

## 采用 DGCMG 的敏捷卫星姿态/角动量联合控制

崔培玲<sup>1,2,3</sup>, 张颖<sup>1,2,3</sup>

(1. 北京航空航天大学仪器科学与光电工程学院, 北京 100191; 2. 惯性技术国家级重点实验室, 北京 100191;  
3. 新型惯性仪表与导航系统技术国防重点学科实验室, 北京 100191)

**摘要:** 研究了采用双框架控制力矩陀螺 (Double Gimbaled Control Momentum Gyroscope, DGCMG) 的敏捷卫星姿态/角动量联合控制问题, 针对 DGCMG 的饱和奇异问题, 提出了基于 Lyapunov 的姿态/角动量联合控制方法。首先, 建立了采用两个平行构型 DGCMG 的卫星姿态动力学模型, 然后根据陀螺的力矩方程, 通过可视化分析得出该构型只有内部隐奇异和饱和奇异两类奇异。隐奇异可以通过操纵律进行避免, 而饱和奇异只能通过卸载方式来解决。为了避免采用推力器或磁力矩器等卸载方式带来的问题, 设计了连续管理角动量的姿态/角动量联合控制器。此外, 为了缩短系统的稳定时间, 采用 Sigmoid 函数对控制器的参数选取进行了改进。该控制器完成敏捷卫星快速机动快速稳定任务的同时, 还能连续调节角动量, 达到姿态控制和角动量管理的折中。数值仿真结果验证了控制器的有效性。

**关键词:** 双框架控制力矩陀螺; 敏捷卫星; 姿态/角动量联合控制器

中图分类号: V448.22; O221.6 文献标志码: A 文章编号: 1671-637X(2013)01-0049-07

## Attitude and Momentum Control of Agile Satellite Using DGCMG

CUI Peiling<sup>1,2,3</sup>, ZHANG Ying<sup>1,2,3</sup>

(1. School of Instrument Science and Opto-Electronics Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China;  
2. Science and Technology on Inertial Laboratory, Beijing 100191, China;  
3. Fundamental Science on Novel Inertial Instrument & Navigation System Technology Laboratory, Beijing 100191, China)

**Abstract:** Attitude and momentum control for agile satellite was investigated. In the presence of the saturation singularity of Double Gimbaled Control Momentum Gyroscope (DGCMG), we proposed an attitude and momentum controller based on the theory of Lyapunov. Firstly, the satellite dynamic model with 2 DGCMGs in parallel configuration was constructed, and the singularity visualization analysis of the DGCMGs based on the torque equation was given. There are two kinds of singularity type, inner singularity and saturation singularity. The former can be avoided by using steering law, and the later can only be solved by using the desaturation method. In order to avoid the problem caused by desaturation method, the attitude and momentum controller was given. Besides, sigmoid function was used to modify the controller parameter selection for the purpose of shortening the stabilization time. The controller can accomplish the assignment of rapid maneuver and quick stability while keeping the tradeoff between the attitude control and momentum management. Simulation results are given to show the validity of the proposed controller.

**Key words:** Double Gimbaled Control Momentum Gyroscope (DGCMG); agile satellite; attitude and momentum controller

### 0 引言

控制力矩陀螺 (Control Moment Gyroscope, CMG) 是航天器姿态控制的理想执行机构, 用于航天器姿态快速机动和精确指向<sup>[1]</sup>。根据框架自由度的个数, CMG 可以分为单框架 CMG (Single Gimbal CMG, SGC-MG) 和双框架 CMG (Double Gimbal CMG, DGCMG)。

收稿日期: 2012-08-24

修回日期: 2012-09-13

基金项目: 国家“九七三”项目 (2009CB72400101C); 国家民用航天预研项目; 国家自然科学基金创新群体 (61121003)

作者简介: 崔培玲 (1975—), 女, 河南巩义人, 博士, 副教授, 研究方向为航天器姿态控制。

目前国内外较为常见的敏捷卫星执行机构为 SGCMG。SGCMG 具有奇异性复杂的特点,若进行三轴机动最少需要 3 个 SGCMG,相对于 SGCMG, DGCMG 具有奇异性问题不明显、操纵律设计简单、单个双框架陀螺具有两自由度控制的优点,采用 2 个 DGCMG 即可完成三轴机动,可以降低姿控系统的体积、重量和功耗,具有更优的综合效益<sup>[2]</sup>。

奇异分析是研究和应用 CMG 的理论基础,在奇异点附近,理论框架角速度过大,超出执行机构的能力,无法输出指令力矩,通过奇异性可视化分析可以直观地看出各种 CMG 构型的奇异分布,从而采取不同的解决方法。在这方面,文献[3]对金字塔构型的 SGCMG 进行了可视化分析,文献[4]对三正交构型的 DGCMG 进行了可视化分析。奇异类型按角动量处于角动量包络的位置可以分为内部奇异和饱和奇异,目前,操纵律主要针对内部奇异。饱和奇异一般采用姿控喷气装置或磁力矩器进行卸载,为了避免这些卸载方法带来的问题,可以将姿态与角动量联合进行控制。文献[5-6]都对空间站设计了姿态/角动量非线性联合控制器。针对空间站的姿态/角动量联合控制主要有线性二次型调节器或基于 Lyapunov 方法的非线性控制,这两种方法都是直接用欧拉角来描述航天器的姿态,空间站由于机动角度小,在控制时将耦合力矩忽略。而敏捷机动卫星由于机动角度大,若直接利用欧拉角描述姿态会产生奇异,一般用四元数描述卫星姿态,并且敏捷卫星的大角度机动会使三轴都有一定的耦合。

