

·信号与信息处理·

基于FFT系数的正弦信号频率估计算法

侯盼卫, 杨 录, 王建军

(中北大学电子测试技术国家重点实验室, 山西 太原 030051)

摘要:针对基于FFT系数实部的频率插值算法在峰值谱线相位接近于 $\pm\pi/2$ 时频率估计误差较大的问题,提出了一种改进的正弦信号频率估计算法。该算法首先利用FFT系数的实部和虚部序列索引出峰值谱线位置,然后根据峰值谱线的相位,选取实部与虚部序列中幅度较大的序列进行频率插值。仿真结果表明:在信噪比为3 dB、采样点为128的情况下,整个频段上归一化频率估计误差均方根小于0.02,接近Cramer Rao下限,整体性能优于基于FFT系数实部的频率插值算法和Rife算法。改进的算法频率估计精度高,计算量小,易于硬件实现。

关键词:频率估计;正弦信号;快速傅里叶变换;比值校正法

中图分类号:TN911.6

文献标识码:A

文章编号:1673-1255(2013)-06-0058-05

Frequency Estimation Algorithm of Sine Signal Based on FFT Coefficient

HOU Pan-wei, YANG Lu, WANG Jian-jun

(National Key Laboratory for Electronic Measurement Technology, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: Larger frequency estimation error will appear when a peak spectrum line phase is closed to $\pm\pi/2$ using frequency interpolation algorithm based on the real part of fast Fourier transform (FFT) coefficient. So an improved sine signal frequency estimation algorithm is proposed. The position of peak spectrum line is firstly indexed by using the real part and imaginary part sequence of FFT coefficient. And then according to the phase of peak spectrum line, the sequences with larger amplitude in real and imaginary part sequences are selected to participate in frequency interpolation. Simulation results show that at the condition of $SNR=3$ dB and sampling number $N=128$, the root mean square of normalized frequency estimation error at the whole frequency band is less than 0.02 and closed to Cramer-Rao lower bound (CRB). The total performance of the improved algorithm is better than the frequency interpolation and Rife algorithm based on the real part of FFT coefficient. The improved algorithm has the characteristics of high frequency estimation precision and few computation amounts and it is easy to implement in hardware.

Key words: frequency estimation; sine signal; fast Fourier transform (FFT); amplitude ratio method

对淹没在噪声中的正弦信号进行频率估计是信号处理中的经典课题,在雷达、通信、声纳、电子对抗、电力谐波检测和振动信号处理等领域都有着广泛的应用,其中在通信领域,测定所截获无线电信号的频率是通信侦察的基本任务,快速、高精度是测频技术追求的目标。目前国内外已经提出了不少方法,主要分为时域、频域和时-频分析方法等,但在频域上获取频率信息要比在时域上采用测平均频率的

方法具有更强的抗噪声性能。文献[1]给出的最大似然估计算法(maximum likelihood, ML)能够达到Cramer Rao 下限(CRB),被称为最优估计算法,但需要进行一维搜索,计算量大、无法实时处理。文献[2]给出的频率估计算法是对ML算法的一种近似解,性能接近CRB,但在低信噪比时出现解的发散现象,计算量也较大,不易硬件实现。

基于离散傅里叶变换(DFT)的谱分析法采用快

收稿日期:2013-08-20

基金项目:山西省自然科学基金(2010011002-2)

