

摆式陀螺大偏北角运动特性研究

陈河¹, 张志利¹, 周召发¹, 王凯¹, 马超²

(1. 第二炮兵工程大学兵器发射理论与技术国家重点学科实验室, 西安 710025;

2. 第二炮兵驻519厂军事代表室, 山西长治 046012)

摘要: 目前关于摆式陀螺运动规律的研究主要局限于小偏北角领域, 不能满足全方位快速寻北技术对其大偏北角运动规律的要求。突破传统方法, 首次提出并研究了摆式陀螺大偏北角运动特性, 利用欧拉动力学方程建立摆式陀螺大偏北角运动模型并进行合理简化。针对模型的非线性特点, 结合李亚普诺夫稳定性理论定性分析了其运动稳定性, 得到具有唯一稳定平衡点的条件。与小偏北角时的情况不同, 仿真结果表明大偏北角运动时, 摆式陀螺的陀螺轴绕其稳定平衡点的周期性摆动不再满足正弦变化规律, 摆动周期随摆幅和悬带扭矩而改变。研究结论可为实现摆式陀螺寻北仪全方位快速寻北提供理论依据。

关键词: 摆式陀螺; 全方位寻北; 大偏北角; 运动特性

中图分类号: V241.5 文献标志码: A 文章编号: 1671-637X(2013)12-0056-04

Research on Motion Characteristics of Pendulous Gyroscope in Large Azimuth

CHEN He¹, ZHANG Zhili¹, ZHOU Zhaofa¹, WANG Kai¹, MA Chao²

(1. State Key Laboratory of Weapon Launching Theory and Technology, The Second Artillery Engineering University, Xi'an

710025, China; 2. Military Representative Office of The Second Artillery in No. 519 Factory, Changzhi 046012, China)

Abstract: The current research on motion of pendulous gyroscope is mainly limited in minute azimuth angle, which can't satisfy the requirement of quick omni-bearing north seeking. Unlike the traditional method, we made analysis on motion characteristics of pendulous gyroscope in large azimuth angle, established the motion model based on the Euler dynamical equations, and simplified it reasonably according to the actual conditions. Qualitative analysis of movement stability was made based on the Liapunov stability theory, and the condition where there is only one stable balance point was gained. Simulations show that when the azimuth angle is large, the movement of pendulous gyroscope around its equilibrium point is not a sine curve, which is different from the case in minute azimuth angle; and the swing period varies with pendulum deflection and torque of suspending string. These conclusions can provide a theoretical basis for quick omni-bearing north seeking with a large azimuth.

Key words: pendulous gyroscope; omni-bearing north seeking; large azimuth angle; motion characteristics

0 引言

摆式陀螺经纬仪以其完全自主性、高精度、寻北时间较短等优点广泛应用于航空航天、探测、隧道、军事等需要寻北定向的场合。摆式陀螺经纬仪寻北的诸多方法, 如两逆转点法、四分之一周期法、时差逆转点法

等都以其寻北运动规律为基础^[1]。为提高寻北精度, 不同学者对摆式陀螺运动规律进行了深入研究, 如文献[2]详细阐述了不同悬带扭矩作用下摆式陀螺寻北仪的运动情况; 文献[3-4]讨论了电压变化、转速稳定性等对陀螺经纬仪定向的影响; 文献[5]总结了温度、磁场、振动等对陀螺经纬仪定向精度稳定性的影响; 文献[6]讨论了电磁阻尼作用下摆式陀螺的运动规律; 文献[7-8]则对摆式陀螺的不同力学模型进行了对比分析。然而这些研究局限于陀螺轴在真北附近小幅摆动的情况, 将偏北角看作小量, 通过合理线性化

收稿日期: 2012-12-20

修回日期: 2013-01-29

基金项目: 国家自然科学基金(41174162)

作者简介: 陈河(1989—), 男, 河南南阳人, 硕士, 研究方向为全方位快速寻北技术。

将运动方程化为一二阶常系数线性微分方程,然后求解得到运动的解。对初始时刻陀螺轴与子午线间夹角为大偏角、陀螺轴做大幅摆动、偏北角不能看作小量时陀螺轴的运动规律缺乏相关研究,只有少数学者进行了定性分析,如文献[9]采用速度合成法分析了摆式陀螺寻北仪的无阻尼振荡规律,文献[10]采用奇点理论对单自由度陀螺寻北仪在大偏北角情况下的运动特性进行了定性分析。随着寻北定向朝着全方位快速高精度方向的发展,仅研究小偏北角时的情况已不能满足要求。因此,本文首先根据欧拉动力学方程建立了摆式陀螺大偏北角运动模型,然后从定性和定量两个角度对摆式陀螺大偏北角运动规律进行分析,从而进一步认识其全方位运动规律,为实现全方位寻北提供理论依据。

