

•测试、试验与仿真•

Jaynes-Cumming 光学模型多重边网络同步数值模拟

田 静,王周洋,顾佳佳

(辽宁师范大学 物理与电子技术学院,辽宁 大连 116029)

摘要:研究了量子光学中的Jaynes-Cumming模型构成的不确定多重边网络的耦合同步。采用单向耦合的方式实现了网络与目标系统之间的同步,并且在此过程中确定了节点状态方程中的不确定参量和耦合系数的更新规则。采用任意的拓扑结构进行连接,并通过数值模拟所得图像进行简单的分析与讨论。

关键词:Jaynes-Cumming模型;多重边网络;混沌同步;Lyapunov函数

中图分类号:O415

文献标识码:A

文章编号:1673-1255(2016)-05-0075-06

Numerical Simulation of Multi-links Network Synchronization with Jaynes-Cumming Optical Model

TIAN Jing, WANG Zhou-yang, GU Jia-jia

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

Abstract: The coupling synchronization of uncertain multi-links network with Jaynes-Cumming model in quantum optics is researched. The synchronization between the network and the target system is realized by one-way coupling, and the updating rules of the uncertain parameter and the coupling coefficient are determined in the process. Arbitrary topology structure is taken to connect, and the synchronization results are analyzed and discussed by the images obtained through numerical simulation.

Key words: Jaynes-Cumming model; multi-links network; chaotic synchronization; Lyapunov function

自 Pecora 和 Carroll 提出“网络同步”的概念以来^[1],作为一种重要并且典型的集体行为,复杂网络的同步问题已在信息科学、生物系统、通信工程以及自动控制等领域被广泛的研究^[2-6]。目前,对于类型不同、拓扑结构不同的复杂网络涌现出许多研究成果,但是这些研究的对象主要针对单边网络,即复杂网络的各个节点之间只存在一种性质的连接方式,关于多重边网络的研究相对较少。而在实际应用中,例如交通网络,通信网络,物流网络,人际关系网等^[7]都是典型的多重边复杂网络,并且在连接中常常会出现时滞现象,或者因为网络的不确定性和复杂性而出现未知或不确定的参数^[8-12]。因此,多重边复杂网络的研究具有重要的现实意义。

自 Gao 等人分别对时滞和不含时滞的多重边复杂网络的稳定性进行分析后^[13],一些学者对于多重边复杂网络的研究越来越深入。典型的工作如:Jang 等人介绍了一些简单的控制器与更新规则,完成了具有耦合时滞的多重边复杂动态网络的自适应同步。Hu 等人进一步对局部和全局稳定性进行了分析,提出了一些新的判据,以保证系统的牵制同步,并且确定了耦合强度的大小,实现多重边网络与一个固定节点的同步^[9]。Li 等人基于时间延迟的不同性质的网络拆分方法将多重边复杂网络进行拆分,结合自适应控制、牵制控制和周期间歇控制的方法来设计控制器和脉冲控制器,从而实现复杂网络的全局指数同步^[10]。同时,Wang 等人设计了

收稿日期:2016-10-18

作者简介:田静(1993-),女,辽宁省凌源市人,硕士研究生,主要从事非线性理论方面的研究。

一种非线性反馈控制器,将投影同步运用到具有时变时滞的多重边复杂网络中^[14]。最近,Zhao等人利用脉冲控制方法,研究了不确定多重边复杂网络的指数与同步,并且解决了参数辨识问题^[15]。Lei等人根据多重边复杂网络的非线性特性,设计了一种新的非线性控制器,得到函数投影同步,使多重边复杂网络更好的应用于信息安全通信。然而,以往关于多重边复杂网络的研究都集中于通过设计控制器使网络达到同步,关于耦合同步与多重边网络的结合研究的还很少。有些网络或系统在实现同步的过程中实际条件可能不允许加入控制器。另外,控制器的设计有时会很困难,这时需要通过网络或系统之间自身的状态变量的关系来实现同步。并且时滞现象和不确定因素在大多数的复杂网络中常常会同时存在。因此,关于多重边复杂网络的同步还有很多前沿问题值得我们去深入研究。