作者简介:侯盼卫(1988-),男,河南洛阳人,中北大学硕士研究生,研究方向为数字信号处理。

速傅里叶变换(FFT),运算速度快,适合实时信号处理,在工程实际中得到了广泛的应用,但FFT运算只能对有限点序列进行处理,不可避免的造成能量泄露,同时存在栅栏效应,当信号频谱峰值谱线不能与主瓣的中心重合时,信号真实频率落于主瓣内的两根谱线之间,便会产生较大的频率测量误差。目前国内学者提出了包括比值法(又称插值法)在内的离散频谱校正理论与技术,比值法根据频谱校正所采用FFT谱线的多少,可分为两谱线比值法和三谱线比值法两大类^[3]。其中两谱线比值法主要有Rife算法、Grandk算法、Quinn算法、复比值校正法和修正Rife算法(M-Rife算法)^[4];三谱线比值校正法有复合复比值校正法、Vetterling算法、Voglewede算法和Jacobsen算法。Rife算法和Quinn算法都是首先通过FFT幅度谱索引峰值谱线位置,然后利用峰值谱线和次大值谱线来估计频率的^[5-6],但当用FPGA硬件实现时,由于求幅度谱的复数取模运算需要用CORDIC算法对输入向量不断地旋转和缩放来逼近精确解,影响了FPGA运行速度^[7]。文献[8]提出了一种基于FFT系数实部的频率插值算法,只通过3个DFT变换系数的实部构造频率修正项,计算量小,易于硬件实现;但当峰值谱线的相位接近于 $\pm\pi/2$ 时,实部序列很小,在噪声干扰下,峰值谱线索引容易出错,并且频偏计算误差较大,需要改进。针对基于FFT系数实部的频率插值算法在峰值谱线的相位接近于 $\pm\pi/2$ 时误差较大的问题,提出了一种结合FFT系数实部和虚部的频率估计算法。

1 算法分析

1.1 频率插值算法原理与分析

设正弦信号序列 $y(n)$ 为

$$y(n) = A \cos(2\pi f_0 n / f_s + \phi) \quad (1)$$

其中, A 、 f_0 和 ϕ 分别是信号的幅度、频率和初相, f_s 为采样频率, N 为采样长度, $n=0\sim N-1$ 。长度为 N 的序列 $y(n)$, 相当于由无限长序列加窗函数为 $w(n)=1$ ($n=0\sim N-1$) 的矩形窗截断所得。矩形窗函数的离散傅里叶变换 $W(k)$ 为

$$W(k) = \frac{\sin(\pi k)}{\sin(\pi k/N)} e^{-j\pi k(N-1)/N} \quad (2)$$

其中, $k=0\sim N-1$ 。对 $y(n)$ 做 N 点 DFT 得离散频谱

$Y(k)$, 由于实序列 DFT 的对称性, 可忽略负频率成分的影响, 只考虑离散频谱的前 $N/2$ 点, 设 $Re(x)$ 表示取 x 的实部, 则 FFT 系数的实部 $Re(Y(k))$ 为

$$Re(Y(k)) = \frac{A}{2} \left[\frac{\sin(\pi(k-k_0))}{\sin(\pi(k-k_0)/N)} \right] \cos(\phi - \pi(k-k_0)(N-1)/N) \quad (3)$$

其中, k_0 为信号在频谱上对应的离散频率。由于 DFT 存在栅栏效应, 当输入信号频率没有与离散谱线重合时, 信号真实频率落于主瓣内的两根谱线之间, 直接用 FFT 运算的峰值谱线位置估计信号频率时, 存在频率估计误差, 其误差范围为 $[-f_s/(2N), f_s/(2N)]$ 。记信号频谱中峰值谱线序号为 m , 峰值谱线 $Re(Y(m))$ 及其对应相位 $\Phi(m)$ 分别为

$$Re(Y(m)) = \frac{A \sin(\pi\delta)}{2\pi\delta/N} \cos(\phi + \delta\pi(N-1)/N) \quad (4)$$

$$\Phi(m) = \phi + \delta\pi(N-1)/N \quad (5)$$

其中, δ 为无量纲频率偏移量, 简称频偏, $\delta = k_0 - m$ 。当 $N \gg 1$ 时, $1/N \rightarrow 0$, $(N-1)/N \rightarrow 1$, 由式(3)和式(5)可知, 峰值谱线左右两侧相邻的谱线的实部可表示为

$$Re(Y(m-1)) = \frac{A \sin(\pi\delta)}{2\pi(1+\delta)/N} \cos(\Phi(m)) \quad (6)$$

$$Re(Y(m+1)) = -\frac{A \sin(\pi\delta)}{2\pi(1-\delta)/N} \cos(\Phi(m)) \quad (7)$$