1 摆式陀螺大偏北角运动方程

为分析摆式陀螺的大偏北角运动特性,需要根据其力学模型建立大偏北角运动方程。对摆式陀螺进行数学建模的方法有欧拉法、拉格朗日法和动静法,3种方法得出的运动方程是一致的^[11-12],本文采用欧拉动力学方程建立摆式陀螺的大偏北角运动方程。

摆式陀螺寻北时的力学模型如图 1 所示。悬挂带长 l ,灵敏部重心为 G ,悬挂带与陀螺房接触点为 A , G 与 A 的距离为 a , G 与转子中心 O' 距离为 d 。寻北时转子轴偏离真北的水平角为 α (逆时针为正, $-180^\circ \sim 180^\circ$),俯仰角为 β (逆时针为正, $0^\circ \sim 90^\circ$),悬挂带与铅垂线夹角为 γ ,寻北点的纬度为 φ 。

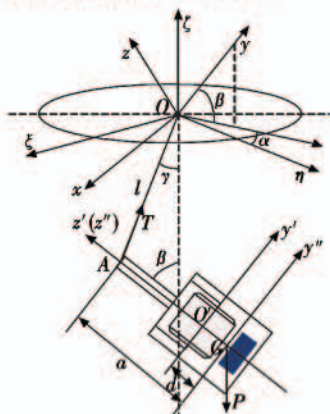


图 1 摆式陀螺动力学模型

Fig. 1 Dynamic model of pendulous gyroscope

为建立摆式陀螺的运动方程,首先建立如下坐标系:惯性系,以地心为原点,三轴指向恒星;平动系 $O\xi_0\eta_0\zeta_0$,以悬挂点 O 为原点,三轴指向与惯性系相同,由于计算重力时已考虑到牵连惯性力,该系可以视为惯性系;定向系 $O\xi\eta\zeta$ ($OENZ$), $O\xi$ (OE) 指向东, $O\eta$ (ON) 指向真北, $O\zeta$ (OZ) 指向天顶,该坐标系以地

球自转角速度 ω_e 相对平动系转动;莱沙尔系 $O'x'y'z'$,原点为 O' , z' 轴沿陀螺房对称轴指向上, y' 轴与转子自转角动量方向一致, x' 按右手法则确定;莱沙尔系平移到 O 点得到 $Oxyz$,平移到 G 得到 $Gx''y''z''$ 。

根据刚体动力学知识,刚体的一般运动可以分解为随质心的平动和绕质心的转动^[13-14]。所以取平动系 $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ 为定系, $Gx''y''z''$ 为动系。动系相对定系的转动由定向系相对定系的转动(即地球自转)以及动系相对定向系的两次转动组成,即 $O\xi_0\eta_0\zeta_0 \xrightarrow{\omega_e} O\xi\eta\zeta$ ($OENZ$) $\xrightarrow{\dot{\alpha}}$ $x_1y_1z_1$ (y_1) $\xrightarrow{\dot{\beta}}$ $Gx''y''z''$ 。

根据角速度的矢量性和坐标变换法则得到动系相对定系角速度在动系的投影为^[7]

$$\begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_e \sin \alpha \cos \varphi + \dot{\beta} \\ \omega_e \cos \alpha \cos \beta \cos \varphi + \omega_e \sin \beta \sin \varphi + \dot{\alpha} \sin \beta \\ \omega_e \cos \beta \sin \varphi - \omega_e \cos \alpha \sin \beta \cos \varphi + \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix} \quad (1)$$

转子相对定系角速度在动系的投影为

$$\begin{pmatrix} \Omega_{tx} \\ \Omega_{ty} \\ \Omega_{tz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_e \sin \alpha \cos \varphi + \dot{\beta} \\ \omega_e \cos \alpha \cos \beta \cos \varphi + \omega_e \sin \beta \sin \varphi + \dot{\alpha} \sin \beta + \Omega' \\ \omega_e \cos \beta \sin \varphi - \omega_e \cos \alpha \sin \beta \cos \varphi + \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中, Ω' 为转子自转角速度。

