

·信号与信息处理·

基于自适应对偶字典的磁共振图像的超分辨率重建

刘振圻, 包立君, 陈 忠

(厦门大学电子科学系, 福建 厦门 361005)

摘要: 为了提高磁共振成像的图像质量, 提出了一种基于自适应对偶字典的超分辨率去噪重建方法, 在超分辨率重建过程中引入去噪功能, 使得改善图像分辨率的同时能够有效地滤除图像中的噪声, 实现了超分辨率重建和去噪技术的有机结合。该方法利用聚类-PCA算法提取图像的主要特征来构造主特征字典, 采用训练方法设计出表达图像细节信息的自学习字典, 两者结合构成的自适应对偶字典具有良好的稀疏度和自适应性。实验表明, 与其他超分辨率算法相比, 该方法超分辨率重建效果显著, 峰值信噪比和平均结构相似度均有所提高。

关键字: 稀疏表示; 自适应对偶字典; 超分辨率重建; 去噪; 磁共振成像

中图分类号: R445.2

文献标识码: A

文章编号: 1673-1255(2013)-04-0055-06

Super-resolution Reconstruction for Magnetic Resonance Imaging Based on Adaptive Dual Dictionary

LIU Zhen-qi, BAO Li-jun, CHEN Zhong

(Department of Electronic Science, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: In order to enhance images quality of magnetic resonance imaging (MRI), a super-resolution denoising reconstruction method is proposed based on adaptive dual dictionary. In the method, denoising function is used in super-resolution reconstruction process so that the noise in images is filtered effectively as the improvement of image resolution. And the integration of super-resolution reconstruction and denoising technology is implemented. Clustering-PCA algorithm is used in the method to extract main features of images to construct main-feature dictionary. Training method is used to design self-learning dictionary expressing detailed information of images. Adaptive dual dictionary constructed by combination of the two dictionaries has good sparseness and adaptability. Experimental results show that super-resolution reconstruction effect is remarkable in the method comparing with other super-resolution algorithms. Peak signal to noise ratio (PSNR) and mean structure similarity (MSSIM) are all improved.

Key words: sparse representation; adaptive dual dictionary; super-resolution reconstruction; denoising; magnetic resonance imaging (MRI)

磁共振成像(magnetic resonance imaging, MRI)的分辨率受到成像设备性能、采样序列和采集时间的限制, 通常难以获得理想的成像分辨率。同时, 由于成像仪器如发射线圈、接收线圈、磁体等, 以及周围环境的不理想, 不可避免地会引入噪声, 于是如何去

除噪声并且实现图像的超分辨率重建具有重要的研究意义。图像的超分辨率(super resolution, SR)重建就是从一系列低分辨率(low resolution, LR)或欠采样图像当中重建出高分辨率(high resolution, HR)图像的过程^[1-2]。将此技术引入到MRI之中, 在实现MRI

收稿日期: 2013-05-07

基金项目: 福建省高校产学研合作科技重大项目(2011H6025)

作者简介: 刘振圻(1985-), 男, 河北衡水人, 厦门大学电子科学系硕士研究生, 研究方向为图像处理; 包立君(1980-), 女, 河北张家口人, 厦门大学电子科学系助理教授, 研究方向为图像处理。

超分辨率重建的同时进一步完善其去噪技术,以提高图像的空间分辨率和信噪比。

目前超分辨率重建的方法主要分为三类:插值法;统计方法和基于学习的方法。其中插值法是最简单的,例如双线性插值法,双三值插值法等,它们的优点是直观简单并且计算速度很快,但是缺点也十分明显,会产生十分明显的伪影和模糊现象。统计方法利用图像的先验概率密度信息,寻求优化的超分辨率重建,但是它无法处理比较复杂的情况并且其计算复杂度较高,应用起来受到局限^[3-4]。目前比较流行的是基于学习的SR方法^[5-6],基本原理是从HR训练样本中获取先验知识,从而对输入的LR图像进行有效的信息补充,指导图像的高频信息重建。Freeman等人提出通过求解马尔科夫随机场获得LR和HR图像之间的先验知识^[7],Yang等在此基础上加以改进,提出了一种基于稀疏表达的图像超分辨率重建技术(ISR),获得了良好的重建效果^[8-9]。