利用峰值谱线与其相邻的次大值谱线系数实部之比构造插值多项式, 该方法估计的频偏 δ 为

$$\delta = \begin{cases} \delta_1 = -\frac{Re(Y(m+1))}{(Re(Y(m)) - Re(Y(m+1)))} & [\delta_1 > 0][\delta_2 > 0]; \\ \delta_2 = \frac{Re(Y(m-1))}{(Re(Y(m)) - Re(Y(m-1)))} & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

通用的频率校正公式为

$$f_0 = (m + \delta)f_s/N \quad (9)$$

该算法的优点是方法简单, 仅利用 FFT 系数实部来索引峰值谱线的位置, 并进行频率插值, 避免了求信号幅度谱的复数求模运算和 Quinn 算法的复数除法运算, 大大减小了计算量, 易于硬件实现。

由式(4)~式(7)可知, $Y(m)$ 、 $Y(m-1)$ 和 $Y(m+1)$ 实部的大小与峰值谱线的相位 $\Phi(m)$ 有关, 该算法在峰值谱线的相位 $\Phi(m)$ 接近于 0 或 π 时, 频率校正精度较高, 但当峰值谱线的相位 $\Phi(m)$ 接近于 $\pm\pi/2$ 时, 信号频谱分布与 FFT 系数的关系如图 1 所示, FFT 系数实部序列幅度很小, 接近于零, 在噪声干

扰下,根据实部序列索引的峰值谱线位置容易出错,计算的频偏 δ 误差也较大,此时频率估计精度较低。

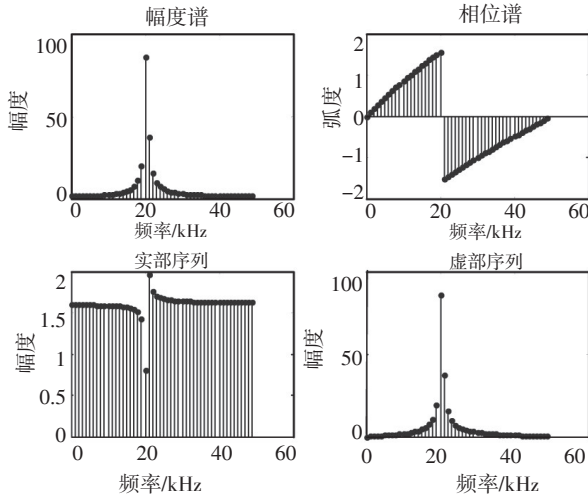


图1 信号频谱与FFT系数的关系 ($\Phi(m) \approx \pi/2$ 时)

1.2 改进的算法

在峰值谱线的相位 $\Phi(m)$ 接近于 $\pm\pi/2$ 时,信号频谱与FFT系数的关系如图1所示,DFT实部序列幅度很小,此时实部序列幅度最大值谱线并不能与幅度谱最大值谱线重合,而DFT系数的虚部序列的幅度与幅度谱很接近,并具有完全相同的峰值谱线位置;通过调整信号的初相 ϕ ,并保持频偏 δ 不变,在幅度谱峰值谱线的相位 $\Phi(m)$ 接近于0或 π 时,FFT系数分布如图2所示,DFT系数实部序列的幅度与幅度谱很接近,具有完全相同的峰值谱线位置,而DFT系数的虚部幅度接近于0时,其幅度最大值位置并没有与幅度谱峰值谱线重合;当频谱峰值谱线的相位 $\Phi(m)$ 在其他区域时,频偏 δ 保持不变,DFT系数的实部和虚部序列与幅度谱具有相似的特征,其幅度相对于幅度谱都有一定比例的缩小,此时的FFT系数分布如图3所示。