设转子绕动系 3 个坐标轴的转动惯量为 A_1, B_1, C_1 ,陀螺房壳绕动系 3 个坐标轴的转动惯量为 A_2, B_2, C_2 ,令 $A = A_1 + A_2, C = C_1 + C_2$,根据欧拉动力学方程得^[6]

$$\begin{cases} A \frac{d\Omega_x}{dt} + C\Omega_z\Omega_y - [B_1(\Omega_z + \Omega') + B_2\Omega_z]\Omega_x = M_x \\ C \frac{d\Omega_z}{dt} + [B_1(\Omega_y + \Omega') + B_2\Omega_y]\Omega_x + A\Omega_x\Omega_y = M_z \end{cases} \quad (3)$$

实际上由于 $\Omega' \gg \Omega$,略去方程中不含 Ω' 的项^[6],方程可简化为

$$\begin{cases} -B_1\Omega'\Omega_z = M_x \\ B_1\Omega'\Omega_x = M_z \end{cases} \quad (4)$$

将式(1)、式(2)代入式(4),同时考虑悬带拉力、重力、弹性恢复力矩(主要是悬带扭矩)、阻尼力矩的作用,可以得到^[6-7]

$$\begin{cases} H(\omega_e \cos \beta \sin \varphi - \omega_e \cos \alpha \sin \beta \cos \varphi + \dot{\alpha} \cos \beta) = mga\beta \\ H(\omega_e \sin \alpha \cos \varphi + \dot{\beta}) = -D_B \Delta \alpha - K_D \dot{\alpha} \end{cases} \quad (5)$$

由于 ω_e, β 实际上为小量,且 $\cos \beta \approx 1, \sin \beta \approx \beta$,同时略去二阶以上的小量,就可以得到部分线性化后的摆式陀螺大偏北角运动方程为

$$\begin{cases} H(\omega_e \sin \varphi + \dot{\alpha}) = mga\beta \\ H(\omega_e \sin \alpha \cos \varphi + \dot{\beta}) = -D_B \Delta\alpha - K_D \dot{\alpha} \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$, α_0 为悬带扭矩为零时的方位角; D_B 为悬带扭力系数; K_D 为阻尼系数。

2 大偏北角运动稳定性分析

由于摆式陀螺全方位运动时 α 不再是小量, 所以式(6)不能做进一步线性化处理, 运动方程为非线性微分方程。由于非线性系统中叠加原理不再成立, 因此非线性系统的研究比线性系统要复杂得多。求取非线性微分方程的解析解非常困难, 目前的处理方法主要是以线性理论为基础的近似方法, 基本研究方法有定性方法和定量方法。定性方法关心的是在已知解的邻域内系统的一般稳定性特征, 而不是寻求与时间相关的解, 而定量方法关心的是运动的时间历程, 应用摄动法来求得这类解^[15]。随着计算机技术的发展, 很多非线性系统可以通过数值分析的方法得到数值解, 从而完成对系统运动规律的定量分析。本节通过定性分析研究摆式陀螺全方位运动时的运动稳定性, 下一节通过数值仿真对摆式陀螺全方位运动进行定量研究。

在实际情形中, 干扰因素总是不可避免地存在着, 而微小的干扰因素施于系统的影响对不同的运动是不一样的, 有的并不显著, 有的就很大。在非线性系统中, 对应于平衡状态和周期振动的定常解一般有几个, 必须研究解的稳定性, 从而确定哪一个解在实际中能实现。

式(6)的平衡点为 $\beta^* = H\omega_e \sin \varphi / mga$, α^* 为 $H\omega_e \cos \varphi \sin \alpha = -D_B(\alpha - \alpha_0)$ 的根。令 $D_K = H\omega_e \cos \varphi$, $K = D_B / D_K$, 则 α^* 满足

$$\sin \alpha = -K(\alpha - \alpha_0). \quad (7)$$

如图2所示, 该方程解的个数和大小取决于 K 和 α_0 的值, 且没有一般的解析形式。 $K=0$ 时, 方程平衡点为 $(\pm k\pi, H\omega_e \sin \varphi / mga)$, 实际上有两个平衡点 $(0, H\omega_e \sin \varphi / mga)$ 和 $(\pi, H\omega_e \sin \varphi / mga)$; 当 $0 < K < 1$ 时, 方程的平衡点不仅与 K 有关, 还与 α_0 有关, 情况比较复杂; 当 $K \geq 1$ 时, 方程只有一个解。

