

·信号与信息处理·

## 基于TVAL3算法不同测量矩阵对图像重构质量的影响

李慧滨

(中国电子科技集团公司光电研究院,天津 300308)

**摘要:** 压缩感知重构是指利用得到的随机测量值恢复原始信号的过程。由于信号是稀疏的或可压缩的,压缩感知问题的求解是寻求方程最稀疏解(即最少非零值)的过程。首先给出了六种测量矩阵的构造方法,之后介绍了一种高质量重建信号的重构方法TVAL3,给出了四个评价图像重构质量的参数,并在此基础上仿真了不同测量矩阵对图像重构质量的影响。

**关键词:** TVAL3; 测量矩阵; 图像重构

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1673-1255(2018)-03-0048-04

## Influence of Different Measurement Matrix Based on TVAL3 Algorithm on Image Reconstruction Quality

LI Hui-bin

(Academy of Opto-Electronics, China Electronics Technology Group Corporation (AOE CETC), Tianjin 300308, China)

**Abstract:** Compressive sensing reconstruction is the process of recovering the original signal using the obtained random measurement values. Because the signal is sparse or compressible, the solution of the compressed sensing problem is the process of finding the sparsest solution of the equation. At first, the construction method of six measurement matrices is given. And then, a reconstruction method TVAL3 of high quality reconstruction signal is introduced, and four assessment parameters of image reconstruction quality are given. At last, the influence of different measurement matrix on image reconstruction quality is simulated.

**Key words:** TVAL3; measurement matrix; image reconstruction

在这样一个数字化时代,所有的数字信号采集都必须有相应的数字化的软硬件支撑。随着人们对于图像和视频等多媒体内容的需求和要求越来越高,对应的硬件设备如照相机和摄像机等信号采集的设备的压力也越来越大。比如,相片的分辨率越来越高,这就需要在照相机中内置越来越多的传感器,以采集质量更高的图像信号。此外还有其他一些目前传统信号采集方式无法有效满足的需求,不可见光如X射线、伽马射线等信号采集和高速视频采集等<sup>[1-2]</sup>。

那么,在这样一个对信号采集越来越苛刻的需求下,有没有一种更有效的采集、传输、存储以及处理的方法呢?答案就是压缩感知。

压缩感知理论表明,可以在远低于Nyquist采样频率的条件下很好地恢复出目标图像。它可以将图像的采集和压缩过程合二为一,通过 $M$ 次测量来还原 $N$ 维信号,其中 $M < N$ 。压缩感知的研究可以归结为以下两个方面:选择性质良好易于实现的测量矩阵以减少所需的测量值;寻找快速高质量重建信号的重构算法<sup>[3]</sup>。

测量矩阵的构造是压缩感知理论的关键:测量矩阵在测量值获取和信号重构方面都有重要的作用;相同重建算法下,测量矩阵性能越好,信号重构质量越高。同时,要将压缩感知推向实用化,易于硬件实现的测量矩阵的构造是关键。

首先给出了六种测量矩阵的构造方法,之后介

绍了一种高质量重建信号的重构方法TVAL3<sup>[4]</sup>,并在此算法基础上仿真了不同测量矩阵对图像重构质量的影响。

## 1 测量矩阵分类

常见的测量矩阵主要有七种:随机稀疏矩阵、高斯矩阵、伯努利随机矩阵、部分哈达玛矩阵、托普利兹矩阵和循环矩阵,下面给出其构造方法<sup>[5-10]</sup>。

### (1) 随机稀疏矩阵

稀疏随机测量矩阵是通过以下的方法构造的:首先生成一个大小为 $M \times N$ 的全零矩阵 $\varphi$ ,且 $M < N$ 。然后对于矩阵 $\varphi$ 的每一列,随机的选取 $b$ 个位置并且在选中的位置上置1,这里 $b < M$ 。稀疏随机矩阵的每一列只有 $b$ 个非零元素,结构简单,在实际应用中易于构造和保存。

### (2) 伯努利随机稀疏矩阵

伯努利随机矩阵的设计方法为:构造一个大小为 $M \times N$ 的矩阵 $\varphi$ ,使得 $\varphi$ 中的每一个元素独立服从伯努利分布,即

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}} & p = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{M}} & p = \frac{1}{2} \end{cases} = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{cases} +1 & p = \frac{1}{2} \\ -1 & p = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

或者

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} \sqrt{\frac{3}{M}} & p = \frac{1}{6} \\ 0 & p = \frac{2}{3} \\ -\sqrt{\frac{3}{M}} & p = \frac{1}{6} \end{cases} = \sqrt{\frac{3}{M}} \begin{cases} +1 & p = \frac{1}{6} \\ 0 & p = \frac{2}{3} \\ -1 & p = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (2)$$

