

·信号与信息处理·

压缩感知重构算法仿真分析

杜玉萍, 刘严严

(光电信息控制和安全技术重点实验室, 天津 300308)

摘要: 压缩感知理论是信号采集和处理的一门新理论, 它突破了传统的nyquist-shannon(奈奎斯特-香农)采样定理对采样频率的要求, 可以利用远小于采样定理要求的采样次数来重构原始信号^[1]。首先介绍了三种常用的随机矩阵的构造方法, 随后介绍了不同类型的压缩感知算法, 并对其中两种算法进行了仿真与比较, 在此基础上仿真了不同测量矩阵下不同噪声水平下算法对图像重构质量的影响, 经过仿真分析TVAL3算法在图像重构时间和噪声抑制方面表现突出。

关键词: OMP; TVAL3; 测量矩阵; 压缩感知

中图分类号: TP391.92

文献标识码: A

文章编号: 1673-1255(2018)-05-0037-04

Simulation Analysis of Compressive Sensing Reconstruction Algorithm

DU Yu-ping, LIU Yan-yan

(Science and Technology on Electro-Optical Information Security Control Laboratory, Tianjin 300308, China)

Abstract: Compressive sensing reconstruction is a new theory of signal acquisition and processing, which breaks through the traditional sampling theorem's requirements on Nyquist sampling frequency and the original signal can be reconstructed for sampling times far less than the requirements of sampling theorem. At first, three methods of constructing random matrix are introduced. And then, different kinds of compressive sensing algorithms are introduced, and two of them are simulated and compared. At last, based on this, the influence of the algorithm on image reconstruction quality under different noise levels of measurement matrix is simulated. Through simulation analysis, total variation augmented lagrangian 3 (TVAL3) algorithm is outstanding in image reconstruction time and noise reduction.

Key words: orthogonal matching pursuit (OMP); total variation augmented lagrangian 3 (TVAL3); measurement matrix; compressive sensing

依据压缩感知理论直接采集图像的有效测量值, 其采集点个数 M 远小于 Nyquist 采样定理的采样点个数 $N (M \ll N)$ 。

当信号是稀疏或可压缩的, 可以以某个线性投影的方式来得到信号的压缩后表示, 得到的数据能够以无失真或较低失真的方式重建原始的数字信号。用数学表达式来表示就是

$$y = \Phi x \quad (1)$$

其中, y 表示压缩后的信号; Φ 表示采集的测量矩阵; x 表示原始的数字信号。信号采集过程就是一

个线性投影过程。测量矩阵 Φ 并不是满秩的, 因此公式的左右两边并不是等价的过程, 即已知 y , 不能直接求得 x , 可以说是存在信息损失的。但是, 随机投影矩阵在很大概率上保留了稀疏信号的结构和信息, 即得到测量值 y 之后, 可以以很大的概率来完美重建信号。

由此可知, 压缩感知的研究可以归结为以下两个方面: 选择性质良好易于实现的测量矩阵以减少所需的测量值; 寻找快速高质量重建信号的重构算法^[2]。

文中首先介绍三种测量矩阵,给出其构造原理,简单介绍目前压缩感知重构算法的分类,重点介绍其中的正交匹配追踪算法和TVAL3算法,并仿真比较随机噪声在不同测量矩阵情况下对图像重构质量的影响。

1 测量矩阵

测量矩阵的构造是压缩感知理论的关键:测量矩阵在测量值获取和信号重构方面都有重要的作用;相同重建算法下,测量矩阵性能越好,信号重构质量越高。同时,要将压缩感知推向实用化,易于硬件实现的测量矩阵的构造是关键。

常见的测量矩阵主要有7种:随机稀疏矩阵,高斯矩阵,部分哈达玛矩阵,伯努利随机矩阵,托普利兹矩阵和循环矩阵,文中只介绍前三种,下面给出其构造方法^[4-5]。

(1) 随机稀疏矩阵

首先生成一个大小为 $M \times N$ 的全零矩阵 ϕ ,且 $M < N$ 。然后对矩阵 ϕ 的每一列,随机的选取 b 个位置并且在选中的位置上置1,这里 $b < M$ 。稀疏随机矩阵的每一列中仅有 b 个非零元素,结构简单,在实际应用中易于生成和储存。