由于之前的超分辨率技术主要集中在对无噪图像处理上,取得了十分显著的重建效果,而MRI过程当中磁共振图像往往含有一定的噪声,所以实现SR的同时有效地抑制噪声十分必要。因此,提出了一种基于自适应对偶字典的超分辨率去噪算法(IDSR),首先构造高分辨率和低分辨率字典,两者组合为对偶字典,利用对偶字典重建出图像中细节纹理信息,同时在超分辨率重建过程中引入去噪模型^[10],将图像的噪声标准差作为去噪的控制因子对噪声进行抑制,最终得到滤除噪声后的高分辨率磁共振图像,实现了超分辨率重建和去噪技术的有机结合。超分辨率重建过程中字典的构建由两部分组成,一方面利用聚类算法和主成分分析(PCA)提取图像块集合中的有效成分,构造出主特征子字典;另一方面,采用K-SVD方法对高、低分辨率图像块集合进行联合训练,得到自学习子字典,这样提高了对偶字典的自适应性同时缩短了字典训练的时间。采用自然图像及柠檬磁共振图像对算法进行验证。结果表明,文中的方法拥有良好的性能,重建结果具有更高的PSNR和MSSIM。

1 磁共振图像的超分辨率重建

1.1 超分辨率重建模型

信号 $x \in R^m$ 的稀疏表达可以描述为一个最优化

问题

$$\alpha^{\text{opt}} = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \quad s.t. \quad x = D\alpha \quad (1)$$

式中, $\alpha \in R^n$ 是稀疏表达系数, $\min \|\alpha\|_0$ 为稀疏约束, $D \in R^{m \times n}$ 为字典。假设HR图像块可以由HR字典稀疏线性表达,而稀疏系数能由相应的输入LR图像块获得,即理想的HR图像块 $x = D_h \alpha_h$, 输入的LR图像块 $y = D_l \alpha_l$, 其中 D_h 为由HR图像块集合训练得到的高分辨率字典, D_l 是由LR图像块集合训练得到的低分辨率字典。如果选用合适的字典 D_h 和 D_l , 则 $\alpha_h \approx \alpha_l$; 若定义 $\alpha_h = \alpha_l = \alpha$, 则有 $x = D_h \alpha$ 。对于输入的低分辨率图像块 y , 求得稀疏表达系数 α

$$\min \|\alpha\|_0 \quad s.t. \quad \|FD_l \alpha - Fy\|_2^2 \leq \epsilon \quad (2)$$

为了避免重建出的相邻图像块之间出现边界效应,对图像分块化处理时使相邻块之间具有一定的重叠。式中, F 是用于提取图像块特征的算子,选用四个一维滤波器在四个方向上提取图像块的梯度信息,它们分别是 $f_1 = [-1, 0, 1]$, $f_2 = f_1^T$, $f_3 = [1, 0, -2, 0, 1]$ 和 $f_4 = f_3^T$ 。式(2)可进一步转化为求解

$$\min \|\alpha\|_0 \quad s.t. \quad \begin{cases} \|FD_l \alpha - Fy\|_2^2 \leq \epsilon_1 \\ \|\mathbf{P}D_h \alpha - \omega\|_2^2 \leq \epsilon_2 \end{cases} \quad (3)$$

其中,矩阵 \mathbf{P} 用于提取当前图像块与已经重建部分的重叠区域, ω 是重叠区域的已重建像素。式(3)可改写为

$$\min_{\alpha} \|\tilde{D}\alpha - \tilde{y}\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_0 \quad (4)$$

式中, $\tilde{D} = [FD_l \mathbf{P}D_h]^T$; $\tilde{y} = [Fy \ \omega]^T$, 定义 λ 为惩罚系数。通过上式求解得到最优化的稀疏系数,结合高分辨率字典 D_h , 最终可重建出高分辨率图像块。从上述分析可知,超分辨率重建方法的关键是建立合适的字典 D_h 和 D_l , 以及设计精确快速的稀疏重建算法。下面将从这两个方面论述IDSR方法。

