

基于四元数的弹道目标微多普勒仿真

孙永健^{1,2}, 程臻³, 付莹²

(1. 北京无线电测量研究所, 北京 100854; 2. 空军预警学院, 武汉 430019;

3. 中国航天科工集团第二研究院, 北京 100854)

摘要: 微动建模是研究弹道目标微多普勒特征的关键和基础。目前基于 Euler 角、Euler-Rodrigue 公式和齐次坐标的建模方法存在“万向节死锁”、奇异、计算复杂等问题。四元数方法采用 4 个参数代替矩阵方法的 9 个参数, 能够直观表示三维空间内任意旋转, 并克服现有方法的缺陷。经过推导, 给出了基于四元数的弹道目标进动和摆动微多普勒数学模型表达式。由于减少了矩阵运算, 使得目标微多普勒频率的计算更加简单。仿真结果表明, 基于四元数旋转的微动建模方法是合理的, 为弹道目标的微多普勒特征提取和识别提供了科学依据。

关键词: 微多普勒; 弹道目标; 四元数; 目标识别; 进动

中图分类号: V271.4; TN959.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-637X(2013)11-0065-05

Quaternion Based Micro-Doppler Simulation of Ballistic Targets

SUN Yongjian^{1,2}, CHENG Zhen³, FU Ying²

(1. Beijing Institute of Radio Measurement, Beijing 100854, China; 2. Air Force Early Warning Academy, Wuhan 430019, China; 3. The Second Academy of China Aerospace Science and Industry Corporation, Beijing 100854, China)

Abstract: Micro-motion kinetics modeling is a key and fundamental issue of ballistic target micro-Doppler feature research. At present, the modeling techniques based on Euler angles, Euler-Rodrigue formula and homogeneous coordinates have some problems such as “gimbal lock”, singularity and computational complexity. Quaternion method can express arbitrary rotation in 3D space intuitively and overcome shortcomings of the existing methods by using 4 values instead of the 9 of the corresponding matrix. The quaternion based precession and wobbling micro-Doppler frequency expressions of ballistic targets are presented after derivation. It simplifies the calculation of target micro-Doppler in that reducing matrix operations. The simulation results prove that the quaternion based micro-motion modeling method is valid and provides a scientific basis for micro-Doppler extraction and recognition of ballistic targets.

Key words: micro-Doppler; ballistic targets; quaternion; target recognition; precession

0 引言

弹道中段, 诱饵、碎片通常以相同的速度伴随弹头在大气层外飞行, 这给弹道目标的检测和识别提出了挑战, 使其成为关键技术问题。自旋稳定的弹头在外部分离力量的作用下会产生进动。根据动量守恒定律, 弹头微动将趋于稳定的进动, 直至其再入大气层。然而, 重诱饵将因为缺少姿态控制单元产生摆动, 由微动产生的微多普勒可以看作目标的唯一特征, 为目

标识别提供了可靠依据。近年来, 微多普勒效应及其在雷达目标识别领域的应用研究成为热点。建立精确合理的目标微动模型是开展此类研究的基础。

描述转动的方法主要有 Euler 角法、Euler-Rodrigue 公式法和齐次坐标法。Chen V C 研究了基于 Euler 角旋转的多普勒特征提取方法^[1], 采用 Euler-Rodrigue 公式给出了目标微动模型^[2]。文献[3]提出了齐次坐标法, 采用齐次坐标转换矩阵描述三维空间坐标系中的旋转。

虽然 Euler 角旋转矩阵法数学原理简单, 但是它也有一些缺点: 首先, 由于旋转矩阵的不可交换性, Euler 角旋转必须遵循特定的顺序进行; 其次, 一定的 Euler

角度不一定引起相等的旋转,即旋转是不均匀的。如果旋转角度达到 $\pi/2$ 时,Euler角旋转会造成“万向节死锁”^[4]。Euler-Rodrigue公式法仅由简单的代数表达式构成,因此具有计算量小,适合在线计算的优势。但是,当旋转角度达到 180° 时,可能发生奇异现象。齐次坐标法将三维旋转问题带到四维空间解决,必须进行复杂的矩阵运算。四元数作为一种数学工具,使人们更容易看到一个向量如何旋转,并从各自矩阵中提取相关信息。因此,本文采用四元数对目标的微动进行建模分析。