本文考虑敏捷机动卫星对质量、体积及功耗的要求,采用 2 个平行构型的 DGCMG 作为执行机构进行姿态/角动量联合控制的研究。首先建立了基于 DGCMG 的敏捷卫星动力学模型;其次针对两平行构型的 DGCMG 给出了可视化分析,表明了这种构型的奇异类型及分布;然后设计了敏捷卫星姿态/角动量联合控制器,并采用了 Sigmoid 函数改进对参数的选取;最后通过数值仿真验证了该控制器的有效性。

## 1 卫星姿态动力学模型

本文以 DGCMG 作为敏捷卫星的姿态执行机构,姿态控制大回路中的示意如图 1 所示。

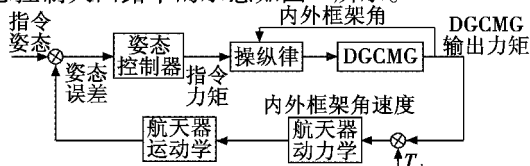


图 1 采用 DGCMG 的敏捷机动卫星控制系统框图

Fig. 1 Block diagram of attitude control system of satellite using DGCMG

考虑一个刚体卫星,内部安装有  $n$  个 DGCMG,规定航天器本体坐标系为  $Ox_b y_b z_b$ ,惯性坐标系为  $Ox_i y_i z_i$ ,基座坐标系  $Ox_s y_s z_s$  与本体系固连,双框架控制力矩陀螺的外框架坐标系为  $Ox_j y_j z_j$ ,内框架坐标系为  $Ox_g y_g z_g$ ,各个坐标系的关系如图 2 所示。

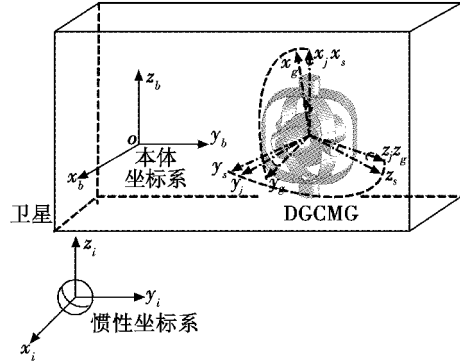


图 2 各坐标系关系图

Fig. 2 Relationship of reference frames

整个卫星系统的角动量在本体系下可以写为

$$\mathbf{H}_b = \mathbf{I}_t \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{h}_{cmg} \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{I}_t$  表示计入 DGCMG 质量后的航天器相对于本体坐标系的常值惯量矩阵;  $\boldsymbol{\omega}_b$  表示星体角速度;  $\mathbf{h}_{cmg}$  可以写为

$$\mathbf{h}_{cmg} = \sum_{i=1}^n \mathbf{h}_{cmgi} = \sum_{i=1}^n \mathbf{h}_{ji}^b + \sum_{i=1}^n \mathbf{h}_{gi}^b + \sum_{i=1}^n \mathbf{h}_{ri}^b \quad (2)$$

式中:  $\mathbf{h}_{ji}^b$ 、 $\mathbf{h}_{gi}^b$ 、 $\mathbf{h}_{ri}^b$  分别表示在本体系下第  $i$  个 DGCMG 的外框架、内框架、转子的角动量,分别表示为

$$\mathbf{h}_{ji}^b = \mathbf{C}_{ji}^b \mathbf{I}_j (\mathbf{C}_{ji}^b \boldsymbol{\omega}_b + \boldsymbol{\omega}_{ji}) \quad (3)$$

$$\mathbf{h}_{gi}^b = \mathbf{C}_{gi}^b \mathbf{I}_g (\mathbf{C}_{gi}^b \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{C}_{ji}^{gi} \boldsymbol{\omega}_{ji} + \boldsymbol{\omega}_{gi}) \quad (4)$$

$$\mathbf{h}_{ri}^b = \mathbf{C}_{ri}^b \mathbf{I}_r (\mathbf{C}_{ri}^b \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{C}_{ji}^{ri} \boldsymbol{\omega}_{ji} + \mathbf{C}_{gi}^{ri} \boldsymbol{\omega}_{gi} + \boldsymbol{\Omega}_i) \quad (5)$$

式(3)~式(5)中:  $\mathbf{I}_j$ 、 $\mathbf{I}_g$ 、 $\mathbf{I}_r$  分别为外框架在外框架系下、内框架在内框架系下、转子在转子系下的转动惯量;  $\boldsymbol{\omega}_{ji}$  为外框架坐标系下的外框架角速度,可以表示为  $[\dot{\theta}_{ji} \ 0 \ 0]^T$ ;  $\boldsymbol{\omega}_{gi}$  为内框架坐标系下内框架角速度,可以表示为  $[0 \ 0 \ \dot{\theta}_{gi}]^T$ ;  $\boldsymbol{\Omega}_i$  为转子的常值角速度向量,在转子系下的表达式为  $[0 \ \Omega \ 0]^T$ 。  $\mathbf{C}_{ji}^b$ 、 $\mathbf{C}_{gi}^b$ 、 $\mathbf{C}_{ri}^b$  分别为外框架系、内框架系、转子系到本体系的坐标转换矩阵;  $\mathbf{C}_{ji}^{ri}$ 、 $\mathbf{C}_{gi}^{ri}$ 、 $\mathbf{C}_{ri}^{ri}$  分别为本体系、外框架系、内框架系到转子系的坐标转换矩阵;  $\mathbf{C}_{gi}^{ri}$ 、 $\mathbf{C}_{ri}^{ri}$  分别为本体系、外框架坐标系到内框架坐标系的坐标转换矩阵;  $\mathbf{C}_{ji}^b$  为本体系到外框架坐标系的坐标转换矩阵。

