu$ , 则在一定条件下<sup>[6]</sup>, 高增益观测器方程(5)的估计误差满足

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)\| \leq c_1 \varepsilon + c_2 \frac{\mu}{\varepsilon^{n-1}} \quad (6)$$

其中,  $c_1, c_2$  是常数。

从式(6)可以看出, 观测器的估计误差由增益参数  $\varepsilon$  和量测噪声幅值  $\mu$  共同决定。在  $n > 1$  的情况下, 如果  $\varepsilon$  取得太小, 则会放大噪声对观测器估计误差的影响。因此产生如下问题: 与高增益观测器原理相类似的扩张状态观测器的估计误差由哪些因素决定? 自抗扰控制器的估计精度是否与式(6)相同?

## 2 主要结果

现在通过考察 ESO(2) 的 Laplace 变换来分析 AD-

RC 工作原理以及噪声对系统的影响, 将式(2)写成传递函数的形式得到

$$\begin{cases} sz_1 = z_2 + \beta_1(y - z_1) \\ \vdots \\ sz_n = z_{n+1} + \beta_n(y - z_1) + b_0 u \\ sz_{n+1} = \beta_{n+1}(y - z_1) \end{cases} \quad (7)$$

为简单记,  $u$  既代表时域的  $u(t)$  又代表频域的  $u(s)$ ,  $z_i$  既代表时域的  $z_i(t)$  又代表频域的  $z_i(s)$ 。由于主要讨论量测噪声对系统的影响, 这里不考虑 Laplace 变换的初值, 以免使方程形式变得过于复杂。由  $y = x_1 + v(t)$  可以将式(7)改为

$$\begin{cases} sz_1 = z_2 + \beta_1(x_1 - z_1) + \beta_1 v \\ \vdots \\ sz_n = z_{n+1} + \beta_n(x_1 - z_1) + \beta_n v + b_0 u \\ sz_{n+1} = \beta_{n+1}(x_1 - z_1) + \beta_{n+1} v \end{cases} \quad (8)$$

设  $F(\mathbf{x}, s)$  是非线性函数  $f(\mathbf{x}, t)$  的 Laplace 变换, 则方程(1)可得到如下传递函数的形式

$$\begin{cases} sx_1 = x_2 \\ \vdots \\ sx_n = F(\mathbf{x}, s) + (b - b_0)u + b_0 u \end{cases} \quad (9)$$

为研究状态观测器估计误差  $x_i - z_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 联合式(8)、式(9)可得到误差方程传递函数

$$\begin{cases} s(x_1 - z_1) = x_2 - z_2 - \beta_1(x_1 - z_1) - \beta_1 v \\ s(x_2 - z_2) = x_3 - z_3 - \beta_2(x_1 - z_1) - \beta_2 v \\ \vdots \\ s(x_n - z_n) = F(\mathbf{x}, s) + (b - b_0)u - z_{n+1} - \beta_n(x_1 - z_1) - \beta_n v \end{cases} \quad (10)$$

由式(10)得到关系式

$$(s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_n)(x_1 - z_1) + z_{n+1} + \beta_1 s^{n-1} v + \dots + \beta_n v = F(\mathbf{x}, s) + (b - b_0)u \quad (11)$$

联合式(11)以及式(8)的最后一个方程  $sz_{n+1} = \beta_{n+1} \cdot (x_1 - z_1) + \beta_{n+1} v$ , 解得:  $x_1 - z_1 = \{s[F(\mathbf{x}, s) + (b - b_0)u] - \beta_1 s^n v + \dots - \beta_n s v - \beta_{n+1} v\} / (s^{n+1} + \beta_1 s^n + \dots + \beta_n s + \beta_{n+1})$ 。

最后得到

$$z_{n+1} = \frac{\beta_{n+1}[F(\mathbf{x}, s) + (b - b_0)u + s^n v]}{s^{n+1} + \beta_1 s^n + \dots + \beta_n s + \beta_{n+1}} \quad (12)$$