1 基于 Euler-Rodrigue 公式的弹道目标微多普勒模型

1.1 基于 Euler-Rodrigue 公式的弹头微多普勒模型

如图 1 所示,用来描述弹头微动的 3 个坐标系分别为雷达坐标系、参考坐标系和目标本体坐标系。

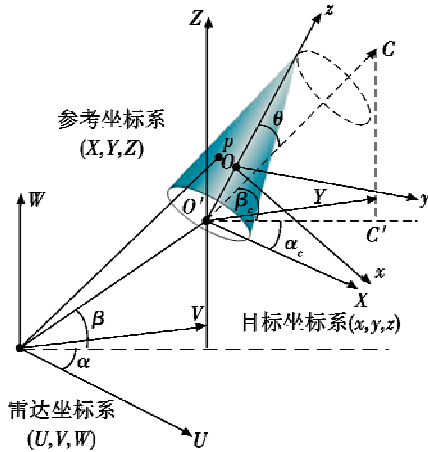


图 1 弹头微动几何模型

Fig. 1 The micro-motion geometry of warhead

在目标本体坐标系内,原点 O 为弹头质心,且弹头关于 Oz 轴对称。假设弹头在围绕对称轴 Oz 自旋的同时还围绕向量 $O'C$ 锥旋, O' 为 Oz 与 $O'C$ 的交点,设弹头在雷达坐标系内以速度 V 匀速飞行,弹头上的任一散射点 P 及其在目标本体坐标系内的初始坐标为 $r_p = (x_p, y_p, z_p)^T$,因此,点 P 在参考坐标系内的初始坐标为 $r_0 = R_{\text{init}}(r_p - r_c)$ 。其中, R_{init} 为初始旋转矩阵, $r_c = (0, 0, z_0)^T$ 为点 O' 在目标本体坐标系内的坐标,其在雷达坐标系内的相应坐标为 $R_0 = (U_0, V_0, W_0)^T$,所以,点 P 在雷达坐标系内的瞬时坐标可以表示为

$$R_t = R_0 + Vt + r_t \quad (1)$$

其中: $r_t = (X_p, Y_p, Z_p)^T = T_p r_0$, 为 t 时刻点 P 在参考坐标系中的坐标; $T_p(t) = R_c(t)R_s(t)$, $R_c(t)$ 和 $R_s(t)$ 分别为 t 时刻锥旋和自旋矩阵。由文献[5]可知

$$R_c(t) = I + \hat{e}_c \sin \Omega_c t + \hat{e}_c^2 (1 - \cos \Omega_c t) \quad (2)$$

$$R_s(t) = I + \hat{e}_s \sin \Omega_s t + \hat{e}_s^2 (1 - \cos \Omega_s t) \quad (3)$$

其中, Ω_c 和 Ω_s 分别为锥旋和自旋角速度。若目标平动分量已经被精确补偿,则散射点 P 的微多普勒分量可以表示为

$$f_{\text{rad}} = \frac{2f}{C} \left[\left(\frac{d}{dt} R_c \cdot R_s + R_c \cdot \frac{d}{dt} R_s \right) r_0 \right]_{\text{radial}} \quad (4)$$

式中: f 为雷达工作频率; C 为电磁波传播速度。

1.2 基于 Euler-Rodrigue 公式的诱饵微动模型

诱饵摆动模型如图 2 所示。

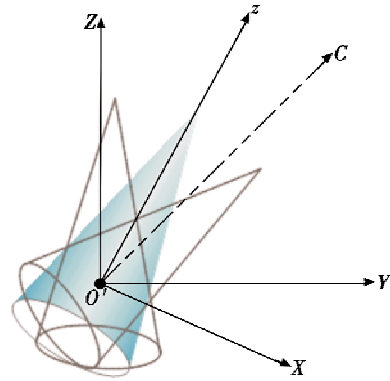


图 2 诱饵微动几何模型

Fig. 2 The micro-motion geometry of decoy

点 O' 为诱饵质心,其在向量 $O'z$ 与向量 $O'C$ 确定的平面内摆动。摆动角度可表示为

$$\theta = \theta(t) = \theta_m \sin \omega_n t \quad (5)$$

其中: θ_m 为摆动角度范围; $\omega_n = 2\pi f_w$ 表示摆动的角速度; f_w 为摆动频率。假设诱饵在雷达坐标系内以速度 V_b 匀速飞行,点 P_b 为诱饵上的任一散射点。与弹头目标类似,点 P_b 在雷达坐标系内的瞬时位置表示为