(2) 部分哈达玛随机矩阵

首先生成一个 $N \times N$ 大小的哈达玛矩阵,然后随机的从中选取 M 行向量,构成一个大小为 $M \times N$ 的测量矩阵。由于哈达玛矩阵是正交矩阵,从中随机选取 M 行之后得到的 $M \times N$ 大小的部分哈达玛矩阵还具有较强的非相关性和部分正交性,所以与其他确定性测量矩阵相比,该矩阵精确重建所需要的测量数较少,也就是说在同一的测量数量下,部分哈达玛矩阵的重建效果比较好。但由于哈达玛矩阵本身的原因,其维数 N 的大小必须满足2的整数倍,即 $N = 2^k, k = 1, 2, 3, \dots$,所以极大地限制了该矩阵的应用范围及场合。

(3) 高斯随机矩阵

压缩感知中,使用最广泛的是高斯随机矩阵,其生成的方法为:构造一个 $M \times N$ 大小的矩阵 ϕ ,使得 ϕ 中的每一个元素独立服从均值为0,方差为 $1/M$ 的高斯分布。该测量矩阵具有很强的随机性,并且由于它与大多数的正交基或者正交字典不相关,所以精确重构所需要的测量数比较少。

2 压缩感知重构算法

压缩感知重构是指利用得到的随机测量值恢复原始信号的过程。由于信号是稀疏的或可压缩的,压缩感知问题的求解是寻求方程最稀疏解(即最少非零值)的过程,是 l_0 个非凸优化问题。但 l_0 问题是一个NP-Hard问题,不易求解。目前的重构算法可以分为以下三类^[6]:

l_1 最小化算法:这类方法将非凸的 l_0 问题转化 l_1 凸优化问题进行近似求解。求解的方法主要包括内点法、梯度投影法、同伦算法等。

贪婪追踪算法:这类方法通过迭代来逐步逼近原始信号,每次迭代选择一个局部最优解。这类算法包括MP[7]、OMP[8]、StOMP[9]、ROMP[10]等。

组合算法:这类方法获得信号高度结构化的采样,通过分组测试快速重建信号。

三类算法都有各自特点,凸松弛算法重构信号需要的采样次数最少,但是其计算复杂度很高;组合算法运行效率最高,但是需要的采样次数最多;贪婪迭代算法在运行时间和采样次数上都位于凸松弛算法和组合算法之间。现有的重构算法虽然各有优势,但是依然存在一定的不足。因此,如何获得高质量的重构信号以及如何提高算法效率依然是目前压缩感知重构算法需要解决的重要问题。下面重点介绍其中的两种算法。

(1) 匹配追踪算法与正交匹配追踪(OMP)算法

匹配追踪算法(match pursuit, MP)是最简单的追踪算法之一,在逼近理论中也被称为纯贪婪算法。假定被表示的信号为 y ,其长度为 n 。假定 H 表示Hilbert空间,在这个空间 H 里,由一组向量 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 构成字典矩阵 D ,其中每个向量可以成为原子(atom),其长度与被表示信号 y 的长度 n 相同,而且这些向量已经作为归一化处理,即 $\|x_i\| = 1$,也就是单位向量长度为1。

MP算法的基本思想:从字典矩阵 D (也称为完备原子库)中,选择一个与信号 y 最匹配的原子(也就是某列),构建一个稀疏逼近,并求出信号残差,然后继续选择与信号残差最匹配的原子,反复迭代,信号 y 可以由这些原子来线性组合,再加上最后的残差值来表示。很显然,如果残差值在可以忽略的范围内,则信号 y 就是这些原子的线性组合。

该算法的缺点是,如果信号(残值)在已选择的

原子进行垂直投影是非正交的,这会使得每次迭代的结果并不是最优的而是次最优的,收敛需要很多次迭代。

OMP算法的改进之处在于:在分解的每一步对所选择的全部原子进行正交化处理,这使得在精度要求相同的情况下,OMP算法的收敛速度更快。

相较于MP算法,OMP算法继承了MP算法的原子选择原则,但不会重复选择原子,而且因为加入了施密特正交化,所以每一次迭代中残差值都与当前选择的原子正交,这就使OMP算法能够更加快速地收敛。在大多数情况下,OMP算法的计算耗时由矩阵向量的内积决定,因此在使用快速变换时正交化计算往往会成为计算最耗时的一项。在使用OMP算法处理的数据量较大时会出现两个问题:①OMP算法单次迭代所需要的计算成本和存储成本相当高;②一次选择一个原子意味着需要 k 次迭代才能获得估计值。当 k 较大时,运行速度就会很慢,导致无法满足实际应用的需要。