1.2 自适应对偶字典的构造

字典 D 的构建是一个数学优化问题,即

$$D = \arg \min_{D, \alpha} \|\alpha\|_0 + \lambda \|x - D\alpha\|_2^2 \quad (5)$$

基于稀疏约束的超分辨率重建方法要训练得到字典 D_h 和 D_l , 则式(5)演变为

$$\min_{D_h, D_l, Z} \|X_c - D_c Z\|_2^2 + \lambda \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M} \right) \|Z\|_0 \quad (6)$$

$$\text{其中, } X_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} X^h \\ \frac{1}{\sqrt{M}} Y^l \end{bmatrix}, D_c = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} D_h \\ \frac{1}{\sqrt{M}} D_l \end{bmatrix}, X^h \text{ 为高分辨率图}$$

像块集合, Y^l 相应为低分辨率图像块集合, N 和 M 分别是高分辨率图像块向量和低分辨率图像块向量的维度, Z 是 X_c 通过 D_c 求得的稀疏表达系数集合。式(6)中两个优化变量相乘, 无法同时进行优化, 近年来这个问题被大量研究^[11-12]。其中 Honglak Lee 在文献[11]中做了详细阐述, 当两个优化变量其中一个固定, 优化求解另外一个时式(6)是凸优化问题, 即先固定 D 优化 Z , 再固定好 Z 优化 D , 因此字典训练变成了交替优化 D 和 Z 的最优化问题。但是这种方法的训练时间过长, 并且收敛性较差。

针对这个问题, Michael Elad 提出了一种基于奇异值分解的字典训练方法 K-SVD, 在训练过程中迭代多次, 每次计算一次 SVD 分解。K-SVD 方法训练字典分为稀疏编码和字典更新两部分, 稀疏编码时固定字典 D , 用匹配追踪 (MP) 或者正交匹配追踪 (OMP) 等算法迭代求解信号在字典上的稀疏系数, 然后根据求得的稀疏系数再用 SVD 分解更新字典中的每一列 (即字典的每一个原子), 如此反复得到最优化的字典。相比文献[11]中的字典训练方法, K-SVD 的收敛性、抗噪性十分良好, 其训练时间也大大缩短, 这样就为训练维度比较大的字典提供了条件。当字典的冗余度很大时, 其中有些原子对图像重建是没有意义的, 即自适应性较差。针对这个问题, 利用 K-SVD 及聚类算法^[13] 训练得到自适应较强的对偶字典。

自适应对偶字典分为主特征字典和自学习字典两部分, 其中主特征字典利用聚类算法和 PCA 来构造, 聚类—PCA 算法提取的是图像中显著特征, 能够很好地控制信息维度的同时具有抗噪性, 因此主特征字典对重建十分有效并且容易计算得到。文中采用多幅高分辨率同类图像作为训练字典的样本数据, 对其进行分块化处理, 获得 10^5 个 8×8 的图像块集合 X_c , 采用聚类算法对其分为 K 类, 进而对每一类利用 PCA 提取主要成分降维得到 $\Phi^h = \{\Phi_1^h, \Phi_2^h, \dots, \Phi_k^h\}$, 其中 Φ_i^h 即主特征字典中的原子, 反映了图像块集合中的某一类主要特征信息。利用特征算子 F 对高分辨率图像提取梯度信息, 同理对其分块化聚类处理, 相应的得到 Φ^l 。但是, 字典中的原子应该能很好地反应图像中的细节纹理信

息, 此时 K-SVD 显示了其优势, 利用随机赋值的方式初始字典, 进而迭代优化得到自学习字典, 这样主特征字典和自学习字典形成互补, 构成的对偶字典更好地包含了原图像的各级特征信息, 并且自适应性良好。自适应对偶字典的构造算法如下:

(1) 采得图像块集合 X_c 以及聚类—PCA 得到的 Φ^h 和 Φ^l 。

(2) 随机初始字典 D_c , 同时对 D_c 的原子进行归一化。

(3) 固定 D_c , 利用 OMP 算法求得 X_c 的稀疏表达系数 Z , 即

$$Z = \arg \min_Z \|X_c - D_c Z\|_2 + \lambda \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{M} \right) \|Z\|_0$$