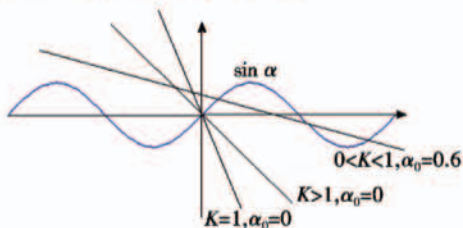


图2 α^* 解的情况示意图

Fig.2 Solutions of α^* with K and α_0

设 $\alpha = \alpha^* + d\alpha$, $\beta = H\omega_e \sin \varphi / mga + d\beta$, 代入式(6)得到相应的扰动方程为

$$\begin{cases} H\dot{d}\alpha = mga \cdot d\beta \\ D_K \sin \alpha^* \cos(d\alpha) + D_K \cos \alpha^* \sin(d\alpha) + H\dot{d}\beta = \\ -D_B(\alpha^* - \alpha_0) - D_B \cdot d\alpha - K_D \dot{d}\alpha \end{cases} \quad (8)$$

该方程为非线性方程, 根据李亚普诺夫稳定性理论知, 其未扰运动的稳定性可以通过式(8)一次近似方程的特征根来判定^[15]。

由于 $d\alpha, d\beta$ 是小量, 且 $\sin(d\alpha) \approx d\alpha$, $\cos(d\alpha) \approx 1$, α^* 满足式(7), 则式(8)一次近似方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{d}\alpha \\ \dot{d}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{mga}{H} \\ -\frac{D_B + D_K \cos \alpha^*}{H} & -\frac{mga K_D}{H^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\alpha \\ d\beta \end{pmatrix} \quad (9)$$

其特征方程为

$$\lambda^2 + \frac{mga}{H^2} K_D \lambda + \frac{mga}{H^2} (D_K \cos \alpha^* + D_B) = 0 \quad (10)$$

特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-K_D \pm \sqrt{K_D^2 - 4H^2(D_K \cos \alpha^* + D_B)/mga}}{2H^2/mga} \quad (11)$$

根据运动稳定性理论, 若 λ_1, λ_2 全都具有负实部, 则未扰运动是稳定的; 若 λ_1, λ_2 中有一个的实部是正的, 则未扰运动是不稳定的; 若 λ_1, λ_2 的实部都是非正的, 其中至少一个的实部为零, 则未扰运动的稳定性取决于方程组的高次项, 既可能是不稳定的, 也可能是稳定的^[16-17]。

实际中, 由于 $K_D > 0, K > 0$, 分析式(11)可以得到: 若 $D_K \cos \alpha^* + D_B > 0$, λ_1, λ_2 全都具有负实部, 此时对应的平衡点是稳定平衡点; 若 $D_K \cos \alpha^* + D_B < 0$, λ_1, λ_2 中有一个的实部大于零, 此时对应的平衡点是不稳定平衡点; 若 $D_K \cos \alpha^* + D_B = 0$, 有 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2K_D$, 对应的平衡点处于临界状态, 未扰运动的稳定性取决于方程组的高次项。

现有的陀螺经纬仪设备一般满足 $K > 1$, 结合式(7)知, 方程只有一个平衡点, 此时 $D_K \cos \alpha^* + D_B \geq D_B - D_K > 0$, 则该平衡点是稳定的。因此, 现有的陀螺经纬仪设备有且仅有一个稳定平衡点, 这是其能进行全方位寻北的理论基础。

3 运动规律的数值仿真

上节对摆式陀螺大偏北角运动的情况进行了定性分析, 下面结合典型陀螺经纬仪的相应参数, 运用数值仿真的方法对其运动情况进行定量分析。

某悬挂式陀螺经纬仪参数如下： $H = 0.392 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ， $m = 0.85 \text{ kg}$ ， $a = 0.15 \text{ m}$ ， $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ；被测地点的纬度 φ 按西安地区为准，取 $\varphi = 34^\circ$ ；地球自转角速度 $\omega_e = 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ 。

仿真结果如图 3 所示。

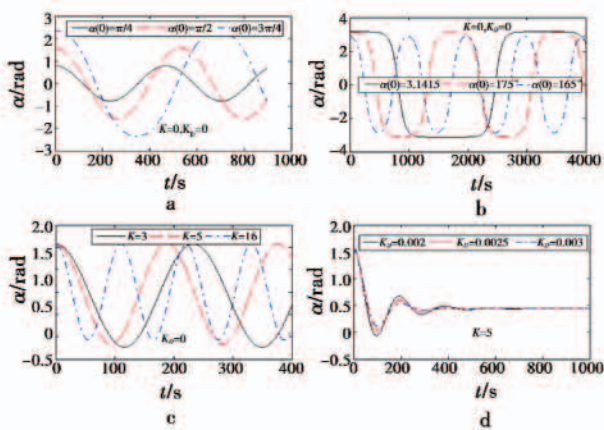


图 3 摆式陀螺大偏北角运动曲线

Fig. 3 Swing curves of pendulous gyro in large azimuth angle

从图 3a 和图 3b 可以看出：大偏角摆动时，陀螺转子轴的方位角仍然绕稳定平衡点 $\alpha = 0$ 进行周期性摆动，但不再满足正弦变化规律；摆动的周期与摆幅有关，随摆幅的增大而增大。