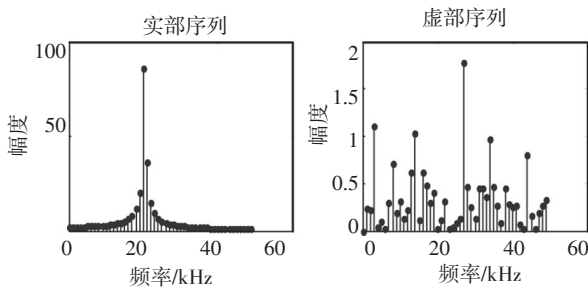


图2 FFT系数分布 ($\Phi(m) \approx 0$ 时)

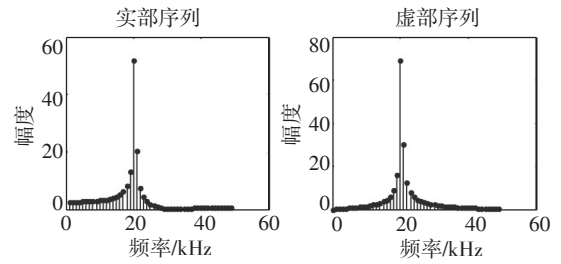


图3 FFT系数分布 ($\Phi(m) \approx 3\pi/10$ 时)

由图1~图3分析可知,仅仅通过实部序列或虚部序列并不能准确地索引出峰值谱线的位置。当通过实部和虚部序列索引出对应的峰值谱线位置相同时,对应谱线也是信号幅度谱的峰值谱线;但当幅度谱峰值谱线的相位 $\Phi(m)$ 在 $0, \pi$ 或 $\pm\pi/2$ 附近时,在噪声干扰下,实部和虚部序列对应的峰值谱线位置可能不同,当 $\cos(\Phi(m))$ 大于 $\sin(\Phi(m))$ 时,实部序列幅度比虚部大,具有更强的抗噪声干扰能力,实部序列的峰值谱线就是幅度谱的峰值谱线,反之,当 $\cos(\Phi(m))$ 小于 $\sin(\Phi(m))$ 时,虚部序列的峰值谱线就是幅度谱的峰值谱线。

文献[8]已经推导了基于FFT系数实部的频率插值的公式,利用虚部序列进行频率插值的方法和其类似, $\text{Im}(x)$ 表示取 x 的虚部。信号 $y(n)$ 的FFT系数的虚部序列 $\text{Im}(Y(k))$ 为

$$\text{Im}(Y(k)) = \frac{A}{2} \left[\frac{\sin(\pi(k-k_0))}{\sin(\pi(k-k_0)/N)} \right] \sin(\phi - \pi(k-k_0)(N-1)/N) \quad (10)$$

当 $\delta > 0$ 时,主瓣内的次大值谱线在峰值谱线右侧,峰值谱线与次大值谱线相位相差约为 π ,当 $N \gg 1$ 时, $\sin(\Phi(m+1)) = -\sin(\Phi(m))$,构造次大值谱线与峰值谱线系数虚部的比值

$$\frac{\text{Im}(Y(m+1))}{\text{Im}(Y(m))} = -\frac{|Y(m+1)|}{|Y(m)|} = -\frac{\delta}{1-\delta} \quad (11)$$

此时频偏 δ 为

$$\delta = \frac{-\text{Im}(Y(m+1))}{\text{Im}(Y(m)) - \text{Im}(Y(m+1))} \quad (12)$$

当 $\delta < 0$ 时,主瓣内的次大值谱线在峰值谱线左侧,同理可得此时频偏 δ 为

$$\delta = \frac{\text{Im}(Y(m-1))}{\text{Im}(Y(m)) - \text{Im}(Y(m-1))} \quad (13)$$