将式(3)~式(5)代入式(1)可以得到,系统的总角动量在本体系下的表达式为

$$\mathbf{H}_b = \mathbf{I}_b \boldsymbol{\omega}_b + \sum_{i=1}^n (\mathbf{C}_{ri}^b \mathbf{I}_r \mathbf{C}_{ji}^{ri} + \mathbf{C}_{gi}^b \mathbf{I}_g \mathbf{C}_{ji}^{gi} + \mathbf{C}_{ji}^b \mathbf{I}_j) \boldsymbol{\omega}_{ji} + \sum_{i=1}^n (\mathbf{C}_{ri}^b \mathbf{I}_r \mathbf{C}_{gi}^{ri} + \mathbf{C}_{gi}^b \mathbf{I}_g) \boldsymbol{\omega}_{gi} + \sum_{i=1}^n \mathbf{C}_{ri}^b \mathbf{I}_r \boldsymbol{\Omega}_i \quad (6)$$

式中

$$I_b = I_i + \sum_{j=1}^n C_{ri}^b I_j C_{ji}^b + \sum_{j=1}^n C_{ji}^b I_j C_{ri}^b + \sum_{j=1}^n C_{gi}^b I_g C_{bi}^b \quad (7)$$

其中,  $I_b$  会随着 CMG 框架角的变化而变化。根据角动量定理, 由式(6)可以得到系统的动力学方程为

$$\dot{H}_b + \omega_b \times H_b = T_d \quad (8)$$

式中:  $T_d$  为外干扰力矩;  $\dot{H}_b$  为角动量的变化率。将式(6)代入式(8)可得

$$I_b \dot{\omega}_b + \omega_b \times (I_b \omega_b + h) = -T + T_d \quad (9)$$

式中:  $h = \sum_{i=1}^n C_{ri}^b I_i \Omega_i$ ,  $I_i \Omega_i$  表示 DGCMG 转子的常值角动量, 可以用  $h_0$  来表示;  $\omega_b \times (I_b \omega_b + h)$  为星体转动产生的耦合力矩;  $T_d$  为外部干扰力矩;  $T$  的表达式为

$$T = T_c + \sum_{j=1}^n T_{ji} + \sum_{j=1}^n T_{gi} + \sum_{j=1}^n T_{ri} \quad (10)$$

式中,  $T_c$  表示为

$$T_c = \sum_{i=1}^n (C_{ji}^b \omega_{ji}^x C_{ri}^b + C_{gi}^b \omega_{gi}^x C_{ri}^b) I_i \Omega_i \quad (11)$$

将其展开写为矩阵相乘的形式为  $T_c = h_0 C \dot{\delta}$ , 式(11)即为 DGCMG 的力矩方程, 矩阵  $C$  称为 Jacobian 矩阵, 与构型有关,  $\dot{\delta}$  为内外框架角速度。  $T_{ji}$ 、 $T_{gi}$ 、 $T_{ri}$  分别为外框架、内框架及转子部分产生的力矩, 表达式分别为

$$T_{ji} = \omega_b^x C_{ji}^b I_j \omega_{ji} + C_{ji}^b \omega_{ji}^x I_j (C_{ri}^b \omega_b + \omega_{ji}) + C_{ji}^b I_j (-\omega_b^x C_{ji}^b \omega_b + \dot{\omega}_{ji}) \quad (12)$$

$$T_{gi} = \omega_b^x (C_{gi}^b I_g C_{ji}^b \omega_{ji} + C_{gi}^b I_g \omega_{gi}) + (C_{ji}^b \omega_{ji}^x C_{gi}^b + C_{gi}^b \omega_{gi}^x) I_g (C_{bi}^b \omega_b + C_{ji}^b \omega_{ji} + \omega_{gi}) + C_{gi}^b I_g \{ (-\omega_b^x C_{bi}^b - C_{ji}^b \cdot \omega_{ji}^x C_{bi}^b) \omega_b \} + C_{gi}^b I_g \{ (-\omega_{gi}^x C_{ri}^b) \omega_{ji} + C_{ji}^b \dot{\omega}_{ji} + \dot{\omega}_{gi} \} \quad (13)$$

$$T_{ri} = \omega_b^x (C_{ri}^b I_r C_{ji}^b \omega_{ji} + C_{ri}^b I_r C_{gi}^b \omega_{gi}) + (C_{ji}^b \omega_{ji}^x C_{ri}^b + C_{gi}^b \omega_{gi}^x C_{ri}^b) I_r (C_{bi}^b \omega_b + C_{ji}^b \omega_{ji} + C_{gi}^b \omega_{gi}) + C_{ri}^b I_r \{ (-C_{bi}^b \cdot \omega_b^x C_{ri}^b - C_{ji}^b \omega_{ji} C_{bi}^b) \omega_b \} + C_{ri}^b I_r \{ (-C_{gi}^b \omega_{gi}^x C_{ri}^b) \omega_{ji} + C_{ji}^b \dot{\omega}_{ji} \} + C_{ri}^b I_r \{ (-\omega_{ri}^x C_{ri}^b) \omega_{gi} + C_{gi}^b \dot{\omega}_{gi} \} \quad (14)$$

式中:  $\omega^x$  为向量  $\omega$  的斜对称矩阵, 可以表示为  $\omega^x =$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}; \dot{\omega}_{ji}, \dot{\omega}_{gi} \text{ 分别表示外框架角加速}$$

度和内框架角加速度; 由于  $I_j$ 、 $I_g$ 、 $I_r$  的值都很小, 因此这三部分产生的力矩的量值较小, 可以视为卫星的干扰力矩, 即  $T_d' = -(T_{ji} + T_{gi} + T_{ri})$ 。综上, 敏捷卫星的动力学方程为

$$I_b \dot{\omega}_b + \omega_b \times (I_b \omega_b + h) = -T_c + T_d' + T_d \quad (15)$$