(2)TVAL3重构算法

TVAL3 (total variation augmented lagrangian alternating direction algorithm)算法^[4]是在最小全变分法的基础上,结合增强型拉格朗日函数法和交替最小化方法,通过交替最小化方法来寻找拉格朗日的函数模型最小值。再用最速下降法迭代,寻找最小值。

该算法采用全变分正则化(total variation regularization)模型,模型公式为

$$\min_u \sum_i \|D_i u\|, \text{ s.t. } Au = b \quad (2)$$

其中, A 为测量矩阵; U 为信号或图像; b 为测量值; $D_i u$ 表示每个像素点 i 的梯度值; $\|\cdot\|$ 表示1范数或2范数。

全变分公式即 $D_i u$ 的计算如下

$$\|u\|_{TV} = \sum_{ij} \sqrt{(u_{i+1,j} - u_{i,j})^2 + (u_{i,j+1} - u_{i,j})^2} \quad (3)$$

该算法利用增强拉格朗日(augmented lagrangian method)将带约束的模型转换为不带约束的目标函数。采用交替方向变换方法,可以将问题转为两个子问题来求解。具体的算法可以查阅文献[4]。

该算法优点是重建速度快、重建质量高,算法支持多种测量矩阵、多种噪声条件,比较灵活。

3 重构算法仿真比较

由于OMP算法是从MP算法继承而来,文中仅对OMP算法和TVAL3算法进行仿真比较。

为了测试算法的性能,从两方面进行测试,分别是(1)三种测量矩阵;(2)随机噪声。对重构的图像,从两方面来判断算法恢复质量,包括(1)CPU算法计算耗时;(2)PSNR峰值信噪比。