基于以上的讨论,对量子光学中的Jaynes-Cummings模型构成的不确定多重边网络的耦合同步进行研究。采用单向耦合的方式实现网络与目标系统之间的同步,并且在此过程中确定了节点状态方程中不确定参量和耦合系数的更新规则。采用任意的拓扑结构进行连接,通过数值模拟验证了该同步原理的正确性和有效性^[16]。

1 同步原理

把网络中各个边传输速度的不同定义为性质不同,以传输速度最快的或没有时滞的边和各节点组成的网络为基准网络,称这个基准网络为零子网络,即时滞 $\tau_0=0$ 网络,剩余边中相对于零子网络有相同时滞的边和各节点构成第 $l(l=0,2,\dots,m-1)$ 个子网络,这样,最后可以拆分成 m 个子网络。其随机连接图如图1所示。

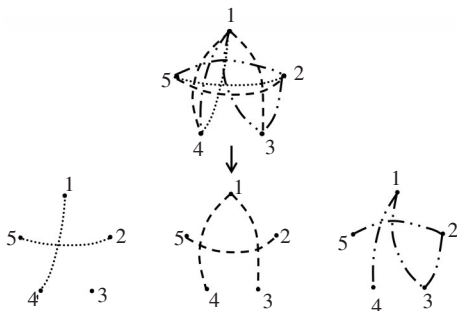


图1 随机连接

以图1为例对多重边网络进行说明:考虑含有5个节点的复杂网络,假设网络中边的性质有3种,其中具有相同性质的边和5个点就形成了一个子网络,这样就得到了3个子网络。

根据文献[15]、文献[16],考虑包含 N 个节点的复杂动力学多重边网络,节点为参量不确定的 n 阶混沌系统。根据上文多重边网络的拆分思想,其中网络中边的性质有 m 种,拆分成 m 个子网络,则整个网络节点的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & F(x_i(t)) + G(x_i(t))\alpha_i + \sigma_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H_0 x_j(t) + \\ & \sigma_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H_1 x_j(t - \tau_1) + \dots + \\ & \sigma_{m-1} \sum_{j=1}^N a_{(m-1)ij} H_{m-1} x_j(t - \tau_{m-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

$(i=1,2,\dots,N)$

其中, $\tau_l(l=0,2,\dots,m-1)$ 为第 l 个子网络相对于零子网络的时滞时间,常数 $\sigma_l > 0(l=1,2,\dots,m-1)$ 为第 l 个子网络的耦合强度; $H_l(l=0,2,\dots,m-1)$ 为各个节点状态变量之间的内部耦合函数,耦合矩阵 $A_{(l)} = (a_{(l)ij})_{N \times N}(l=0,2,\dots,m-1)$ 表示第 l 个子网络的拓扑结构。其中 $a_{(l)ij}$ 的定义如下:若节点 i 和节点 $j(i \neq j)$ 之间有连接且连接数为 q ,则 $a_{(l)ij} = a_{(l)ji} = q$,否则

$$\begin{aligned} a_{(l)ij} = a_{(l)ji} = & 0 \\ a_{(l)ii} = & - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{(l)ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{(l)ji} \end{aligned} \quad (2)$$

$(i=1,2,\dots,N; l=1,2,\dots,m-1)$

当 $m=3$ 时,其动态网络的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & F(x_i(t)) + G(x_i(t))\alpha_i + \sigma_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H_0 x_j(t) + \\ & \sigma_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H_1 x_j(t - \tau_1) + \\ & \sigma_2 \sum_{j=1}^N a_{(2)ij} H_2 x_j(t - \tau_2) + k_i(x_i(t) - s(t)) \end{aligned} \quad (3)$$