## 2 两个平行构型的 DGCMG 奇异可视化分析与操纵律设计

要实现敏捷卫星姿态三轴机动控制, 需要三自由度

的控制力矩, 考虑到敏捷卫星的质量、体积和功耗限制, 采用两个 DGCMG 实现姿态控制, 而平行构型具有安装简单, 操纵律设计简便的优点, 因此以两个 DGCMG 组成的平行构型作为对象, 进行奇异可视化分析。图 3 所示为两个平行安装的 DGCMG, 其中:  $x_b, y_b, z_b$  为本体坐标;  $x_i$  为第  $i$  个 DGCMG 的外框架轴;  $y_i$  为第  $i$  个 DGCMG 的转子轴;  $z_i$  为第  $i$  个 DGCMG 的内框架轴。规定绕外框架轴正向顺时针转动角为第  $i$  个 DGCMG 的外框架角  $\theta_{ji}$ , 绕内框架轴正向逆时针转动角为第  $i$  个 DGCMG 的内框架角  $\theta_{gi}$ , 其中,  $i=2$ 。

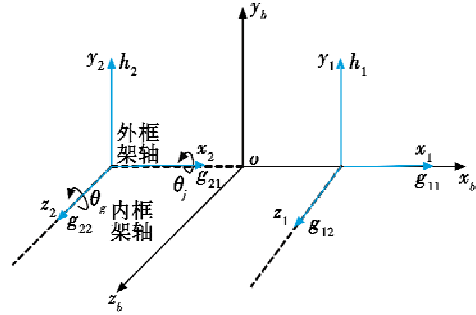


图3 两个平行安装的 DGCMG

Fig. 3 Two paralleled DGCMGs

由于 DGCMG 的内外框架角速度和星体角速度与转子转速相比都很小, 所以忽略内外框架的角动量, CMG 的角动量用  $h = \sum_{i=1}^n C_{ri}^b h_0$  来表示, 由安装构型可以得出两个 DGCMG 的总角动量在本体系下表示为

$$h = h_1 + h_2 = h_0 \begin{bmatrix} -\sin \theta_{g1} - \sin \theta_{g2} \\ \cos \theta_{g1} \cos \theta_{j1} + \cos \theta_{g2} \cos \theta_{j2} \\ \cos \theta_{g1} \sin \theta_{j1} + \cos \theta_{g2} \sin \theta_{j2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

式中,  $h_1$ 、 $h_2$  分别为两个 DGCMG 的角动量大小。对于平行构型的角动量变化率可以表示为

$$\dot{h} = T_c = h_0 C \dot{\delta} \quad (17)$$

式中:  $\dot{\delta} = [\dot{\theta}_{g1} \quad \dot{\theta}_{j1} \quad \dot{\theta}_{g2} \quad \dot{\theta}_{j2}]^T$ , 为内外框架角速度; 矩阵  $C$  即为雅可比矩阵可以表示为

$$C = \begin{bmatrix} -\cos \theta_{g1} & 0 & -\cos \theta_{g2} & 0 \\ -\sin \theta_{g1} \cos \theta_{j1} - \cos \theta_{g1} \sin \theta_{j1} & -\sin \theta_{g2} \cos \theta_{j2} - \cos \theta_{g2} \sin \theta_{j2} \\ -\sin \theta_{g1} \sin \theta_{j1} & \cos \theta_{g1} \cos \theta_{j1} & -\sin \theta_{g2} \sin \theta_{j2} & \cos \theta_{g2} \cos \theta_{j2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

上式也可写为

$$T_c = f_{12} \dot{\theta}_{g1} + f_{11} \dot{\theta}_{j1} + f_{22} \dot{\theta}_{g2} + f_{21} \dot{\theta}_{j2} \quad (19)$$

式中:  $f_{11}$ 、 $f_{12}$  分别为第  $i$  个 CMG 的外框架、内框架产生的力矩项。对于单个 DGCMG 来说, 当内框架角  $\theta_{gi} = 90^\circ$  时, 内框架轴与角动量重合, 即内框架轴产生的力矩矢量为零时, 可以认为 DGCMG 瞬间退化为 SGCMG, 当两个 CMG 的内框架角  $\theta_{g1} = 90^\circ$ 、 $\theta_{g2} = 90^\circ$  时, 则两个

CMG 都退化为 SGCMG。

在系统不奇异的情况下,雅可比矩阵  $C$  的秩应为 3,当平行构型的 DGCMG 发生奇异时,雅可比矩阵的秩小于 3,则应有内外框架产生的力矩矢量垂直于奇异方向  $\nu$ ,故有

$$\begin{cases} f_{i1}^T \nu = 0, \\ f_{i2}^T \nu = 0 \end{cases} \quad (20)$$

此时,无论角动量如何变化,也无法在该方向上输出力矩。式(20)也可写为

$$C^T \nu = 0 \quad (21)$$

可以用矩阵  $CC^T$  的行列式是否为零来判定系统是否陷入奇异状态,即  $S = \det(CC^T)$  称为奇异测度,用来衡量距离奇异状态的远近。当系统陷入奇异时有

$$\det(CC^T) = \sum_{i=1}^4 m_i^2 = 0, m_i = \det(C_i) \quad (22)$$

式中:  $C_i$  为矩阵  $C$  的代数余子式,式(22)称为 Binet-Cauchy 定理<sup>[3]</sup>。奇异的充分必要条件为  $m_i = 0$ ,对于平行构型的 DGCMG 来说,有

$$m_1 = \cos^2 \theta_{g2} \cos \theta_{g1} (\sin \theta_{j2} \cos \theta_{j1} - \sin \theta_{j1} \cos \theta_{j2}) = 0 \quad (23)$$

$$m_2 = \cos \theta_{g1} \cos \theta_{g2} \sin \theta_{g2} (\cos^2 \theta_{j2} - \sin^2 \theta_{j2}) - \cos^2 \theta_{g2} \sin \theta_{g1} (\sin \theta_{j2} \sin \theta_{j1} + \cos \theta_{j1} \cos \theta_{j2}) = 0 \quad (24)$$

$$m_3 = \cos^2 \theta_{g1} \cos \theta_{g2} (\sin \theta_{j1} \cos \theta_{j2} - \sin \theta_{j2} \cos \theta_{j1}) = 0 \quad (25)$$

$$m_4 = \cos \theta_{g1} \cos \theta_{g2} \sin \theta_{g1} - \cos^2 \theta_{g1} \sin \theta_{g2} (\sin \theta_{j1} \sin \theta_{j2} + \cos \theta_{j1} \cos \theta_{j2}) = 0 \quad (26)$$