$$R_{b_t} = R_{b_0} + V_b t + r_{b_t} \quad (6)$$

其中: R_{b_0} 为点 P_b 在雷达坐标系内的坐标; $r_{b_t} = (X_p, Y_p, Z_p)^T = T_{b_t} r_{b_0}$, 表示 t 时刻点 P_b 摆动角度 θ 时,其在参考坐标系内的坐标向量; $r_{b_0} = R_{\text{init}}(r_{pb} - r_c)$, 为点 P_b 在参考坐标系内的初始位置向量; T_{b_t} 为一个 3×3 的转换矩阵。根据文献[6]

$$T_{b_t} = A_T B_T A_T^{-1} = A_T B_T A_T^T, \quad (7)$$

若平动分量已被精确补偿,点 P_b 的微多普勒分量可以表示为

$$f_{\text{rad}} = \frac{2f}{C} \left[\left(A_T \cdot \frac{d}{dt} B_T \cdot A_T^T \right) r_{b_0} \right]_{\text{radial}} \quad (8)$$

2 基于四元数的弹道目标微动模型

2.1 四元数概念

四元数是爱尔兰数学家和物理学家 William Rowan Hamilton 于 1843 年建立的数学概念。可以证明四元数能够表示三维空间内向量绕任意轴的旋转^[7]。四元数

是由 1 个实数单位 1 和 3 个虚数单位 i, j, k 组成的包含 4 个实元的超复数。其形式为^[8]

$$q = w + ix + jy + kz, \quad w, x, y, z \in \mathbf{R} \quad (9)$$

其中, 虚数单位 i, j, k 满足

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ i = jk = -kj \\ j = ki = -ik \\ k = ij = -ji \end{cases} \quad (10)$$

将四元数集合记为 \mathbf{H} 。若将 (i, j, k) 视为基矢量, 则可以把四元数分为标量和矢量两部分。实数 x 可以用四元数表示为 $q = (x, \mathbf{0})$ 。同理, 向量 \mathbf{v} 可以表示为四元数 $q = (0, \mathbf{v})$, 称为纯四元数。对于两个四元数 q 和 q' , 可以定义如下四元数运算: 加法运算 $q + q' = (s + s', \mathbf{v} + \mathbf{v}')$; 乘法运算 $q \otimes q' = (ss' - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}', s'\mathbf{v} + s\mathbf{v}' + \mathbf{v} \times \mathbf{v}')$; 点乘运算 $q \cdot q' = (s \cdot s', \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}')$; 共轭运算 $\bar{q} = (s, -\mathbf{v})$; 范数 $\|q\| = \sqrt{q \otimes \bar{q}} = \sqrt{q \bar{q}} = \sqrt{s^2 + \|\mathbf{v}\|^2}$; 求逆 $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|^2}$ 。

2.2 旋转的四元数描述

对于单位四元数有 $q^{-1} = \bar{q}$ 。若三维空间内向量绕过原点旋转轴旋转角度 θ , 则可以用单位四元数表示为

$$R = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), n \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \quad (11)$$

式中: \mathbf{n} 表示旋转轴的单位方向向量; θ 为按照右手定则绕旋转轴 \mathbf{n} 转过的角度。向量 \mathbf{v} 绕旋转轴的旋转可以用四元数表示为

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = R \otimes (0, \mathbf{v}) \otimes R^{-1} \quad (12)$$

式中: \mathbf{v} 是初始向量; \mathbf{v}_{rot} 为旋转得到的四元数; R 为旋转四元数。

单位四元数不仅可以表示单次旋转, 还可以表示多次旋转。设单位四元数 R 和 S 分别表示顺次的两次旋转, 则最终旋转四元数可表示为 $T = S \otimes R$ 。向量 \mathbf{v} 绕旋转轴的旋转可以表示为

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = T \otimes (0, \mathbf{v}) \otimes T^{-1} = S \otimes R \otimes (0, \mathbf{v}) \otimes (S \otimes R)^{-1} = S \otimes R \otimes (0, \mathbf{v}) \otimes R^{-1} \otimes S^{-1} \quad (13)$$