改测量矩阵同样具有很强的随机性。当伯努利随机矩阵的测量数 $M \geq cK \log(N/K)$ 时,便会极大概率满足RIP条件。相对于高斯随机测量矩阵,由于伯努利随机矩阵的元素都为 $\pm 1$ ,所以在实际使用中更容易实现和存储。

### (3) 部分哈达玛随机矩阵

部分哈达玛矩阵构造方法为:首先生成一个 $N \times N$ 大小的哈达玛矩阵,然后随机的从中选取 $M$ 行向量,构成一个大小为 $M \times N$ 的测量矩阵。由于哈达玛矩阵是正交矩阵,从中选取 $M$ 行之后得到的 $M \times N$ 大小的部分哈达玛矩阵还是具有较强的非相关性和部分正交性,所以与其他确定性测量矩阵相比,该矩阵精确重建所需要的测量数较少,

也就是说在同一的测量数量下,部分哈达玛矩阵的重建效果比较好。但由于哈达玛矩阵本身的原因,其维数 $N$ 的大小必须满足2的整数倍,即 $N=2^k, k=1, 2, 3, \dots$ ,所以极大地限制了该矩阵的应用范围及场合。

### (4) 高斯随机矩阵

压缩感知中,使用最广泛的是高斯随机矩阵,其设计的方法为:构造一个 $M \times N$ 大小的矩阵 $\varphi$ ,使得 $\varphi$ 中的每一个元素独立服从均值为0,方差为 $1/M$ 的高斯分布,即

$$\varphi_{ij} \sim N(0, \frac{1}{M}) \quad (3)$$

该测量矩阵具有很强的随机性,可以证明,当随机高斯矩阵的测量数目 $M \geq cK \log(N/K)$ 时,便会极大概率满足RIP条件。在压缩感知过程,随机高斯测量矩阵之所以被广泛使用,主要是因为它与大多数的正交基或者正交字典不相关,而且精确重构所需要的测量数比较少。

### (5) 托普利兹随机矩阵

一般的托普利兹和循环矩阵具有以下形式

$$T = \begin{pmatrix} t_n & t_{n-1} & \cdots & t_1 \\ t_{n+1} & t_n & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{2n-1} & t_{2n-2} & \cdots & t_n \end{pmatrix} \quad (4)$$

$T$ 矩阵代表Toeplitz矩阵,Toeplitz和循环矩阵的构造方法如下:首先生成一个随机向量 $u$ ,即 $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in R^n$ ,然后利用生成的随机向量 $u$ ,经过 $M(M < N)$ 次循环,构造剩余的 $M-1$ 行向量,最后对列向量进行归一化得到测量矩阵 $\varphi$ 。构造托普利兹和循环矩阵时,通常向量 $u$ 取值为 $\pm 1$ ,且每个元素独立的服从贝努利分布。托普利兹矩阵和循环矩阵是利用行向量通过循环位移生成整个矩阵,在实际使用中,由于循环位移易于硬件实现,所以该测量矩阵应用前景比较好。

### (6) 循环矩阵

循环矩阵具有以下形式

$$C = \begin{pmatrix} t_n & t_{n-1} & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_n & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \cdots & t_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

$C$ 矩阵代表的是循环矩阵,可以看出,循环矩阵是托普利兹矩阵的一种特殊形式。构造方法同托普利兹矩阵。

## 2 压缩感知 TVAL3 算法

TVAL3 (total variation augmented lagrangian alternating direction algorithm) 算法<sup>[4]</sup>是在最小全变分的基础上,结合了增强型拉格朗日函数法和交替最小化方法,通过交替最小化方法来寻找拉格朗日的函数模型最小值。再用最速下降法迭代,寻找最小值。

### (1) 模型

算法采用模型为:全变分正则化 (total variation regularization)

$$\min_u \sum_i \|D_i u\|, \text{ s.t. } Au = b \quad (6)$$

式中,  $A$  为测量矩阵;  $U$  为信号或图像;  $b$  为测量值 measurements;  $D_i u$  为每个像素点  $i$  的变分或梯度值;  $\|\cdot\|$  为范式 1-norm or 2-norm。

其中全变分公式即  $D_i u$  的计算如下

$$\|u\|_{TV} = \sum_{ij} \sqrt{(u_{i+1,j} - u_{ij})^2 + (u_{i,j+1} - u_{ij})^2} \quad (7)$$