以上 4 个方程只有两个是相互独立的,取式(23)和式(26)联立解奇异状态下的框架角,可以得出,当

$\theta_{g1} \neq \frac{\pi}{2}$ 、 $\theta_{g2} \neq \frac{\pi}{2}$  时,由  $\theta_{g2}$ 、 $\theta_{j2}$  求解  $\theta_{g1}$ 、 $\theta_{j1}$ , 得出

$$\begin{aligned} \theta_{g1} &= \arctan \left\{ \tan \theta_{g2} (\sin \theta_{j1} \sin \theta_{j2} + \cos \theta_{j1} \cos \theta_{j2}) \right\} \\ \theta_{j1} &= \begin{cases} \pi + \theta_{j2}, & -\pi < \theta_{j2} < 0 \\ -\pi + \theta_{j2}, & 0 < \theta_{j2} < \pi \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

将以上奇异状态下对应的内外框架角求解出来后,代入系统角动量式(16),即可得出奇异状态下的角动量值。图 4 所示为内框架角  $\theta_{g1} \neq \pi/2$  时的角动量奇异包络图( $h_0 = 1 \text{ Nms}$ )。

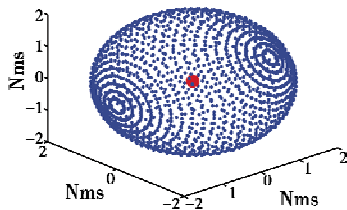


图 4 奇异角动量包络图

Fig. 4 Singularity momentum envelope

由图 4 可以看出,当内框架角  $\theta_{g1} \neq \pi/2$  时,两个平行构型的 DGCMG 的奇异情况只有两种:一种是两个

CMG 角动量同向平行,合角动量的值为  $2h_0$ ,即为饱和和奇异,如图 4 中角动量包络球表面;另一种情况即为两个 CMG 角动量反向平行,合角动量的值为 0,被称为内部隐奇异,如图 4 中所示的球心部分,这部分奇异可以通过操纵律来回避/避免。

操纵律设计的目标就是要根据当前的陀螺框架角,合理地分配各个 CMG 的框架角速度,使陀螺群的输出力矩与控制系统要求的指令力矩相同。本文采取伪逆零运动<sup>[7]</sup>的方法来避免内部奇异,伪逆零运动操纵律的形式为

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_T + \dot{\delta}_N \quad (28)$$

式中:  $\dot{\delta}_T$  为控制力矩输出的转速指令;  $\dot{\delta}_N$  为空转指令。以上两个转速指令要满足以下条件

$$\begin{cases} h_0 C \dot{\delta}_T = T_c \\ C \dot{\delta}_N = 0 \end{cases} \quad (29)$$

基于最小二乘法可以得  $\dot{\delta}_T$  的形式为

$$\dot{\delta}_T = C^T (CC^T)^{-1} T_c \quad (30)$$

空转指令项  $\dot{\delta}_N$  由广义逆定理求解可得

$$\dot{\delta}_N = \rho (E_3 - C(CC)^{-1}C)u \quad (31)$$

式(31)中:  $\rho$  为标量系数;  $E_3$  为  $3 \times 3$  的单位阵;  $u$  为 4 维矢量,由梯度选择法可以得到  $u$  的形式为

$$\dot{\delta}_N = \rho (E - C^T(CC)^{-1}C) \left( \frac{\partial S}{\partial \delta} \right) \quad (32)$$

对于标量系数  $\rho$  的选取,应与奇异测度  $S$  联系起来。当  $S$  大于某值时可以认为是远离奇异的,  $\rho$  可以为零,当  $S$  小于该值时  $\rho$  值应取大于零的值,即  $S$  越小  $\rho$  应取得越大,以尽快脱离奇异。

### 3 姿态/角动量联合控制

操纵律主要解决 DGCMG 中的内部奇异问题,但是却无法解决饱和和奇异。系统遇到饱和和奇异时,如果对框架进行调整会引起角动量的变化,引起额外的力矩,只能施加外部力矩才能解决。一般采用推力器或磁力矩器进行卸载。采用姿控推力器可以使系统很快地脱离饱和和奇异,但是这是一种离散的方法且会消耗工质,此外,磁力矩器产生的力矩较小<sup>[8]</sup>。因此,本文采用 Lyapunov 第二方法,采用连续动量管理的策略可以在满足机动任务的情况下,连续调节角动量,使系统机动过程中尽量不遇到饱和和奇异,达到角动量管理与姿态控制的折中。

本文采用四元数来描述敏捷机动卫星姿态。设小卫星的当前姿态四元数为  $q = [q_0 \quad \hat{q}]^T$ ,其中:  $q_0$  为标量;  $\hat{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$  为矢量部分;目标姿态四元数为  $q_c = [q_{c0} \quad \hat{q}_c]^T$ 。

卫星的误差四元数表示当前四元数  $q$  与目标四元数  $q_e$  之差, 它们的关系可以表示为

$$\begin{cases} q_{e0} = q_0 q_{e0} + \hat{q}^T \hat{q}_e \\ \hat{q}_e = q_{e0} \hat{q} - q_0 \hat{q}_e + \hat{q}^\times \hat{q}_e \end{cases} \quad (33)$$