因此利用FFT系数虚部估计的频偏 δ 可表示为

$$\delta_1 = -\frac{\text{Im}(Y(m+1))}{(\text{Im}(Y(m)) - \text{Im}(Y(m+1)))} \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$$

$$\delta_2 = \frac{\text{Im}(Y(m-1))}{(\text{Im}(Y(m)) - \text{Im}(Y(m-1)))} \quad (14)$$

当次大值谱线在峰值谱线右侧时, $\text{Im}(Y(m+1))/\text{Im}(Y(m)) < 0$, $\text{Im}(Y(m-1))/\text{Im}(Y(m)) > 0$, 因此 $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$; 反之当次大值谱线在峰值谱线左侧时, $\delta_1 < 0$, $\delta_2 < 0$ 。反过来可以根据 δ_1 和 δ_2 的取值来判断插值方向。

由式(3)和式(10)可知, $Y(m)$ 、 $Y(m-1)$ 和 $Y(m+1)$ 实部与虚部的大小与峰值谱线的相位 $\Phi(m)$ 有关, 当 $\cos(\Phi(m))$ 大于 $\sin(\Phi(m))$ 时, 实部序列幅度比虚部序列大, 为了减小噪声的影响, 可利用实部序列进行频率插值; 反之当 $\cos(\Phi(m))$ 小于 $\sin(\Phi(m))$ 时, 可利用虚部序列进行频率插值。

综合所述, 新算法实现流程如图4所示。

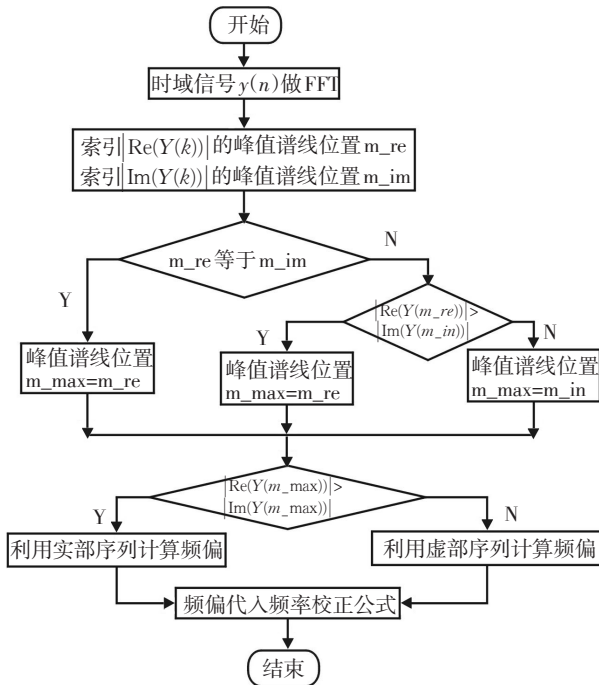


图4 改进算法流程框图

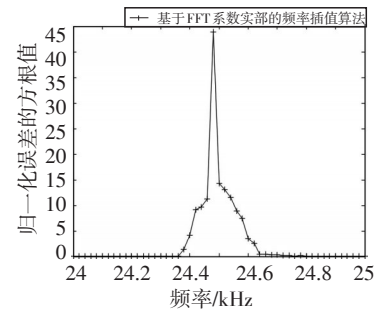
2 算法仿真与性能分析

为了分析上述算法的频率估计精度, 在计算机上进行了 Monte Carlo 仿真。对式(1)定义的正弦信号迭加了实部与虚部相互独立、方差为 σ^2 的零均值高斯白噪声。仿真参数设置为: 信号幅度 A 为 1, 初相 θ 为 0, 采样频率 $f_s = 128$ kHz, 数据长度 $N = 128$ 点, 则信号的信噪比为 $SNR = A^2/2\sigma^2$ 。根据参数估计理论, 在给定数据长度和信噪比的前提下, AWGN 背景下信号参数的任意无偏估计均方根误差不会小于一个下