### (2) 方法

利用增强拉格朗日 (augmented lagrangian method) 将带约束的模型转换为不带约束的目标函数。

增强拉格朗日 (augmented lagrangian method)

$$\tilde{L}_A = \sum_i \left( \|D_i u\| - \lambda^T (Au - b) + \frac{\mu}{2} \|Au - b\|_2^2 \right) \text{ method} \quad (8)$$

引入松弛变量  $w$ , 模型变成

$$\min_{w_i, u} \sum_i \|w_i\|, \text{ s.t. } Au = b \text{ and } D_i u = w_i \text{ for all } i \quad (9)$$

目标函数则变成

$$L_A(w_i, u) = \sum_i \left( \|w_i\| - v_i^T (D_i u - w_i) + \frac{\beta_i}{2} \|D_i u - w_i\|_2^2 \right) - \lambda^T (Au - b) + \frac{\mu}{2} \|Au - b\|_2^2 \quad (10)$$

通过引入松弛变量和增强拉格朗日方法,目标转换为

$$\min_{w_i} L_A(w_i, u_k) = \sum_i \left( \|w_i\| - v_i^T (D_i u_k - w_i) + \frac{\beta_i}{2} \|D_i u_k - w_i\|_2^2 - \lambda^T (Au_k - b) + \frac{\mu}{2} \|Au_k - b\|_2^2 \right) \quad (11)$$

采用交替方向变换方法,可以将问题转为两个

子问题来求解,即求  $W$  和  $U$ ,通过迭代的方式,先求  $W$ ,再求  $U$ ,依次迭代。

$W$  的子问题

$$\min_{w_i} = \sum_i \left( \|w_i\| - v_i^T (D_i u_k - w_i) + \frac{\beta_i}{2} \|D_i u_k - w_i\|_2^2 \right) \quad (12)$$

$U$  的子问题

$$\min_u Q_k(u) = \sum_i \left( -v_i^T (D_i u - w_{i,k+1}) + \frac{\beta_i}{2} \|D_i u - w_{i,k+1}\|_2^2 \right) - \lambda^T (Au - b) + \frac{\mu}{2} \|Au - b\|_2^2 \quad (13)$$

## 3 不同测量矩阵下图像重构质量比较

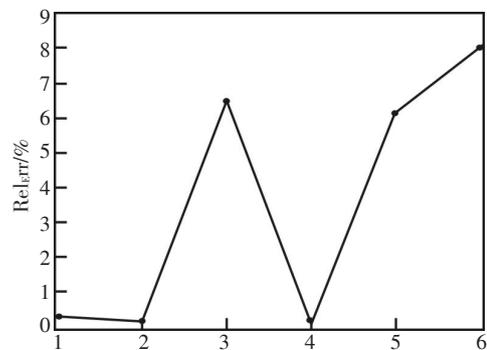
为了测试不同测量矩阵下图像重构质量的好坏,这里采用了四个评价参数,Rel\_ERR(%)是重构图像与原始图像的差值的范数与原始图像范数的比值;CPU(s)是图像重构消耗时长;PSNR为重构图像峰值信噪比;CYCLE是算法迭代次数。

经过仿真,针对六种测量矩阵,其中稀疏随机矩阵的  $b$  选为 3,即矩阵每列中只有 3 个元素非零,算法的四种参数结果如表 1。

表 1 六种测量矩阵下算法重构质量对比

| 矩阵        | Rel_Err/% | CPU/s | PSNR   | CYCLE  |
|-----------|-----------|-------|--------|--------|
| 稀疏随机矩阵    | 0.34      | 1.32  | 110.18 | 123.36 |
| 伯努利随机矩阵   | 0.24      | 1.28  | 113.19 | 106.64 |
| 部分哈达玛随机矩阵 | 6.44      | 1.18  | 87.29  | 100.45 |
| 高斯随机矩阵    | 0.26      | 1.22  | 112.51 | 104.73 |
| 托普利兹矩阵    | 6.17      | 1.73  | 84.72  | 166.91 |
| 循环矩阵      | 8.11      | 1.72  | 83.47  | 168.91 |