式中,  $\hat{q}^\times$  表示  $\hat{q}$  的斜对称矩阵。

卫星的误差角速度可以表示为

$$\omega_e = \omega_b - \omega_c = \omega_b - A_{bd} \omega_d \quad (34)$$

式中:  $\omega_d$  为期望系相对于惯性系的角速度;  $A_{bd}$  为期望系到本体系的坐标转换矩阵, 可以表示为

$$A_{bd} = (q_{e0}^2 - \hat{q}_e^T \hat{q}_e) E_3 + 2 \hat{q}_e \hat{q}_e^T - 2 q_{e0} \hat{q}_e^\times \quad (35)$$

式中,  $E_3$  为  $3 \times 3$  的单位矩阵, 误差四元数运动方程可以表示为

$$\begin{cases} \dot{q}_{e0} = -\frac{1}{2} \omega_e^T \hat{q}_e \\ \dot{\hat{q}}_e = \frac{1}{2} (\hat{q}_e^\times \omega_e + q_{e0}^\times \omega_e) \end{cases} \quad (36)$$

采用 DGCMG 的敏捷卫星误差动力学方程为

$$I_b \dot{\omega}_e = -I_b \dot{\omega}_c - (\omega_c + \omega_e)^\times I_t (\omega_c + \omega_e) - (\omega_c + \omega_e)^\times h - T_c + T_d' + T_d \quad (37)$$

式中,  $\dot{\omega}_c = A_{bd} \dot{\omega}_d - \omega_c^\times A_{bd} \omega_d$ 。

控制器设计时, 做以下假设:

1) 考虑 Rest-To-Rest 的敏捷卫星机动形式, 即  $\omega_d$  为零;

2) 在设计控制器时不考虑干扰力矩  $T_d$  及由外框架、内框架、转子部分共同产生的力矩  $T_d'$ 。

则误差动力学模型就可以变为

$$I_b \dot{\omega}_e = -\omega_e^\times I_t \omega_e - \omega_e^\times h - T_c \quad (38)$$

为了在满足姿态控制的同时进行角动量的管理, 本文在控制器设计时进行了角动量反馈, 同时考虑了敏捷卫星大角度机动时产生的耦合力矩。

设计以下控制器

$$\begin{cases} T_c = k_2 \hat{q}_e + k_1 (\omega_e + K_z z + \text{sign}((\int_0^t \hat{q}_e dt) \cdot (\omega_e^\times h))) \omega_e^\times h \\ z = -h + k_2 \int_0^t \hat{q}_e dt \end{cases} \quad (39)$$

式中: 参数  $K_z$  为对角阵, 其元素都为正数;  $k_1$ 、 $k_2$  都为正数;  $\text{sign}$  为符号函数, 可以表示为

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ -1, & a < 0 \end{cases} \quad (40)$$

控制器式(39)中的  $z$  项中引入了角动量  $h$  反馈项, 参数  $k_1$ 、 $K_z$  表征了角动量反馈的大小, 该控制器可以保证四元数误差  $\hat{q}_e$  及姿态角速率误差  $\omega_e$  是逐渐稳定, 且角动量  $h$  是有界的。证明过程如下。

对  $z$  求导可得

$$\dot{z} = -\dot{h} + k_2 \hat{q}_e = -T_c + k_2 \hat{q}_e \quad (41)$$

选取以下形式的 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} z^T K_z z + \frac{1}{2} \omega_e^T I_b \omega_e + 2k_2(1 - q_{e0}) \geq 0 \quad (42)$$

对以上 Lyapunov 函数求导

$$\dot{V} = z^T K_z \dot{z} + \omega_e^T I_b \dot{\omega}_e + \omega_e^T k_2 \hat{q}_e \quad (43)$$

将式(38)和式(39)代入上式可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= z^T K_z (-T_c + k_2 \hat{q}_e) + \omega_e^T (-\omega_e^\times I_b \omega_e - \omega_e^\times h - T_c) + \omega_e^T k_2 \hat{q}_e = z^T K_z (-T_c + k_2 \hat{q}_e) + \omega_e^T (-T_c + \omega_e^\times k_2 \hat{q}_e) + \omega_e^T (-\omega_e^\times I_b \omega_e - \omega_e^\times h) = \\ &= (\omega_e + K_z z)^T (-T_c + k_2 \hat{q}_e) \end{aligned} \quad (44)$$

将设计的控制器(39)代入上式可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (\omega_e + K_z z)^T (-T_c + k_2 \hat{q}_e) = (\omega_e + K_z z)^T (-k_2 \hat{q}_e - k_1 (\omega_e + K_z z) - \text{sign}((\int_0^t \hat{q}_e dt) (\omega_e^\times h))) \omega_e^\times h + k_2 \hat{q}_e = \\ &= (\omega_e + K_z z)^T (-k_1) (\omega_e + K_z z) - (\omega_e + K_z z)^T \cdot (\text{sign}((\int_0^t \hat{q}_e dt) (\omega_e^\times h))) \omega_e^\times h = (\omega_e + K_z z)^T (-k_1) \cdot (\omega_e + K_z z) - K_z^T (\text{sign}((\int_0^t \hat{q}_e dt) (\omega_e^\times h))) \omega_e^\times h = \\ &= (\omega_e + K_z z)^T (-k_1) (\omega_e + K_z z) - K_z k_2 \text{sign}((\int_0^t \hat{q}_e dt) \cdot (\omega_e^\times h)) (\int_0^t \hat{q}_e dt) (\omega_e^\times h) \end{aligned} \quad (45)$$

由于参数  $K_z$  是元素为正数的对角阵,  $k_1$ 、 $k_2$  都为正数, 且有  $\text{sign}((\int_0^t \hat{q}_e dt) (\omega_e^\times h)) (\int_0^t \hat{q}_e dt) (\omega_e^\times h)$  为正, 则  $\dot{V} < 0$ 。即可以推出当  $t \rightarrow \infty$  时,  $q_e \rightarrow 0$ ,  $\omega_e \rightarrow 0$ ,  $h$  有界。