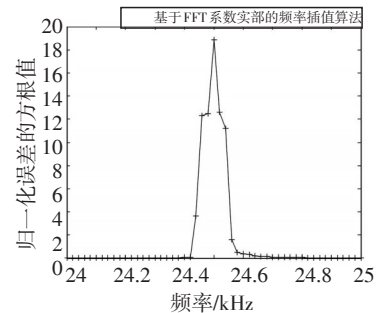
限: Cramer Rao 下限(CRB)。在信号频率不接近 0 或 $f_s/2$ 、初相未知的情况下, 实正弦信号频率估计误差的均方根误差下限(CRB)为^[9]

$$\sigma_{CRB} = \sqrt{6f_s^2 / (4\pi^2 N \cdot SNR \cdot (N-1)^2)} \quad (15)$$

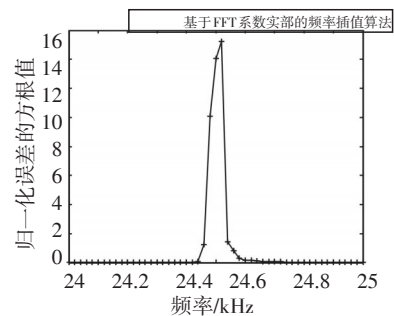
为了方便与 FFT 本身的频率分辨率 Δf 对比, 设定归一化频率估计的误差为 $\sigma = (f_r - f_0)/\Delta f$, 其中, f_r 是估计的频率, 记所有样本归一化频率误差的均方根值为 σ_{RMSE} 。在信号频率 f_0 为 [24 kHz, 25 kHz] 的区间上等间隔的取 100 频率点, 即一个频率分辨率间隔内, 对每个频率点做 1 000 次实验, 文献[8]中的基于 FFT 系数实部的频率插值算法在信噪比为 -3 dB、0 dB 和 3 dB 时的频率估计均方根误差 σ_{RMSE} 如图 5 所示, Rife 算法与改进的算法的频率估计均方根误差 σ_{RMSE} 如图 6 所示。