六种测量矩阵重构质量评价参数对比如图 1 所示。



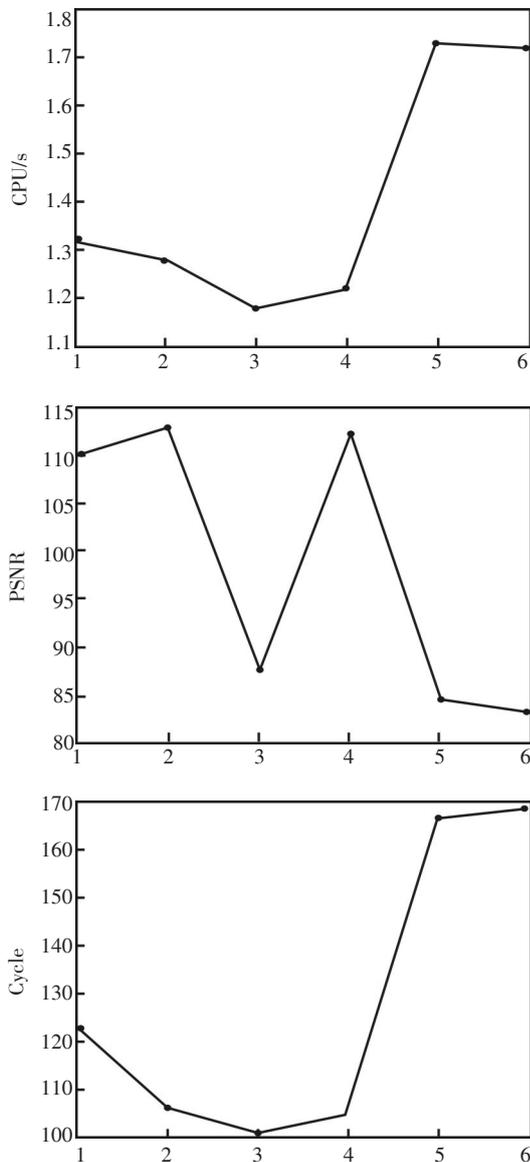


图1 六种测量矩阵重构质量评价参数对比

由图1可以看出:

(1) Rel\_Err 与 PSNR 峰值信噪比成反比,即 Rel\_Err 增大, PSNR 峰值信噪比变小, CPU 处理时间与 Cycle 算法迭代次数存在一定正比关系;

(2) Rel\_Err: 越小越好, 稀疏随机矩阵、伯努利随机矩阵、高斯随机矩阵处理的结果很好;

(3) CPU: 算法处理时间越短越好, 相对来说, 部分哈达玛随机矩阵、高斯随机矩阵处理结果好;

(4) PSNR: 峰值信噪比越大图像越清晰, 部分哈达玛随机矩阵、托普利兹随机矩阵、循环随机矩阵很好;

(5) Cycle: 算法迭代次数, 最大 300 次, 所有测量矩阵处理过程中均没有超过 300, 迭代次数越少, CPU 处理时间相对短, 伯努利随机矩阵、部分哈达玛矩阵、高斯随机矩阵比较好。

由于需要快速成像, 达到利用少量数据、较短处理时间、较高分辨率图像的目的, 在容忍程度允许的情况下, 适当选取。

## 4 结 论

压缩感知理论打破了奈奎斯特定理对信号采样的限制, 以一种全新的方式采样信号, 得到一系列非适应的随机线性投影值, 通过求解优化问题恢复原始信号。通过对各种测量矩阵的研究, 选取了四种评价参数, 给出了不同测量矩阵下 TVAL3 算法的重构质量对比, 具体在使用时可以根据四种评价参数的容忍度, 适当选取测量矩阵。

## 参考文献

- [1] 石光明, 林杰. 压缩感知理论的工程应用方法[J]. 西安电子科技大学出版社, 2017, 2.
- [2] 严奉霞, 王泽龙, 朱炬波. 压缩感知理论与光学压缩成像系统[J]. 国防科技大学学报, 2014, 36(2): 140-147.
- [3] 刘永春, 龚华军, 沈春林. 基于压缩感知的稀疏相机阵列光场采集与恢复[J]. 光电子·激光, 2015, 26(9): 1790-1795.
- [4] LI Cheng-bo. An efficient algorithm for total variation regularization with applications to the single pixel camera and compressive sensing[J]. Rice University, 2009, 9.
- [5] 王强, 李佳, 沈毅. 压缩感知中确定性测量矩阵构造算法综述[J]. 电子学报, 2013, 10(10): 2041-2050.
- [6] 吴赞. 压缩感知测量矩阵的研究[D]. 西安: 西安电子科技大学硕士学位论文, 2012.
- [7] 党骜, 马林华. m 序列压缩感知测量矩阵构造[J]. 西安: 西安电子科技大学(自然科学版), 2015, 42(2): 215-222.
- [8] 李树涛, 魏丹. 压缩传感综述[J]. 自动化学报, 2009, 35(11): 1369-1377.
- [9] 焦李成, 杨淑媛, 刘芳, 等. 压缩感知回顾与展望[J]. 电子学报, 2011, 39(7): 1651-1662.
- [10] 李坤, 马彩文, 李艳, 等. 压缩感知重构算法综述[J]. 红外与激光工程, 2013, 42(Z1): 225-232.