敏捷卫星在机动的初始时刻往往会需要较大的指令力矩, 而执行机构输出力矩的能力是有限的, 为了避免执行机构输出力矩饱和, 需要对控制器输出的力矩进行限幅, 即有

$$T_c = \begin{cases} \frac{T_{\max}}{\|T_c\|_2} T_c, & \|T_c\|_2 > T_{\max} \\ T_c, & \|T_c\|_2 \leq T_{\max} \end{cases} \quad (46)$$

式中:  $T_{\max}$  为 CMG 能够输出的最大力矩;  $\|T_c\|_2$  为二范数。

为了使敏捷机动卫星实现快速稳定, 采用 Sigmoid 非线性函数改进姿态/角动量联合控制器中  $\hat{q}_e$  项和  $\omega_e$  项的参数。Sigmoid 函数是神经网络中一类重要的激活函数, 具有光滑性、严格单调性、饱和性<sup>[9]</sup>, 其表达式为

$$y = f(s) = \frac{1}{1 + e^{-s}} \quad (47)$$

式中,  $s$  为姿态误差角, 并以角度为单位, 该函数的形式可以改写为随着  $|s|$  减小而增大的形式, 构造控制器参

数的形式为

$$y = a + \frac{2a}{1 + e^{|s|}} \quad (48)$$

当姿态角误差  $|s| \rightarrow 0$  时,  $y \rightarrow 2a$ , 即在卫星的姿态误差角较小时, 参数增大一倍, 可以使得系统快速稳定。将式(39)中的参数  $k_1$  变为  $a + \frac{2a}{1 + e^{|s|}}$ ,  $k_2$  变为  $c_1 + a + \frac{2a}{1 + e^{|s|}}$ , 则角动量反馈项的参数变为  $P_x, P_z = (a + \frac{2a}{1 + e^{|s|}})K_x$ , 积分项  $\int_0^t \hat{q}_e dt$  的参数变为  $c_2$ 。

控制器式(39)的形式变为

$$T_e = (c_1 + a + \frac{2a}{1 + e^{|s|}}) \hat{q}_e + (a + \frac{2a}{1 + e^{|s|}}) \omega_e + P_x(-h) + c_2(\int_0^t \hat{q}_e dt) + \text{sign}(\int_0^t \hat{q}_e dt)(\omega_e^x h) \omega_e^x h \quad (49)$$

无论  $|s|$  为何值, 只要参数  $a$  为正数, 均能满足  $a + \frac{2a}{1 + e^{|s|}} > 0$ , 其中,  $P_x$  是元素为正数的对角阵,  $c_1, c_2$  为正数, 因此对该控制器参数进行改进后仍能满足 Lyapunov 稳定性。

合理选择控制器参数  $a, P_x, c_1, c_2$ , 可以保证系统具有良好的动态和稳态性能, 即可实现姿态/角动量的联合控制, 在完成敏捷机动卫星快速机动、快速稳定的同时, 连续调节角动量, 达到卫星姿态控制和 DGCMG 动量管理的折中。

#### 4 仿真结果分析

依据采用两平行构型的 DGCMG 卫星姿态动力学模型, 采用伪逆零运动操纵律, 以及所设计的姿态/角动量联合控制器进行滚动轴进动  $30^\circ$  的仿真。

仿真的初始条件为: 卫星的常值转动惯量  $I_s = \text{diag}(12, 15, 13) \text{ kgm}^2$ ; 两个 DGCMG 采用相同的框架惯量参数, 外框架转动惯量为  $I_f = \text{diag}(0.7224, 0.7224, 0) \text{ kgm}^2$ ; 内框架转动惯量为  $I_g = \text{diag}(0.098, 0.0297, 0.0297) \text{ kgm}^2$ ; 转子的转动惯量为  $I_r = \text{diag}(0.0062, 0.0062, 0.0159) \text{ kgm}^2$ ; 转子的常值转速为  $\Omega = 3600 \text{ rpm}$ ; 初始姿态角为  $[\varphi \ \theta \ \psi]^T = [0^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ]^T$ ; 目标姿态角为  $[\varphi \ \theta \ \psi]^T = [30^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ]^T$ ; 目标姿态对应的目标四元数为  $[q_{e0} \ q_{e1} \ q_{e2} \ q_{e3}] = [0.9659 \ 0.2588 \ 0 \ 0]$ ; 星体初始角速度为  $\omega_{s0} = 1.1 \text{ (}^\circ\text{)/s}$ ,  $\omega_{x0} = 1.2 \text{ (}^\circ\text{)/s}$ ,  $\omega_{y0} = 1.1 \text{ (}^\circ\text{)/s}$ ; 每个 DGCMG 的角动量为  $h_0 = 6 \text{ Nms}$ ; DGCMG 的初始框架角为  $\delta = [0^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ \ 90^\circ]^T$ ; 干扰力矩为  $T_d = \begin{bmatrix} 3\cos \omega_0 t + 1 \\ 1.5\sin \omega_0 t + 3\cos \omega_0 t \\ 3\sin \omega_0 t + 1 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$

Nm, 其中:  $\omega_0$  为卫星轨道角速度, 取  $\omega_0 = 0.001 \text{ rad/s}$ ; 最大框架角速度为  $\dot{\delta}_{\max} = 10 \text{ (}^\circ\text{)/s}$ ; 控制器的参数为  $a = 17.5, c_1 = 1, c_2 = 0.001, P_x = \text{diag}(0.75 \times 10^{-6} \ 2.1 \times 10^{-6} \ 1.75 \times 10^{-6})$ 。