原始信号为 64×64 大小的图像,重构时的采样数为1600。

(1)三种测量矩阵

①稀疏随机矩阵,每列中随机包含4个1,其余为0。图1为两种算法在稀疏随机矩阵下的图像重构质量对比。

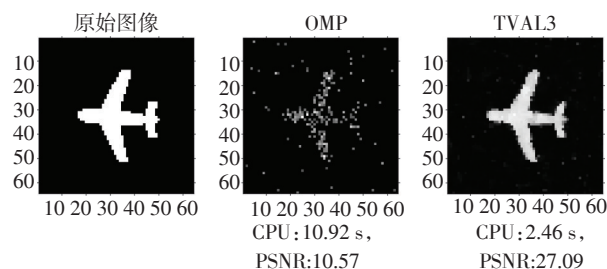


图1 两种算法在稀疏随机矩阵下的图像重构质量对比

②部分哈达玛随机矩阵

图2为两种算法在部分哈达玛随机矩阵下的图像重构质量对比。

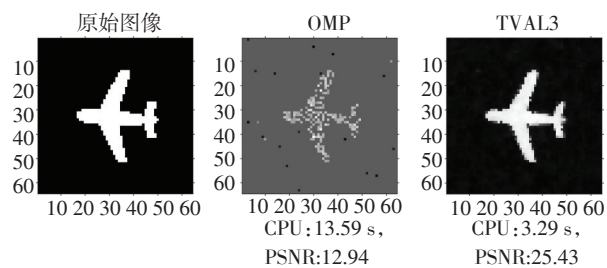


图2 两种算法在部分哈达玛随机矩阵下的图像重构质量对比

③高斯随机矩阵

图3为两种算法在高斯随机矩阵下的图像重构质量对比。

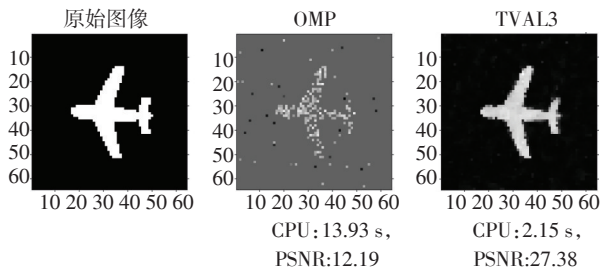


图3 两种算法在高斯随机矩阵下的图像重构质量对比

由此可见,在相同的采样数下,两种算法都可以重构出原始信号,不同的随机矩阵图像的重构质量和CPU时间会有略微变化,上面三种随机矩阵中,CPU处理时间最短的是部分哈达玛随机矩阵,主要是因为此矩阵对DMD的能量积累方面贡献最大,所以采集的图像的强度最大,因此恢复图像的所需时间最短,其余两种矩阵本质上都服从于高斯分布,处理时间相差不大。TVAL3算法无论是CPU处理时间还是峰值信噪比都始终优于OMP算法,从OMP算法的10几秒,到TVAL3的3秒左右,处理速度提升了一个数量级,而且,在运算过程中,OMP算法的迭代次数远远大于TVAL3。

(2) 随机噪声

通过在高斯随机测量矩阵中加入高斯白噪声的方式进行测试,噪声水平从 $20 \log 1$ 加到 $20 \log 10$,共10个水平,其他测量矩阵同理可测。

两种算法在不同噪声水平下CPU计算时长对比如图4所示。

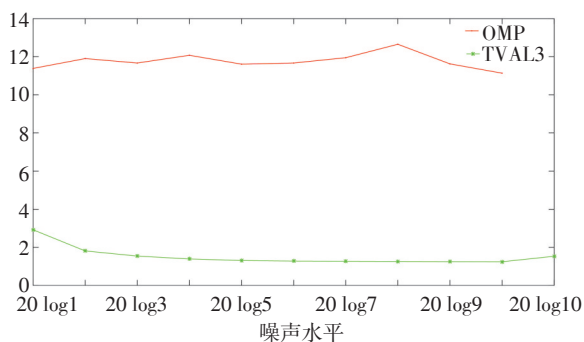


图4 两种算法不同噪声水平下CPU计算时长对比

两种算法不同噪声水平下PSNR对比如图5所示。

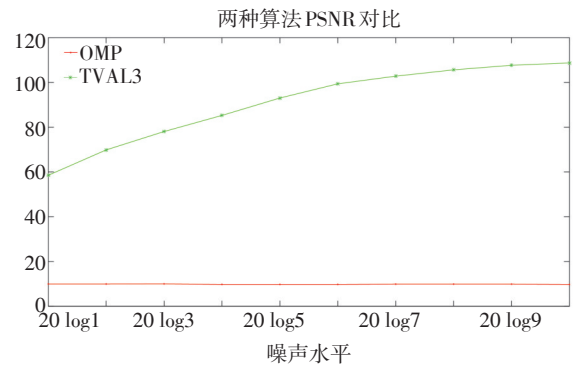


图5 两种算法不同噪声水平下PSNR对比

从仿真结果来看,在采样次数不变的情况下,两种算法都对高斯白噪声有一定的抗干扰作用,TVAL3算法在无噪声时,CPU处理时间在3 s左右,在有噪声时,CPU处理时间仍然在此范围,可见算法对噪声的抑制作用性能突出。OMP算法的抗噪能力很强,随着噪声水平增加,CPU计算时间震荡变化,虽然对噪声有一定的抑制作用,但明显不如TVAL3。在峰值信噪比方面,OMP算法只有略微变化,而TVAL3算法表现出良好的噪声抑制作用。总体来说,TVAL3算法无论是在CPU处理时间还是峰值信噪比方面都比OMP算法要更优良。

4 结论

对不同类型的压缩感知算法进行了介绍与总结,对所介绍的算法进行了仿真与比较,并对其性能进行了数值分析,给出了不同随机矩阵下和不同噪声水平下,不同算法的CPU处理时间与峰值信噪比情况对比。通过仿真,OMP算法和TVAL3算法在有足够的采样数据情况下,都可以重构出图像,都对高斯白噪声有一定的抗噪能力,TVAL3算法比OMP在处理时间上快了一个量级。

参考文献

- [1] 石光明,林杰.压缩感知理论的工程应用方法[M].西安:电子科技大学出版社,2017.
- [2] 严奉霞,王泽龙.压缩感知理论与光学压缩成像系统[J].国防科技大学学报,2014,36(2):140-147.
- [3] LI Cheng-bo. An efficient algorithm for total variation regularization with applications to the single pixel camera

synchronization of a complex network with different nodes[J]. Acta Physica Sinica, 2012, 61(9): 1-13.