(4) 固定 Z , 训练 D_c 中的每一个原子 $k=1, 2, \dots, K$ 。

① 在求解稀疏系数过程中, 确定用到 D_c 中第 k 个原子 d_k 的图像块集合的索引 $\omega_k = \{i | 1 \leq i \leq n, z_T^k(i) \neq 0\}$, 定义 $z_R^k = z_T^k \times |\omega_k|$;

② 得到 $E_k = X_c - \sum_{j \neq k} d_j z_T^j$, E_k 是去掉原子 d_k 的成分在所有样本中造成的误差, 通过 ω_k 的约束, 得到相应的 E_k , 定义为 E_k^R ;

③ 应用 SVD 分解 $E_k^R = U \Delta V^T$, 选择 U 的第一列作为 d_k 的原子 \hat{d}_k , 同时用 V 的第一列和 $\Delta(1, 1)$ 的乘积更新 z_R^k 。

(5) 重复步骤(3)和步骤(4)直到收敛, 收敛的条件是重构信号和原信号之间的误差达到最小。得到优化后的 \tilde{D}_c 。

(6) \tilde{D}_c 、 Φ^h 及 Φ^l 构成最终的对偶字典 \tilde{D}_h 和 \tilde{D}_l 。

聚类—PCA 算法构造的原子反映的是图像中显著的主要特征, K-SVD 构造的原子反映的多是细节的特征, 这样将两部分字典相结合得到对偶字典 \tilde{D}_h 和 \tilde{D}_l , 从而提高了字典的稀疏度和自适应性。

1.3 含噪磁共振图像的超分辨率重建

磁共振图像在成像过程中都会受到噪声污染, 使得图像边缘模糊, 信息失真, 给图像分析带来困难。因此, 在超分辨率重建中引入去噪功能变得十分必要^[14], 假设含噪图像 $Y \in R^{N \times N}$ 可表示为

$$Y = X + R \quad (7)$$

式中, X 为真实图像, R 为噪声, 式(7)的稀疏表达

为

$$Y = D\alpha^{\text{opt}} + \xi + R \quad (8)$$

含噪图像稀疏表达的残余分量由逼近误差和噪声组成,记为 $\eta = \xi + R$ 。采用 l_0 范数度量表达系数的稀疏性,图像的稀疏表达去噪模型变为

$$\alpha^{\text{opt}} = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \quad s.t. \quad \|Y - D\alpha\|_2^2 = \|\eta\|_2^2 \quad (9)$$

可得真实图像的估计值 $\hat{X} = D\alpha^{\text{opt}}$, 真实图像的逼近误差 $\xi = X - \hat{X}$, 理想状况下 $\xi = 0$, 但是实际中 $0 < \|\xi\|_2 < \|R\|_2$ 。根据去噪需要, 预先估计噪声的标准差 σ , 并将其作为去噪的控制因子, 由此式(9)变为

$$\alpha^{\text{opt}} = \arg \min_{\alpha} \|\alpha\|_0 \quad s.t. \quad \|Y - D\alpha\|_2^2 = C \cdot N^2 \cdot \sigma^2 \quad (10)$$

式中, C 为噪声强度调节因子, 一般取 $C \approx 1$, N 为图像块大小。式(10)表明, 满足稀疏去噪的残余分量等于噪声能量的条件, 并且去噪结果最稀疏的解即为稀疏去噪的最优解。对于输入的低分辨率含噪图像块 y , 通过低分辨率字典 \tilde{D}_l 求得最优化的稀疏表达系数, 即计算

$$\alpha^{\text{opt}} = \arg \min_{\alpha} \|y - \tilde{D}_l \alpha\|_2^2 + \lambda \|\alpha\|_0 \quad (11)$$

然后 α^{opt} 和 \tilde{D}_h 相乘求得高分辨率图像块 $x = \tilde{D}_h \alpha^{\text{opt}}$, 从而将图像中的噪声有效地去除, 同时利用自适应对偶字典成功地重建出图像中的细节纹理信息。