仿真结果如图 5 ~ 图 10 所示。

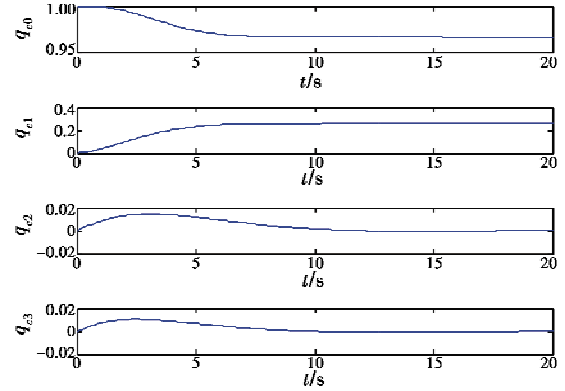


图 5 目标四元数

Fig. 5 Command quaternion

在控制器参数适当选取下, 由图 5 可以看出, 系统在 8 s 左右完成滚动轴  $30^\circ$  的机动, 虽然在设计控制器时并未考虑干扰力矩的影响, 但是仿真时加入干扰力矩, 系统仍有较好的稳定效果。

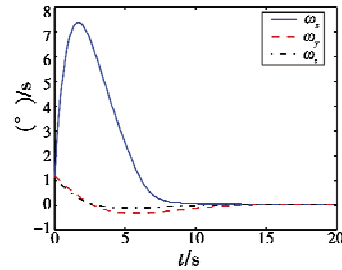


图 6 卫星角速度

Fig. 6 Satellite attitude angle velocity

从图 6 可以看出, 15 s 之后星体角速度基本为零; 图 7 所示的指令力矩可以看出最大指令力矩没有超出执行机构的能力范围。

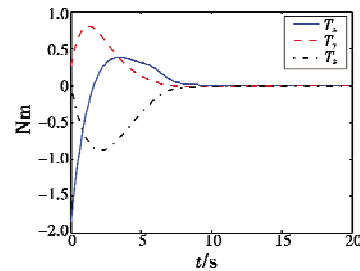


图 7 指令力矩

Fig. 7 Command torque

由图 8 可以看出, 整个机动过程框架角度平滑, 内外框架角速度均在限定的最大框架角速度范围之内; 由图 9 可以看出, 整个机动过程 DGCMG 系统远离奇异; 由

图10可以看出,角动量在机动过程中波动小,并未遇到饱和奇异,达到了角动量管理的目的。以上仿真结果验证了所设计控制器的有效性。

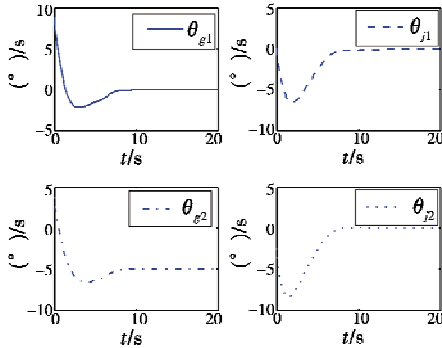


图8 框架角速度

Fig. 8 Gimbal rates of DGCMG

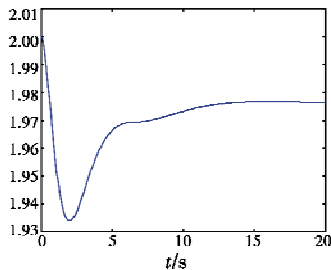


图9 奇异测度

Fig. 9 Singularity of measure

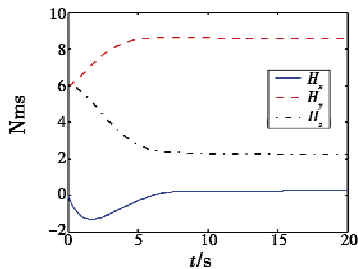


图10 角动量

Fig. 10 Momentum

## 5 结束语

本文采用两个平行构型的 DGCMG 作为执行机构

进行敏捷机动卫星的姿态控制研究。建立了采用 DGCMG 的卫星动力学模型,对两个平行构型的 DGCMG 进行了奇异的可视化分析,采用 Lyapunov 第二方法设计了姿态/角动量联合控制器,并采用 Sigmoid 函数对控制器参数进行了改进,在完成机动任务的前提下实现了角动量的连续控制,数值仿真表明,控制器可以取得良好的姿态控制效果。

## 参考文献

- [1] VADALI S R, WALKER S R, OH H S. Preferred gimbal angles for single gimbal control moment gyros [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1990, 13:1090-1095.
- [2] FANG J C, REN Y. High-precision control for a single-gimbal magnetically suspended control moment gyro based on inverse system method [J]. IEEE Transaction on Industrial Electronics, 2011, 58(9):4331-4342.
- [3] WIE B. Singularity analysis and visualization of single-gimbal control moment gyros system [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2004, 27(2):271-282.
- [4] 王磊,赵育善. 双框架控制力矩陀螺奇异分析及可视化 [J]. 宇航学报, 2009, 30(2):613-619.
- [5] VADALI S R, OH H S. Space station attitude control and moment management: A nonlinear look [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamic, 1992, 15(3):568-577.
- [6] 吴忠. 空间站姿态/动量联合非线性控制 [J]. 航空学报, 2006, 27(6):1155-1158.
- [7] WIE B, BAILEY D, HEIBERG C. Singularity robust steering logic for redundant single-gimbal control moment gyros [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamic, 2001, 24(5):865-872.
- [8] 汤亮,贾英宏,徐世杰. 使用单框架控制力矩陀螺的空间站姿态控制系统建模与仿真 [J]. 宇航学报, 2003, 24(2):126-131.
- [9] 刘云龙,高存臣,任启峰,等. 水下机器人基于 sigmoid 函数的软变结构控制 [J]. 电机与控制学报, 2012, 16(2):90-95.

## 声 明

本刊已许可中国学术期刊(光盘版)电子杂志社、北京万方数据股份有限公司、重庆维普资讯有限公司在其网络平台和系列数据库产品中以数字化方式复制、汇编、发行、信息网络传播本刊全文。著作权使用费与本刊稿酬一并支付。作者向本刊提交文章发表的行为即视为同意我部上述声明。