图 3c 显示出悬带扭矩对摆动具有两方面的影响，一方面摆动周期随扭矩的增大而减小，另一方面由于悬带扭矩的影响，摆动平衡位置不再位于真北方向；图中， $\alpha_0 = \pi/6$ ，根据式(7)可以求出对应于 K 为 3, 5, 16 的唯一的也是稳定的平衡点 α 分别为 0.3953, 0.4387, 0.4940。

从图 3d 可以看出，在电磁阻尼的作用下，陀螺转子轴的摆幅逐渐衰减，最后趋向于稳定在平衡点 α 为 0.4387 附近；而且阻尼越大， α 变化越平稳。

4 结论

通过以上分析可知，摆式陀螺全方位运动时，平衡点及其稳定性与 K 有关。 $K = 0$ 时，方程平衡点为 $(0, H\omega_e \sin \varphi/mga)$ 、 $(\pi, H\omega_e \sin \varphi/mga)$ ； $K \geq 1$ 时，方程只有一个平衡点 $(\alpha^*, H\omega_e \sin \varphi/mga)$ ， α^* 受悬挂带零位的影响，除悬带零位与真北重合之外不再位于真北方向； $0 < K < 1$ 时，平衡点情况比较复杂，取决于 K 和 α_0 的值。实际仪器一般有 $K > 1$ ，满足 $D_x \cos \alpha^* + D_b > 0$ ，所以实际摆式陀螺只有一个稳定平衡点，寻北时陀螺自转轴绕该平衡点摆动，可见，摆式陀螺寻北仪具有实现全方位寻北的理论依据。

α 初值较大时，其变化曲线不再是正弦曲线，但仍

然具有周期性； α 绕其稳定平衡点摆动，摆动周期随摆幅的增大而增大；悬带扭矩既使摆动周期减小，又使摆动平衡位置不再位于真北方向；阻尼的作用使摆动更加平稳，同时使摆幅不断衰减，最后稳定在平衡位置上。设计仪器时应考虑充分利用悬带扭矩和阻尼力矩的作用，设计适当的 K 值和 K_b 值，使陀螺转子轴能够迅速稳定到平衡位置，实现全方位快速寻北。

参考文献

- [1] 周召发,常振军,张志利.摆式陀螺寻北仪快速寻北的时差逆转点法[J].探测与控制学报,2012,34(4):64-66.
- [2] 煤炭科学研究院唐山分院陀螺经纬仪组.陀螺经纬仪——基本原理、结构与定向[M].北京:煤炭工业出版社,1982:1-23.
- [3] 刘小生,张学庄.陀螺马达转速稳定性对陀螺定向影响的探讨[J].四川测绘,1998(4):176-178.
- [4] 何会齐,刘小生.电压变化对陀螺定向的影响研究[J].江西有色金属,2003,17(3):10-12.
- [5] 刘小生.陀螺经纬仪定向精度及稳定性[M].北京:冶金工业出版社,2011.
- [6] 李涛.电磁阻尼在悬挂式二自由度陀螺中的应用[D].西安:西安理工大学,2007.
- [7] 姜春福.悬挂式二自由度陀螺经纬仪运动规律的研究[D].北京:北京工业大学,2000.
- [8] 闫光杰,朱晓东,王洪兰.陀螺经纬仪的运动模型及其分析[C]//第七届全国一般力学学术会议论文集,张家界,2002:38-42.
- [9] 许江宁,卞鸿魏,刘强,等.陀螺原理及应用[M].北京:国防工业出版社,2009:83-86.
- [10] 王洪兰.陀螺理论及在工程测量中的应用[M].北京:国防工业出版社,1995.
- [11] 刘希珠,雷田玉.陀螺力学基础[M].北京:清华大学出版社,1987.
- [12] 郭秀中,于波,陈云湘.陀螺仪理论及应用[M].北京:航空工业出版社,1987.
- [13] 刘延柱.陀螺力学[M].2版.北京:科学出版社,2009.
- [14] 王尚武,王一博.现代物理导论[M].长沙:国防科技大学出版社,2008:57-104.
- [15] 毕学涛.高等动力学[M].天津:天津大学出版社,1994:478-515.
- [16] 马尔金.运动稳定性理论[M].北京:科学出版社,1958.
- [17] 秦元勋,王联,王慕秋.运动稳定性理论与应用[M].北京:科学出版社,1981.