2 仿真实验及结果分析

本节采用自然图像和磁共振图像对超分辨率去噪重建算法进行验证, 并与插值法、ISR方法进行对比。采用峰值信噪比($PSNR$)和平均结构相似度($MSSIM$)作为评价参数对图像质量做定量评价。

2.1 参数设置

磁共振图像中所含噪声更接近于 Rice 分布, 所以对低分辨率图像加入 Rice 噪声以验证算法的超分辨率重建效果和去噪性能。磁共振柠檬图像由 Varian 7T 成像仪采集, 采样序列为自旋回波序列。HR 柠檬图像和 HR 自然图像分辨率为 256×256 , 对应的 LR 图像是对 HR 图像进行插值法降质得到的, 大小为 128×128 , 所加噪声标准差 $\sigma = 20$, 如图 1 所示。超分辨率放大倍数为 2, \tilde{D}_h 大小为 64×1024 , \tilde{D}_l 大小为 256×1024 , 图像的灰度范围为 $[0, 255]$ 。



图1 低分辨率自然图像及MR图像的含噪对比

图1 低分辨率自然图像及MR图像的含噪对比

对于惩罚系数 λ 的设置没有准确的计算公式, 由于图像和噪声水平的不同, 需要在图像稀疏性和噪声抑制方面做到平衡, 文中通过实验确定。图 2 是对低分辨率柠檬图像加入 $\sigma = 20$ 的噪声后, 选用不同的惩罚系数 $\{5, 7, 8, 9\}$ 得到的超分辨率重建结果的纹理特征。由图 2 可见, 随着惩罚系数的不断增大, 噪声被有效地滤除, 但与此同时, 图像的高频细节信息也随之丢失, 在此种强度噪声下, 通过实验证明惩罚系数选择 8 时, 超分辨率重建结果最佳。

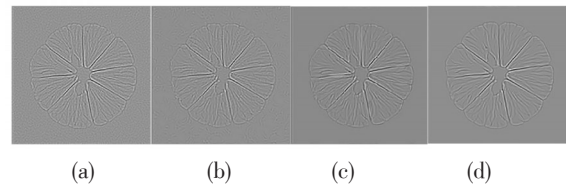


图2 选用不同惩罚系数 $\{5, 7, 8, 9\}$ 所得到的超分辨率重建结果的纹理特征

2.2 自然图像重建

图 3 是对自然图像加入 $\sigma = 20$ 的噪声后进行超分辨率重建的结果, 惩罚系数为 9。由局部放大图可以看出, 插值法出现了伪影现象并且无法去除噪声, 图像整体比较模糊。ISR 的方法超分辨率效果虽然尚可, 但是它将噪声作为图像特征进行了重建反而降低了图像的质量。而利用 IDSR 方法得到的结果中, 头像的鼻子和眼睛部分细节得以保留, 同时噪声被很好地抑制, IDSR 方法在实现超分辨率的同时滤除了大部分的噪声, 和原图最为接近, 显示了良好的性能。如表 1 所示, IDSR 方法的 $PSNR$ 到达 28.5 dB, $MSSIM$ 到达 0.83, 均高于对比方法。

为了检验文中方法对不同程度噪声污染的有效性, 对含有不同强度噪声的低分辨率自然图像进行超分辨率重建。如图 6 所示, 当 $\sigma = \{10, 15, 20, 25\}$ 时, 随着噪声强度的增加, 图像质量显著下降。而采用文中方法进行超分辨率去噪重建后, 图像的对比度和信噪比得到明显改善, 并且不同噪声强度下, 重建结

果相近。如表2所示, $\sigma=10$ 时,重建结果的 $PSNR=28.8$, $MSSIM=0.84$; 而当 $\sigma=25$ 时,重建结果的 $PSNR=28.3$, $MSSIM=0.82$ 。另外,随着噪声强度不断增大,对应的惩罚系数也要相应增加,才能得到最佳的超分辨率重建效果。



(a) 差值法重建 (b) ISR (c) IDSR (d)原始HR图像

图3 自然图像的超分辨率重建结果.