其中, k_i 是网络与系统之间的耦合项系数,其更新规则表示为

$$\begin{aligned} \dot{k}_i = & -\varphi_i [(k_i + L_i) e_i (k_i + L_i)^{-1}]^T e_i - \sigma_0 \varphi_i \cdot \\ & [\sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H_0 s(t) (k_i + L_i)^{-1}]^T e_i - \\ & \sigma_1 \varphi_i [\sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H_1 x_j(t - \tau_1) (k_i + L_i)^{-1}]^T e_i - \\ & \sigma_2 \varphi_i [\sum_{j=1}^N a_{(2)ij} H_2 x_j(t - \tau_2) (k_i + L_i)^{-1}]^T e_i \end{aligned} \quad (4)$$

定义同步目标为

$$\dot{s}(t) = F(s(t)) + G(s(t))\alpha \quad (5)$$

其中, $s(t)$ 是系统节点方程 $\dot{x}_i(t) = f(x_i(t))$ 达到同步的解; α 是系统的不确定参量, 其表示为

$$\dot{\alpha} = \theta_i G^T(s) e_i \quad (6)$$

定义误差为

$$\begin{aligned} e_i(t) &= x_i(t) - s(t) \\ e_i(t - \tau_1) &= x_i(t - \tau_1) - s(t - \tau_1) \\ e_i(t - \tau_2) &= x_i(t - \tau_2) - s(t - \tau_2) \end{aligned} \quad (7)$$

那么将式(3)、式(5)代入式(7)得

$$\dot{e}_i = \dot{x}_i - \dot{s} =$$

$$\begin{aligned} &F(x_i) + G(x_i)\alpha_i - F(s) - G(s)\alpha + \sigma_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)j} H_0 x_j(t) + \\ &\sigma_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)j} H_1 x_j(t - \tau_1) + \sigma_2 \sum_{j=1}^N a_{(2)j} H_2 x_j(t - \tau_2) + k_i e_i \end{aligned} \quad (8)$$

构造 Lyapunov 函数方程为

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_i^T e_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\theta_i} (\alpha - \alpha_i)^T (\alpha - \alpha_i) + \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varphi_i} (k_i + L_i)^T (k_i + L_i) + \sum_{i=1}^N r_i \int_{t-\tau_1}^t e_i^T(\eta) e_i(\eta) d\eta + \\ &\sum_{i=1}^N \mu_i \int_{t-\tau_2}^t e_i^T(\eta) e_i(\eta) d\eta \end{aligned} \quad (9)$$

其中, θ_i, φ_i 为调节参量; μ_i, L_i 为大于零的常量; $\sum_{i=1}^N \mu_i \int_{t-\tau_2}^t e_i^T(\eta) e_i(\eta) d\eta$ 是网络连接中时滞项的干扰误差。

将式(9)展开并将式(5)、式(6)、式(8)分别代入得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^N e_i^T \dot{e}_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\theta_i} (\alpha - \alpha_i) \dot{\alpha}^T + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varphi_i} (k_i + L_i) \dot{k}_i^T + \\ &\sum_{i=1}^N r_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1)) + \\ &\sum_{i=1}^N \mu_i (e_i^T e_i - e_i^T(t - \tau_2) e_i(t - \tau_2)) = \\ &\sum_{i=1}^N e_i^T (F(x_i) + G(x_i)\alpha_i - F(s) - G(s)\alpha) + \sum_{i=1}^N e_i^T G(s) (\alpha_i - \alpha) + \\ &\sum_{i=1}^N \frac{1}{\theta_i} (\alpha - \alpha_i) \dot{\alpha}^T + \sum_{i=1}^N e_i^T \sigma_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)j} H_0 e_j(t) + \\ &\sum_{i=1}^N e_i^T \sigma_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)j} H_0 s(t) + \sum_{i=1}^N e_i^T \sigma_1 \sum_{j=1}^N a_{(1)j} H_1 x_j(t - \tau_1) + \\ &\sum_{i=1}^N e_i^T \sigma_2 \sum_{j=1}^N a_{(2)j} H_2 x_j(t - \tau_2) + \sum_{i=1}^N e_i^T (k_i + L_i) e_i - \\ &\sum_{i=1}^N e_i^T L_i e_i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\varphi_i} (k_i + L_i) \dot{k}_i^T + \sum_{i=1}^N r_i e_i^T e_i + \sum_{i=1}^N \mu_i e_i^T e_i - \\ &\sum_{i=1}^N r_i e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1) - \sum_{i=1}^N \mu_i e_i^T(t - \tau_2) e_i(t - \tau_2) \end{aligned} \quad (10)$$