(a) SNR = -3 dB



(b) SNR = 0 dB



(c) SNR = 3 dB

图5 当 SNR = -3 dB、0 dB 和 3 dB 时基于 FFT 系数实部的插值算法的均方根误差

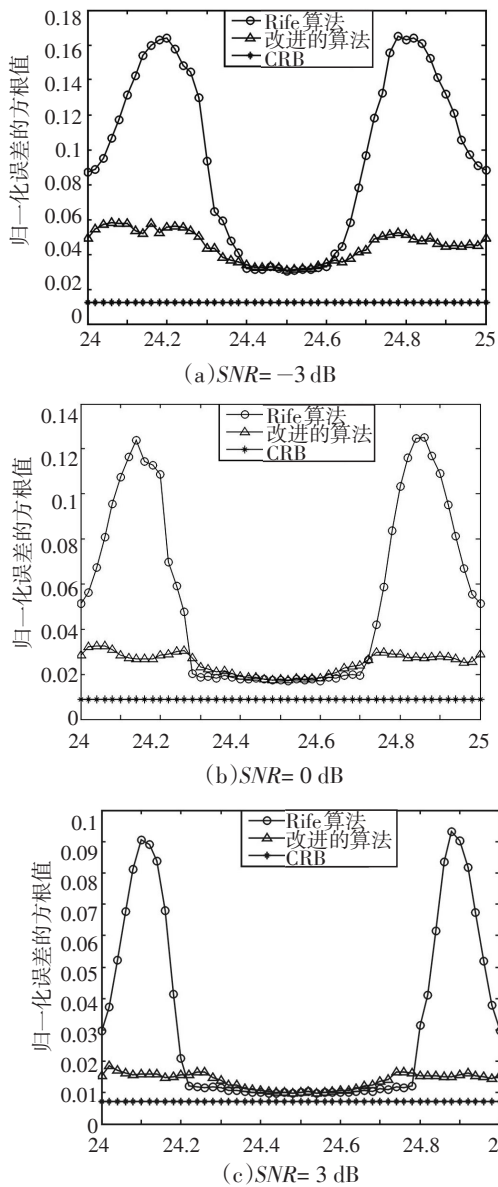


图6 当SNR= -3 dB、0 dB和3 dB时Rife算法和改进算法的均方根误差

从仿真结果可以看出,归一化频率误差的均方根 σ_{RMSE} 基本上关于频偏 $\delta = 0.5$ 对称,故只分析频偏 δ 在 $0 \sim 0.5$ 区间上的变化情况。基于FFT系数实部的频率插值算法在频偏 δ 小于 0.25 时,频率估计精度较高,而 δ 大于 0.25 时,频率估计误差明显增大,甚至出现误差大于 40 个频谱分辨率 Δf 的情况;这是由于在频偏 δ 小于 0.25 时,峰值谱线相位 $\Phi(m)$ 在 $[0, \pi/4]$ 上,实部序列大于虚部序列,具有较强的抗干扰能力,精度较高;而频偏 δ 大于 0.25 时峰值谱线相位 $\Phi(m)$ 在 $[\pi/4, \pi/2]$ 上,实部序列较小,在噪声干扰下,精度较低,并且随着 $\cos(\Phi(m))$ 的减小,误差逐渐增大。Rife算法在频偏 δ 接近 0.5 时,误差接近频率

估计误差下限,在频偏 δ 小于 0.2 时,频率估计误差较大,这是由于在噪声干扰下,插值方向错误造成的。改进的算法与以上两种算法相比,在整个频段上具有更高的频率估计精度,特别是在相同信噪比的情况下与基于FFT系数实部的频率插值算法相比,改善了受噪声影响较大的频段,性能提高明显;随着信噪比的提高算法的频率估计精度也有所提高,在 $SNR=3$ dB时,整个频段上归一化频率估计误差均方根小于 0.02 ,接近频率估计误差下限CRLB,所以改进的算法是一种性能更优的算法。

3 结 论

在分析基于FFT系数实部的频率插值算法的基础上,通过选取FFT系数实部与虚部中幅度较大的序列进行频率插值,由此得出了一种新的频率估计算法。仿真实验表明,改进的算法计算量小,易于硬件实现,比基于FFT系数实部的插值算法具有更高的频率测量精度,可以应用于通信、雷达等需要频率测量的场合。

参考文献

- [1] Rife D C, Boorstyn R R. Single tone parameter estimation from discrete-time observations[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1974, 20 (05): 591-598.
- [2] Abatzoglou T J. A fast maximum likelihood algorithm for the frequency estimation of a sinusoid based on Newton's method [J]. IEEE Trans. ASSP, 1985, 33(1): 77-89.
- [3] 柏林,董鹏飞,刘小峰,等.比值法的频率估计精度分析[J]. 重庆大学学报,2011,3(10):7-13.
- [4] 邓振森,刘渝,王志忠. 正弦波频率估计的修正 Rife 算法[J]. 数据采集与处理,2006,21(4): 473-477.
- [5] Rife D C, Vincent G A. Use of the discrete Fourier transform in the measurement of frequencies and levels of tones[J]. Bell Syst.Tech.J,1970,49:197-228.
- [6] Quinn B G. Estimating frequency by interpolation using Fourier coefficients[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(5):1264-1268.
- [7] 王旭东,刘渝,邓振森. 基于修正 Rife 算法的正弦波频率估计及 FPGA 实现[J]. 系统工程与电子技术,2008,30(4): 621-624.
- [8] 张昌菊,唐斌. 正弦信号快速频率估计算法比较与改进 [J]. 电讯技术,2005(1):72-76.
- [9] 谢胜,陈航,于平. 基于FFT并二次修正的Rife频率估计算法[J]. 探测与控制学报,2010,32(4):48-53.