如图 3 所示, 若任意旋转轴不过原点, 而是经过点 p , 其单位向量用 \mathbf{a} 表示。

向量 \mathbf{v} 绕任意旋转轴的旋转可以表示为

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = R \otimes [(0, \mathbf{v}) - (0, \mathbf{p})] \otimes R^{-1} + (0, \mathbf{p}) \quad (14)$$

其中, 旋转四元数 $R = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \mathbf{a} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right)$ 。

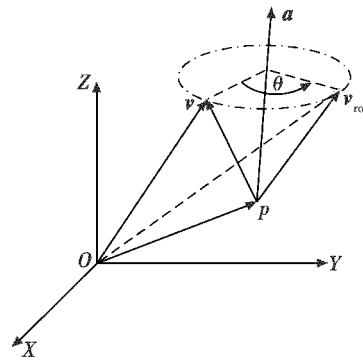


图 3 向量绕任意轴的旋转

Fig. 3 Rotation of a vector around arbitrary axis

2.3 基于四元数的弹头微动模型

由图 1 可知, 自旋轴单位向量 $\mathbf{s} = \mathbf{r}_c / \|\mathbf{r}_c\|$, 则自旋的四元数表示为

$$R = \left(\cos\frac{\theta_s}{2}, \mathbf{s} \cdot \sin\frac{\theta_s}{2} \right) \quad (15)$$

其中: $\theta_s = 2\pi f_s t$ 为 t 时刻的自旋角度; f_s 是自旋频率。同理, 其锥旋轴单位向量 $\mathbf{c} = (\cos \alpha_c \cos \beta_c, \sin \alpha_c \cos \beta_c, \sin \beta_c)$, 锥旋的四元数表示为

$$S = \left(\cos\frac{\theta_c}{2}, \mathbf{c} \cdot \sin\frac{\theta_c}{2} \right) \quad (16)$$

其中: $\theta_c = 2\pi f_c t$, 为 t 时刻的锥旋角度; f_c 为锥旋频率。若点 P 在参考坐标系内的坐标表示为 $V = (0, \mathbf{r}_0)$, 则其 t 时刻的位置四元数为

$$V_t = S \otimes R \otimes V \otimes (S \otimes R)^{-1} \quad (17)$$

其微多普勒频率表达式为

$$f_{\text{md}} = \frac{2f}{C} \left[\frac{d}{dt} (S \otimes R) \otimes V \otimes (S \otimes R)^{-1} + (S \otimes R) \otimes V \otimes \frac{d}{dt} (S \otimes R)^{-1} \right]_{\text{radial}} = \frac{2f}{C} \left\{ \left(\frac{d}{dt} S \otimes R + S \otimes \frac{d}{dt} R \right) \otimes V \otimes (S \otimes R)^{-1} + (S \otimes R) \otimes V \otimes \left(\frac{d}{dt} R^{-1} \otimes S^{-1} + R^{-1} \otimes \frac{d}{dt} S^{-1} \right) \right\}_{\text{radial}} \quad (18)$$

其中:

$$\frac{d}{dt} R = \left(-\pi f_s \sin\frac{\theta_s}{2}, \pi f_s \mathbf{s} \cdot \cos\frac{\theta_s}{2} \right);$$

$$\frac{d}{dt} R^{-1} = \left(-\pi f_s \sin\frac{\theta_s}{2}, -\pi f_s \mathbf{s} \cdot \cos\frac{\theta_s}{2} \right);$$

$$\frac{d}{dt} S = \left(-\pi f_c \sin\frac{\theta_c}{2}, \pi f_c \mathbf{c} \cdot \cos\frac{\theta_c}{2} \right);$$

$$\frac{d}{dt} S^{-1} = \left(-\pi f_c \sin\frac{\theta_c}{2}, -\pi f_c \mathbf{c} \cdot \cos\frac{\theta_c}{2} \right)。$$

2.4 基于四元数的诱饵微动模型

由图2可知,旋转轴单位向量 $w = (0, 0, 1)$, 其对应的旋转四元数为

$$R = \left(\cos \frac{\theta_w}{2}, w \cdot \sin \frac{\theta_w}{2} \right) \quad (19)$$