利用 Lipschitz 条件, 即对于实数 $\varepsilon_i > 0$, 下列关系成立

$$\|f(x_i, \alpha_i) - f(s, \alpha_i)\| \leq \varepsilon_i \|x_i - s\| \quad (11)$$

代入式(10), Lyapunov 函数可表示为

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \sum_{i=1}^N e_i^T (\varepsilon_i e_i - L_i e_i + r_i e_i + \mu_i e_i + \sigma_0 \sum_{j=1}^N a_{(0)j} H_0 e_j(t)) - \\ &\sum_{i=1}^N r_i e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1) - \sum_{i=1}^N \mu_i e_i^T(t - \tau_2) e_i(t - \tau_2) = \\ &\sum_{i=1}^N e_i^T P e_i - \sum_{i=1}^N r_i e_i^T(t - \tau_1) e_i(t - \tau_1) - \sum_{i=1}^N \mu_i e_i^T(t - \tau_2) e_i(t - \tau_2) \end{aligned} \quad (12)$$

若使 P 负定, 则存在 $\dot{V} \leq 0$ 。根据 Lyapunov 理论, 网络与目标系统之间实现混沌同步, 并且识别了目标系统中的不确定参量。

2 数值模拟与分析

以量子光学中的 Jaynes-Cumming 模型作为网络节点进行仿真模拟, 对以任意拓扑结构连接的网络的同步原理进行检验, 节点和目标系统的动力学方程可分别表示为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + E x_3 \\ \dot{x}_3 = -E x_2 \\ \ddot{E} + E = \beta_i x_2 \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \dot{s}_1 = -s_2 \\ \dot{s}_2 = s_1 + E s_3 \\ \dot{s}_3 = -E s_2 \\ \ddot{E} + E = \beta s_2 \end{cases} \quad (14)$$

其中, E 为电磁场强度; β_i 为确定量; β 为不确定参量, 与上文中的 α_i 和 α 相对应。当 $E = 10^{-6}$, $\beta_i = 1$ 时, 则该系统的混沌吸引子如图2所示。