再由式(10)递推得到当  $1 \leq i \leq n$  时

$$x_i - z_i = \{ (s^i + \beta_1 s^{i-1} + \dots + \beta_{i-1} s) [F(\mathbf{x}, s) + (b - b_0)u] - \beta_i s^i v + \dots - \beta_n s^i v - \beta_{n+1} s^{i-1} v \} / (s^{n+1} + \beta_1 s^n + \dots + \beta_n s + \beta_{n+1}) \quad (13)$$

由式(12)与式(13)知, 当噪声  $v(t) = 0$  时,  $z_{n+1}$  可以看作未知非线性动态  $f(\mathbf{x}, t) + (b - b_0)u$  的滤波, 因此在一定条件下能很好地估计出  $f(\mathbf{x}, t) + (b - b_0)u$ , 进而作为不确定因素的补偿用于闭环反馈。理论上讲,  $\varepsilon$  越小, 扩张状态观测器(2)增益越大, 滤波器

$\frac{\beta_{n+1}}{s^{n+1} + \beta_1 s^n + \dots + \beta_n s + \beta_{n+1}}$ 的带宽越宽,系统的跟踪误差越小。

然而,当系统存在量测噪声的时候,由式(12)与式(13)可以看出,噪声对观测器误差确实存在影响,而误差精度由以下两式决定

$$x_i - z_i \approx -\frac{\beta_i s^i v + \dots + \beta_n s^i v + \beta_{n+1} s^{i-1} v}{s^{n+1} + \beta_1 s^n + \dots + \beta_n s + \beta_{n+1}} \quad (14)$$

$$(F(x, s) + (b - b_0)u) - z_{n+1} \approx -\frac{\beta_{n+1} s^n v}{s^{n+1} + \beta_1 s^n + \dots + \beta_n s + \beta_{n+1}} \quad (15)$$

定义系统扩张状态  $x_{n+1} = f(x, t) + (b - b_0)u$ , 则式(14)与式(15)可以统一写成

$$x_j - z_j \approx -\frac{\beta_j s^j v + \dots + \beta_n s^j v + \beta_{n+1} s^{j-1} v}{s^{n+1} + \beta_1 s^n + \dots + \beta_n s + \beta_{n+1}} \quad (16)$$

其中,  $j=1, 2, \dots, n+1$ 。通过式(16)可推断出各类噪声对误差精度的影响,得到如下结论。

**结论1** 由于微分的存在,常值噪声主要影响误差  $x_1 - z_1$ ,且稳态误差大小被噪声幅值  $|v|$  界定,而其他误差  $x_i - z_i (k \geq 2)$  稳态值几乎不受噪声影响。

**结论2** 低频正弦噪声对高阶状态误差  $x_j - z_j$  的影响要小于对低阶状态误差  $x_i - z_i (i < j)$  的影响,而所有稳态误差大小均被噪声幅值  $|v|$  界定。

**结论3** 高频正弦噪声对高阶状态误差  $x_j - z_j$  的影响要大于对低阶状态误差  $x_i - z_i (i < j)$  的影响,且误差大小随着阶次的升高而增大。在这种情况下,可以设计低通滤波器减少噪声对系统的影响。

注:由于控制精度由估计精度决定,故只分析估计精度,而并没有直接分析控制精度。

### 3 仿真实例

考虑下列二阶系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x, t) + bu(t) \\ y = x_1 + v(t) \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $f(x, t) = x_1^2(t) + 2x_2(t)$ , 为不确定性非线性动态;  $b=9$ , 为未知参数。被跟踪的参考模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_{ref1} = x_{ref2} \\ \dot{x}_{ref2} = -k_1 x_{ref1} - k_2 x_{ref2} + A \end{cases}$$

式中:  $k_1=1; k_2=2; A=2$ 。于是扩张状态观测器 ESO 可以写成

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \beta_1(y - z_1) \\ \dot{z}_2 = z_3 + \beta_2(y - z_1) \\ \dot{z}_3 = \beta_3(y - z_1) \end{cases} \quad (18)$$

式中:  $\beta_1 = \frac{\bar{\beta}_1}{\varepsilon}; \beta_2 = \frac{\bar{\beta}_2}{\varepsilon^2}; \beta_3 = \frac{\bar{\beta}_3}{\varepsilon^3}; \bar{\beta}_1=3; \bar{\beta}_2=3; \bar{\beta}_3=1; \varepsilon=$