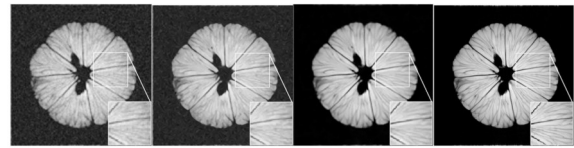


图4 IDSR对不同强度噪声的图像进行超分辨率重建的结果。上面:不同噪声强度的自然图像(σ 依次为10,15,20,25);下面:超分辨率重建结果(惩罚系数依次为4,6,9,11)

2.3 磁共振图像重建

对低分辨率的磁共振图像加入 $\sigma=20$ 的噪声进行超分辨率重建,惩罚系数选择8,实验结果如图4所示。由局部放大图看出,相比ISR和插值法,利用IDSR得到的柠檬图像中纹理和细节最为清晰,噪声抑制的效果也最好,在超分辨率和去噪效果上均达到最佳。分别从主观及客观两个方面进行重建质量的比较,图像的客观评价指标 $PSNR$ 及 $MSSIM$ 如表1所示,从表1中看出, IDSR均超过了其他的方法,针对磁共振柠檬图像,指标改善幅度较明显,相对ISR的 $PSNR$ 提高5.1 dB, $MSSIM$ 提高0.35。

为了更好地分析算法重建出的图像和原图像的近似度,取柠檬图像中各个结果的第128列,比较几种算法和原图像在此列上的灰度值,如图5所示。总体来说IDSR方法重建出来的图像的灰度值和原图像具有最大的近似性,在标注的红框内最为明显。



(a) 插值法重建 (b) ISR (c) IDSR (d)原始HR图像

图5 柠檬图像的超分辨率重建结果

表1 当 $\sigma=20$ 时不同方法超分辨率重建图像的 $PSNR$ 和 $MSSIM$ 指标

算法	$PSNR/dB$			$MSSIM$		
	自然图像	柠檬图像	大脑图像	自然图像	柠檬图像	大脑图像
插值法	26.9	21.1	22.0	0.72	0.40	0.46
ISR	27.1	22.1	21.9	0.75	0.51	0.46
IDSR	28.5	27.2	22.8	0.83	0.86	0.80

在不同强度噪声下,即当 $\sigma=\{10,15,20,25\}$ 时,含噪的磁共振图像的超分辨率重建结果如图6和图7

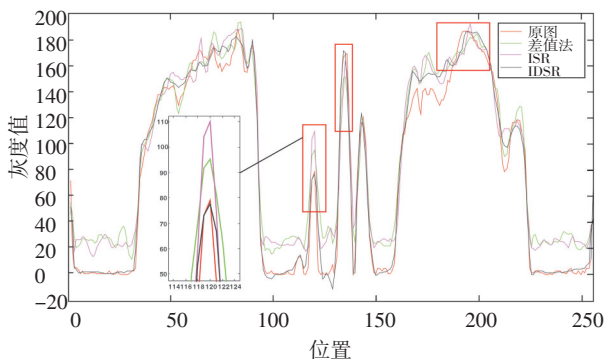


图6 柠檬图像几种重建算法的灰度近似对比图.

所示。随着噪声强度的增加,图像变得模糊,微小的结构信息逐渐被噪声淹没。采用文中方法进行重建

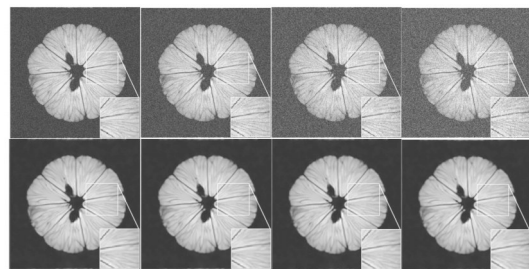


图7 IDSR对不同强度噪声的柠檬磁共振图像进行超分辨率重建的结果。上面:含噪图像(σ 依次为10,15,20,25);下面:超分辨率重建结果(惩罚系数依次为3,6,8,10)