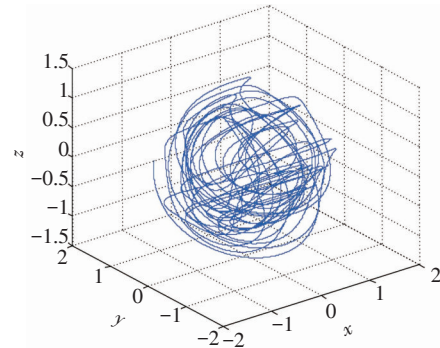


图2 混沌吸引子

当 $N=5$ 时,选择任意拓扑结构进行连接,则根据图1可以得到耦合矩阵为

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

根据式(4)、式(6)可以确定耦合系数和不确定参量的更新规则表示为

$$\begin{aligned} \dot{k}_i &= -\varphi_i [(e_i^1)^2 + (e_i^2)^2 + (e_i^3)^2 + (e_i^4)^2 + (e_i^5)^2] - \\ &\frac{\sigma_0 \varphi_i}{k_i + L_i} \left(\sum_{j=1}^N a_{(0)ij} H_0 s_j(t) \right)^T \begin{pmatrix} e_i^1 \\ e_i^2 \\ e_i^3 \\ e_i^4 \\ e_i^5 \end{pmatrix} - \\ &\frac{\sigma_1 \varphi_i}{k_i + L_i} \left(\sum_{j=1}^N a_{(1)ij} H_1 x_j(t - \tau_1) \right)^T \begin{pmatrix} e_i^1 \\ e_i^2 \\ e_i^3 \\ e_i^4 \\ e_i^5 \end{pmatrix} - \\ &\frac{\sigma_2 \varphi_i}{k_i + L_i} \left(\sum_{j=1}^N a_{(2)ij} H_2 x_j(t - \tau_2) \right)^T \begin{pmatrix} e_i^1 \\ e_i^2 \\ e_i^3 \\ e_i^4 \\ e_i^5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\beta = \theta_i (s_i + E s_3) e_i^5 \quad (16)$$

在仿真模拟过程中,取 $\tau_1=0.01$, $\tau_2=0.02$, $\nu=1$ 网络节点的各参量的取值不变: $\varphi_i=0.5$, $L_i=0.5$, $\theta_i=1$, $\sigma_0=\sigma_1=\sigma_2=1$ 。