0.05。ADRC 控制器设计为:  $u(t) = \frac{-k_1 z_1 - k_2 z_2 - z_3 + A}{b_0}$ , 采样步长为 1 ms, 控制参数  $b_0=15$  (如何选取控制参数也是值得研究的问题)。

首先考虑常值噪声的影响, 设  $v(t) \equiv 0.05$ , 得到仿真结果如图 1 所示。

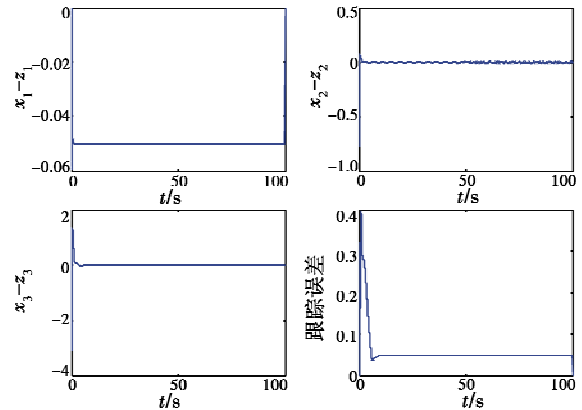


图1 常值噪声下的系统误差

Fig. 1 System error with constant noise

从图 1 可以看出,常值噪声主要对观测器误差稳态值  $x_1 - z_1$  产生影响,对其他误差稳态值几乎没有影响,因此系统的跟踪误差主要由误差  $x_1 - z_1$  决定,从而验证了结论 1。

现在考虑低频正弦噪声对系统的影响, 设  $v(t) = 0.05 \sin(0.1t)$ , 得到仿真结果如图 2 所示。

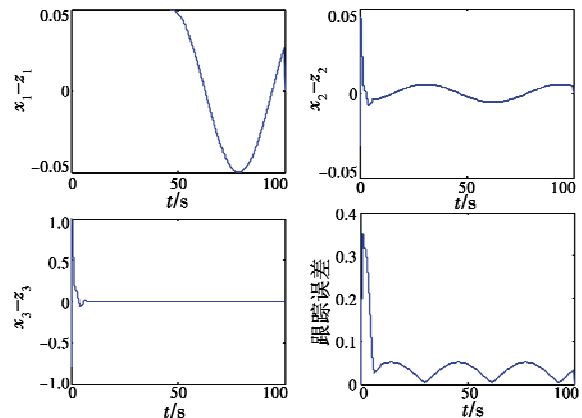


图2 低频噪声下的系统误差

Fig. 2 System error with low frequency noise

从图 2 可以看出,低频噪声对观测器误差  $x_1 - z_1$  影响最大,对误差  $x_2 - z_2$  次之,对误差状态  $x_3 - z_3$  影响最小,因此系统的跟踪误差主要由  $x_1 - z_1$  决定,从而验证了结论 2。

现在考虑高频正弦噪声对系统的影响, 设  $v(t) = 0.05 \sin(50t)$ , 得到仿真结果如图 3 所示。

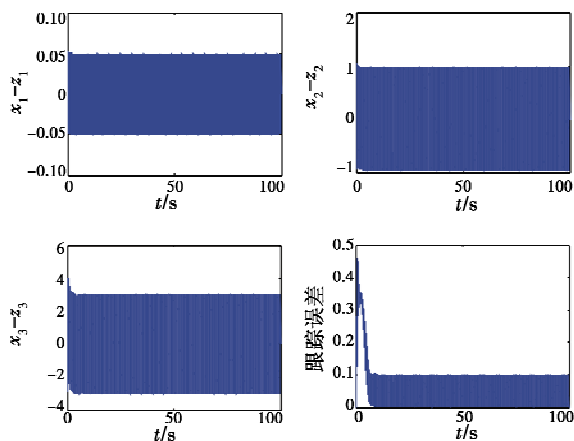


图3 高频噪声下的系统误差

Fig.3 System error with high frequency noise

考虑在使用 ESO 之前对输出信号  $y$  进行滤波处理,即

$$y_F = \frac{\omega_n}{s + \omega_n} y \quad (19)$$

其中,  $\omega_n = 20$ 。于是扩张状态观测器方程改为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \beta_1(y_F - z_1) \\ \dot{z}_2 = z_3 + \beta_2(y_F - z_1) \\ \dot{z}_3 = \beta_3(y_F - z_1) \end{cases} \quad (20)$$