设散射点 P 对应的四元数坐标为 $V = (0, A_T r_{30})$, 则在 t 时刻其相应的四元数坐标为

$$V_1 = A_T \cdot \text{vec}(R \otimes V \otimes R^{-1}) \quad (20)$$

其中,操作符 $\text{vec}(\cdot)$ 表示去四元数的矢量数组。所以其微多普勒频率可表示为

$$f_{md} = \frac{2f}{C} \left(\frac{dV_1}{dt} \right)_{\text{radial}} = \frac{2f}{C} A_T \cdot \text{vec} \left[\frac{d}{dt} R \otimes V \otimes R^{-1} + R \otimes V \otimes \frac{d}{dt} R^{-1} \right]_{\text{radial}} \quad (21)$$

3 仿真与分析

仿真中,假设雷达的工作频率为 10 GHz, 脉冲重复频率 PRF 为 2048 Hz。在相参处理间隔内处理脉冲数为 2048 个。弹道目标质心在雷达坐标系内的初始坐标为 $(0, -100e3, -200e3)$ 。旋转轴 $O'C$ 的方位角和俯仰角分别为 $\alpha_z = 160^\circ$ 和 $\beta_z = 50^\circ$ 。初始 Euler 角 $(\varphi, \theta, \psi) = (30^\circ, 40^\circ, 30^\circ)$ 。假设弹头和诱饵的质心位于 $z_0 = -0.3$ 。3 个等效散射点在目标本体坐标系中的坐标分别为 $P_0(0, 0, 1)$, $P_1(0.3, 0.4, -0.5)$ 和 $P_2(-0.3, -0.4, -0.5)$ 。以上所有长度单位为 m。设弹头自旋频率 f_s 为 4 Hz, 锥旋频率 f_c 为 2 Hz; 诱饵摆动频率 f_w 为 4 Hz, 摆动角度范围 θ_m 为 20° 。

图4给出了分别基于 Euler-Rodrigue 公式和四元数的进动弹头上等效散射点 P_1 的运动轨迹。

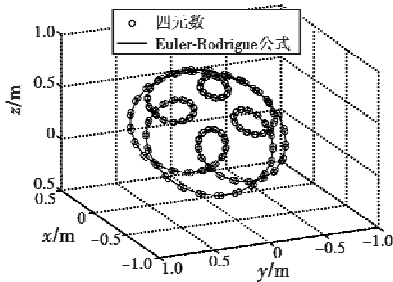


图4 弹头目标散射点 P_1 的运动轨迹

Fig. 4 Precession track of the warhead scatterer P_1

进动弹头上等效散射点的微多普勒理论值曲线如图5所示。可以看出,基于四元数的微多普勒理论值与基于 Euler-Rodrigue 公式的理论值曲线基本重合。图6和图7分别给出了基于 Euler-Rodrigue 公式和四元数的进动弹头微多普勒时频像。比较可知,基于四元数的时频像与基于 Euler-Rodrigue 公式的时频像非

常相似,且二者与图5所示的进动微多普勒理论值基本一致。基于 Euler-Rodrigue 公式和四元数的诱饵摆动微多普勒曲线如图8所示,图9给出了基于四元数的摆动诱饵微多普勒时频像。