表2 不同噪声强度下IDSR的PSNR和MSSIM指标

噪声强度 σ	PSNR/dB			MSSIM		
	自然图像	柠檬图像	大脑图像	自然图像	柠檬图像	大脑图像
10	28.8	28.0	23.0	0.84	0.87	0.80
15	28.7	27.6	22.5	0.83	0.86	0.81
20	28.5	27.2	22.8	0.83	0.86	0.80
25	28.3	26.5	22.4	0.82	0.84	0.79

后,图像的分辨率和信噪比明显提高。如表2所示,柠檬图像 $\sigma=10$ 时重建结果的 $PSNR=28.0$, $MSSIM=0.87$;而当 $\sigma=25$ 时,重建结果的 $PSNR=26.5$, $MSSIM=0.84$ 。同理,惩罚系数随着噪声强度的增加而不断增大。图8所示为IDSR对不同强度噪声的脑部磁共振图像进行超分辨率重建的结果。

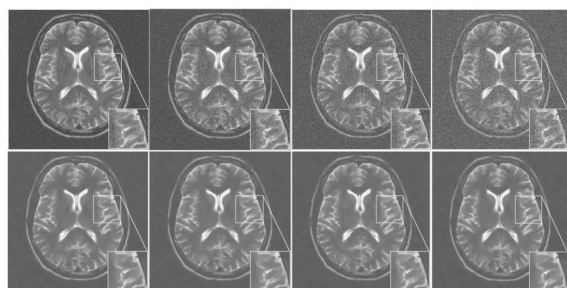


图8 IDSR对不同强度噪声的脑部磁共振图像进行超分辨率重建的结果。上面:含噪图像(σ 依次为10,15,20,25)下面:超分辨率重建结果(惩罚系数依次为4.6,8,9)

3 结论

针对含噪的低分辨率磁共振图像提出了一种基于自适应对偶字典的超分辨率重建算法,在实现图像超分辨率重建的同时又能有效抑制噪声。其关键技术在于自适应对偶字典的训练和稀疏重建算法的设计,由于自适应对偶字典具有良好的提取图像特征的性能,从而保证了低分辨率磁共振图像细节和纹理的重建。实验结果表明,与其他超分辨率重建算法相比文中的方法更加有效。

参考文献

[1] S Baker, T Kanade. Super-resolution: reconstruction or recognition[J]. Workshop on Nonlinear Signal and Image

Processing, 2001.

- [2] R Tsai, T S Huang. Multiframe image restoration and registration[J]. Advances in Computer Vision and Image Processing, 1984, 1: 317-339.
- [3] R C Hardie. Joint MAP registration and high-resolution image estimation using a sequence of undersampled images [J]. Image Processing, 1997, 6: 1621-1633.
- [4] S Geman, D Geman. Stochastic relaxation, gibbs distributions and the bayesian restoration of images[J]. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 2: 721-741.
- [5] F M Candocia, J C Principe. Super-resolution of images based on local correlations[J]. Neural Networks, 1999, 10: 372-380.
- [6] J S Yedidia. Generalized belief propagation[J]. Advances in neural information processing systems, 2001, 3: 689-695.
- [7] W T Freeman. Example-based super-resolution[J]. Computer Graphics and Applications, 2002, 22: 56-65.
- [8] J Yang. Image super-resolution via sparse representation [J]. Image Processing, 2010, 19: 2861-2873.
- [9] J Yang. Image super-resolution as sparse representation of raw image patches[J]. Computer Vision and Pattern Recognition, 2008, 2: 1-8.
- [10] M Elad, M Aharon. Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries[J]. Image Processing, 2006, 15: 3736-3745.
- [11] H Lee. Efficient sparse coding algorithms[J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2007, 19: 801.
- [12] M Aharon. Design of dictionaries for sparse representation [J]. Proceedings of SPARS, 2005, 5: 9-12.
- [13] W Dong. Sparsity-based image denoising via dictionary learning and structural clustering[J]. Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2011: 457-464.
- [14] 包立君. 基于稀疏表达的人体心脏磁共振扩散张量图像的去噪研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2010.