各节点变量的初值为: $k_1=0.7$, $k_2=0.9$, $k_3=0.5$, $k_4=0.4$, $k_5=0.6$, $\beta=0.6$ 。

图3~图7显示了节点间误差变量随时间变化的结果。

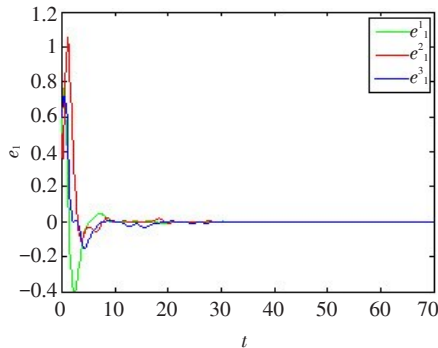


图3 误差 e_1 随时间 t 的变化

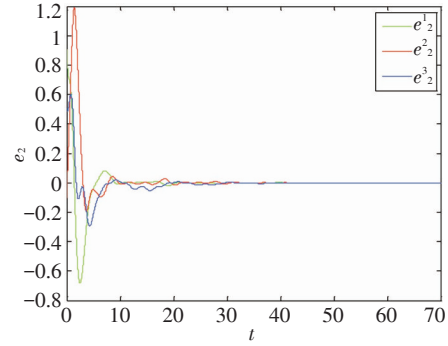


图4 误差 e_2 随时间 t 的变化

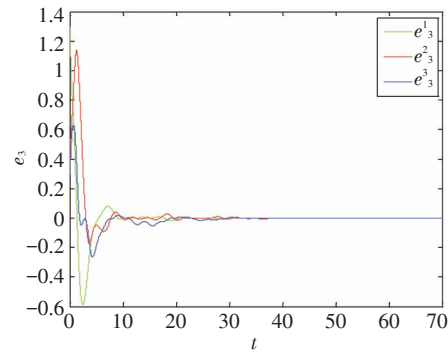


图5 误差 e_3 随时间 t 的变化

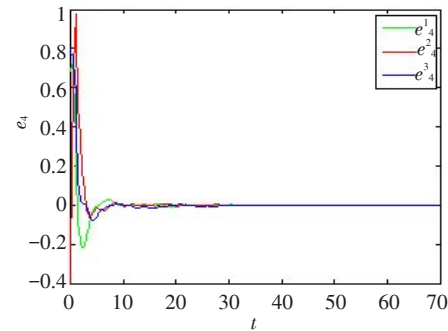


图6 误差 e_4 随时间 t 的变化

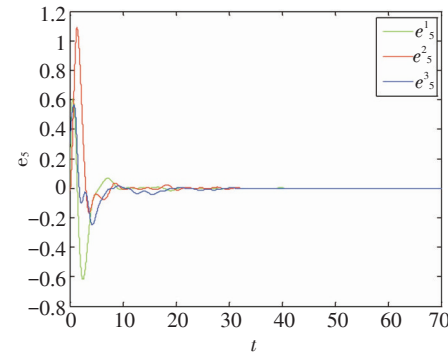


图7 误差 e_5 随时间 t 的变化

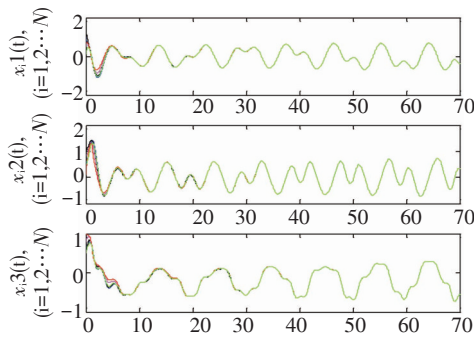


图8 状态变量随时间 t 的变化

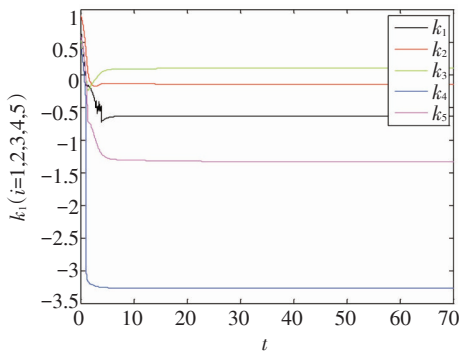


图9 耦合系数 k_i 随时间 t 的变化

图中可以看出,复杂网络在加入单向耦合后,虽然误差变量 e_i 的初值相差很大,但是随时间的变化很快趋于零,当时间 $t=30$ 时,误差已趋于零,即复杂网络实现耦合同步。图9所示是各节点方程的状态变量随 t 的变化。由图可知,在加入单向耦合后,各节点相应的状态变量经过短暂的时间变化后,各个节点的状态变量的变化轨迹变为一致。

由图9可以看出,基于式(15)的更新规则,耦合系数 k_i 在短暂的时间内从最初的任意给定值逐渐趋于定值,最后保持不变,说明在此过程中耦合系数 k_i 得以识别。图10显示了不确定参量 β 随时间的变化规律。

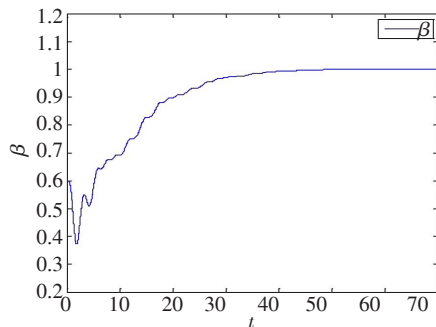


图10 不确定参量 β 随时间 t 的变化

在更新规则式(16)中误差 e_i^s 可以取 $i=1\cdots 5$ 五个变量分别代入进行参量识别,分别得到五条不确定参量 β 随时间变化的曲线。这里仅代入 $i=1$ 的误差变量 e_i^s 进行说明,图中可以看出,不确定参量 β 最后趋于给定值 $\beta_i=1$, β 得以识别。

基于上述分析,误差变量 e_i 趋于零,不确定参量和耦合系数也得以识别,因此可以确定复杂网络与目标系统之间达到了耦合同步。

3 结 论

通过采用单向耦合的方式实现了由量子光学 Jaynes-Cumming 模型构成的不确定多重边网络与目标系统之间的耦合混沌同步。基于 Lyapunov 理论,确定了不确定参量和耦合系数的更新规则。结果表明,对给定的多重边复杂网络加入单向耦合,经过短暂的一段时间的演化后,网络各节点与目标系统之间的误差逐渐趋于零,复杂网络中的各个节点的状态函数的轨迹也趋于一致,说明网络与目标达到完全同步。各参量通过选取不同的初值进行仿真模拟,以一个节点的误差量为例,对不确定参数和耦合系数进行识别,通过图像可以发现,经过短暂时间后它们趋于定值不变,可以认为不确定参量和耦合系数得以识别,同时证明了理论分析的正确性。