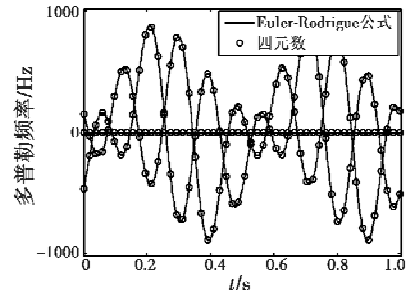


图5 进动弹头散射点的微多普勒理论值

Fig. 5 Theoretical precession MD value of warhead scatters

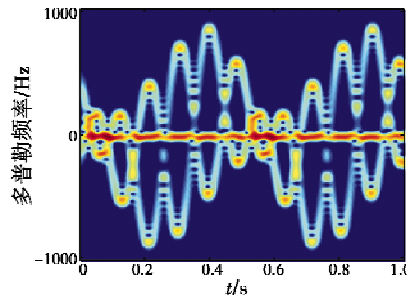


图6 基于 Euler-Rodrigue 公式的进动弹头微多普勒时频像

Fig. 6 Euler-Rodrigue based precession MD signature

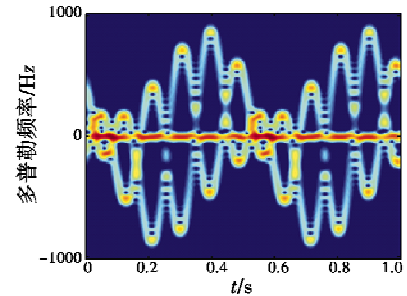


图7 基于四元数的进动弹头微多普勒时频像

Fig. 7 Quaternion based precession MD signature

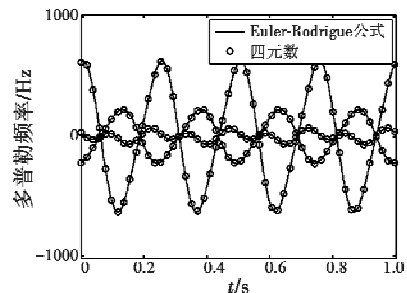


图8 摆动诱饵散射点的微多普勒理论值

Fig. 8 Theoretical wobbling MD value of decoy scatters

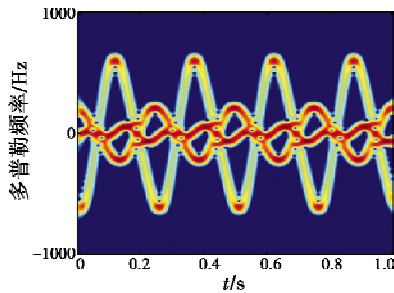


图 9 基于四元数的摆动诱饵微多普勒时频像

Fig. 9 Quaternion based wobbling MD signature of decoy

可以看出,该时频像特征与理论计算的曲线是一致的。另外,还可以看出散射点 P_0 的微多普勒变化范围大于散射点 P_1 和 P_2 。微多普勒频率的大小与摆动角度范围、摆动频率和摆动角度有关。同时,摆动微多普勒频率亦呈周期变化,大小约为 0.25 s ,即摆动频率约为 4 Hz 。微多普勒理论计算值与微多普勒仿真值的一致性证明基于四元数的微多普勒表达式的正确性。仿真也表明,弹头与诱饵具有不同的微多普勒特征。

4 结论

本文提出了一种基于四元数的弹道目标微动建模方法,并分别推导了弹头和重诱饵的四元数微多普勒表达式。四元数旋转能减少矩阵运算,克服现有方法存在的问题,有效避免“万向节死锁”和奇异值。比较而言,基于四元数的目标微多普勒特征与基于 Euler-Rodrigue 公式的结果一致,表明了基于四元数建模方法的正确性和可靠性。由于不同的微动产生不同的微多普勒特征,提取目标相应的微多普勒特征,有助于对弹头、诱饵等弹道目标的分类、识别。下一步的研究重点是目标微多普勒特征提取和目标分类。

参考文献

- [1] CHEN V C. Doppler signatures of radar backscattering from objects with micro-motions [J]. IET Signal Process, 2008, 2(3):291-300.
- [2] CHEN V C, LI F, HO S S, et al. Analysis of micro-Doppler signatures [J]. IEE Proceedings-Radar, Sonar & Navigation, 2003, 150(4):271-276.
- [3] YANG Y C, TONG N N, FENG C Q, et al. Micro-motion modeling and micro-Doppler analysis based on homogeneous coordinates [C]//IEEE International Conference on Signal Processing System, Yantai, 2011, 39(4).
- [4] DUNN F, PARBERRY L. 3D math primer for graphics and game development [M]. 2nd ed. Boca Raton, US: CRC Press, 2011.
- [5] CHEN V C. The micro-Doppler effect in radar [M]. Norwood, US: Artech House, 2011.
- [6] GAO Hongwei, XIE Liangui, WEN Shuliang, et al. Analysis and extraction of micro-Doppler induced by cone-shaped target's wobbling [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(12):2497-2502.
- [7] 刘俊峰, 三维转动的四元数表述[J]. 大学物理, 2004, 23(4):39-62.
- [8] PUJOL J. Hamilton, rodrigues, gauss, quaternions, and rotations: A historical reassessment [J]. Communications in Mathematical Analysis, 2012, 13(2):1-14.
- [9] HOL J. Sensor fusion and calibration of inertial sensors, vision, Ultra-Wideband and GPS [D]. Department of Electrical Engineering Link ping University, Sweden, 2011.

声 明

本刊已许可中国学术期刊(光盘版)电子杂志社、北京万方数据股份有限公司、重庆维普资讯有限公司等在其网络平台和系列数据库产品中以数字化方式复制、汇编、发行、信息网络传播本刊全文,著作权使用费与本刊稿酬一并支付。作者向本刊提交文章发表的行为即视为同意我部上述声明。