仿真结果如图4所示。

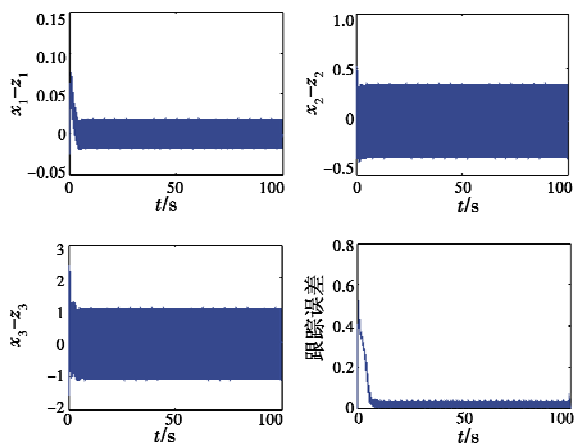


图4 滤波后高频噪声下的系统误差

Fig.4 System error with high frequency noise after filtering

由图3与图4可知,高频正弦噪声情况下,估计误差  $x_j - z_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 随着阶次的升高而增加。设计低通滤波器可以有效地减少噪声对系统的影响,从而验证了结论3。

## 4 结论

本文讨论了含有量测噪声条件下自抗扰控制器 ADRC 对付非线性不确定性动态的能力,分析了在常值噪声、低频噪声以及高频噪声条件下 ADRC 的估计精度,并通过仿真实例进行了验证。ADRC 尽管在很多领域有了大量的应用,然而量测噪声的存在不可避免。如何与各种滤波方法相结合,如何分析与处理随机噪声等大量问题都值得继续研究。

## 参考文献

- [1] 韩京清. 自抗扰控制技术[M]. 北京:国防工业出版社,1998.
- [2] HOU Y, GAO Z, JIANG F, et al. Active disturbance rejection control for web tension regulation [C]//Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, 2001:4974-4979.
- [3] HUANG Y, LUO Z W, SVININ M, et al. Extended state observer based technique for control of robot systems [C]//Proceedings of the 4th World Congress on Intelligent Control and Automation, 2002:807-2811.
- [4] FENG G, HUANG L. A new robust algorithm to improve the Y. Liu dynamic performance on the speed control of induction motor drive [J]. IEEE Transactions on Power Electronics, 2004, 19(6), 1614-1627.
- [5] 黄朝东. 几类非线性不确定性系统的控制与反馈能力研究[D]. 北京:中国科学院数学与系统科学研究院, 2012.
- [6] BALL A A, KHALIL H K. High-gain observers in the presence of measurement noise: A nonlinear gain approach [J]. Automatica, 2009(45):936-943.
- [7] AHRENS J H, KHALIL H K. High-gain observers in the presence of measurement noise: A switched-gain approach [C]//Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Mexico, Dec. 9-11, 2008:2288-2293.
- [8] KHALIL H K. Nonlinear Systems[M]. Prentice Hall: Upper Saddle River, New Jersey, 2002.
- [9] XUE W, HUANG Y. Comparison of the DOB based control, a special kind of PID control and ADRC control [C]//Proceedings of 2011 American Control Conference, 2011: 4373- 4379.
- [10] YANG X, HUANG Y. Capability of extended state observer for estimating uncertainties [C]//Proceedings of 2009 American Control Conference, the 2009:3700-3705.

(上接第66页)

network [J]. IEEE Trans Industrail Informatics, 2009, 5 (1):38-49.

[9] BOYER M, FRABOUL C. Tightening end to end delay upper

bound for AFDX network calculus with rate latency FIFO servers using network calculus [C]//IEEE International Workshop on Factory Communication Systems. Dresden: IEEE, 2008:11-20.