参考文献

- [1] Pecora L M, Carroll T L. Master stability functions for synchronized coupled systems[J]. Physical Review Letters, 1998, 80(10):2109-2112.
- [2] Kocarev L, Parlitz U. Paper 13-general approach for chaotic synchronization with applications to communication[J]. Physical Review Letters, 1995, 74(25):5028-5031.
- [3] Li K Z, Zhao M C, Fu X C. Projective synchronization of driving- response systems and its application to secure communication circuits & systems I regular papers[J]. IEEE Transactions on, 2009, 56(10):2280-2291.
- [4] Mata-Machuca J L, Martínez-Guerra R, Aguilar-López R, et al. A chaotic system in synchronization and secure communications[J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2012, 17(4):1706-1713.
- [5] Li C, Liao X, Wong K W. Chaotic lag synchronization of coupled time-delayed systems and its applications in secure communication[J]. Physica D Nonlinear Phenomena,

- 2004, 194(3-4):187-202.
- [6] Xie Q, Chen G, Bollt E M. Hybrid chaos synchronization and its application in information processing[J]. Mathematical & Computer Modelling, 2002, 35(1-2):145-163.
- [7] Jiang C. Hybrid adaptive and impulsive synchronization of uncertain complex networks with delays and general uncertain perturbation[J]. Applied Mathematics & Computation, 2014, 227(2):480-493.
- [8] Li L, Li W, Kurths J, Luo Q, et al. Pinning adaptive synchronization of a class of uncertain complex dynamical networks with multi-link against network deterioration[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2015, 72:20-34.
- [9] Hu Q, Peng H, Wang Y, et al. Pinning adaptive synchronization of complex dynamical network with multi-links[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 69(4):1813-1824.
- [10] Li N, Sun H, Jing X, Zhang Q. Exponential synchronisation of united complex dynamical networks with multi-links via adaptive periodically intermittent control[J]. Iet Control Theory & Applications, 2013, 7(13):1725-1736.
- [11] Zhao J, Wu Y, Liu Q. Chaos synchronization between the coupled systems on network with unknown parameters[J]. Applied Mathematics & Computation, 2014, 229(6):254-259.
- [12] Yang G. Adaptive Synchronization of a class of uncertain complex networks against network deterioration[J]. Circuits & Systems I Regular Papers IEEE Transactions on, 2011, 58(6):1396-1409.
- [13] Gao Y, Li L X, Peng H P, et al. Stability analysis of complex networks with multi-links[J]. Acta Physica Sinica, 2008, 57(3):1444-1452.
- [14] Wang W, Peng H, Li L, et al. Finite-time function projective synchronization in complex multi-links networks with time-varying delay[J]. Neural Processing Letters, 2013, 41(1):71-88.
- [15] Zhao H, Li L, Peng H, et al. Impulsive control for synchronization and parameters identification of uncertain multi-links complex network[J]. Nonlinear Dynamics, 2015, 83(3):1-15.
- [16] Xu Y, Zhou W, Fang J, et al. Structure identification and adaptive synchronization of uncertain general complex dynamical networks[J]. Physics Letters A, 2009, 374(2):272-278.

《光电技术应用》期刊简介

《光电技术应用》期刊是中国电子科技集团公司主管,中国电子科技集团公司光电研究院主办,公开发行的学术性中文科技期刊。以光电技术为主要专业特色,传播光电技术、光电系统应用技术专业领域的先进科技信息,报道新型科技成果,推动工程技术交流,促进行业科技进步与发展。

期刊所设栏目主要有:综述,光电系统,光学设计,红外技术,激光技术,光电探测,光电器件与材料,信号与信息处理,电路与控制,测试、试验与仿真等。

期刊拥有优秀的编委会成员,审稿专家涉及光电技术的各个领域,具有审稿速度快、质量高,编辑人员具有较高的职业素质,工作认真负责、反馈速度快,期刊版面设计合理、美观大方,印刷质量好,出刊及时。

竭诚欢迎广大读者踊跃投稿。