[30] Sarpturk S Z, Istefanopoulos Y, Kaynak O. On the stability

of discrete-time sliding mode control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1987, 32 (10): 930-937.

(上接第 40 页)

and compressive sensing[J]. Rice University, 2009, 9.

[4] 王强, 李佳. 压缩感知中确定性测量矩阵构造算法综述[J]. 电子学报, 2013, 10(10): 2041-2050.

[5] 吴赞. 压缩感知测量矩阵的研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2012.

[6] 华翌辰. 基于压缩感知的鬼成像研究[D]. 南京: 南京理工大学, 2014.

[7] Tropp J, Gilbert A C. Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit[J]. 2005.

[8] Tropp J A, Gilbert A C. Signal recovery from random mea-

surements via orthogonal matching pursuit [J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2007, 53(12): 4655-4666.

[9] Donoho D L, Tsaig Y, Drori I, et al. Sparse solution of underdetermined systems of linear equations by stage wise orthogonal matching pursuit[J]. Information Theory, IEEE Transactions on, 2012, 58(2): 1094-1121.

[10] Needell D, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit[J]. Foundations of computational mathematics, 2009, 9(3): 317-334.

(上接第 48 页)

由示波器波形可以看出, 自研板卡的数据信号以“7E7E7E7E”开始, 以“7E7E7E7E”结尾, 与图 3 所示的特殊数据帧格式一致; 地址、控制、信息和校验码字段的数据序列每隔 5 个“1”插入了 1 个“0”, 符合 HDLC 协议的比特填充要求; 发出的数据信号和时钟信号同步产生和结束, 符合串行同步通信的要求。

分析数据序列波形, 可得出自研板卡发出的原始数据为“FF FF FF FF”, 与远端设备发来的测试数据一致。

综上所述, 自研板卡可正确解析和生成 HDLC 协议数据, 本接口设计合理、正确、可行。

6 结 论

采用 STM32F103 微处理器和差分收发芯片架构实现 HDLC 数据帧的解析与生成, 所需的硬件配置资源少, 利于实现研发成本控制和功能集成; 同步帧头和同步帧尾数量、数据触发模式(即时钟上升沿有效和时钟下降沿有效)和数据通信速率可通过软件进行配置, 使用灵活, 适应性强; 在此接口设计方案基础上稍加修改即可实现全双工模式的 HDLC 协议通信, 但由于 STM32F103 微处理器的处理能力有限, 通信速率不大于 1 Mbit/s。

综上所述, 本方法在成本控制较高、通信速率小于 1 Mbit/s 的单路或双路采用 HDLC 协议通信的场合, 具有很高的应用价值。

参 考 文 献

- [1] 张伟. 基于 FPGA 的 HDLC 协议控制系统实现[J]. 指挥信息系统与技术, 2011, 2(2): 48-52.
- [2] 宋飞, 李志蜀. HDLC 协议在 FPGA 通信系统中的实现[J]. 计算机应用, 2009, 29(4): 1092-1094.
- [3] 孟静, 王冬青, 丁明伟, 等. HDLC/UART 通信网关的设计[J]. 自动化技术与应用, 2013(4): 21-24, 55.
- [4] 闫肖鹏, 余义的, 张洪昶. 一种基于单片机的 HDLC 通信卡设计[J]. 自动化技术与应用, 2016, 35(10): 156-158.
- [5] 刘鹏, 金野. 基于 S3C4510B 和 μ Clinux 的 HDLC 接口设计实现[J]. 微计算机信息, 2007, 23(2-2): 1-3.
- [6] 钱黎明, 刘富发, 魏敬和. 支持 PCI 总线的 HDLC 协议专用控制器设计[J]. 中国电子科学研究院学报, 2014, 9(6): 648-652.
- [7] ST 公司. STM32F103xCDE 数据手册[M]. 2009.
- [8] TI 公司. SN74LVC3G34 数据手册[M]. 2013.
- [9] Fairchild 公司. HCPL 06xx 系列数据手册[M]. 2006.
- [10] NS 公司. DS96F172/DS96F174 数据手册[M]. 2000.
- [11] NS 公司. DS96F172/DS96F174 数据手册[M]. 2000.