

·光学设计·

Zernike 多项式波面拟合精度研究

冯 婕^{1,2}, 白 瑜¹, 邢廷文¹

(1. 中国科学院光电技术研究所, 四川 成都 610209; 2. 中国科学院研究生院, 北京 100039)

摘 要: 光学表面检测的绝大多数情况中, 被测光学表面或光学系统的出射波面总是趋于光滑且连续的, 这样的波面函数一定可以表示成一个完备的基底函数的线性组合。因此常用 Zernike 多项式作为基底函数对测量得到的离散数据进行拟合, 把实际波面或面形表示为 Zernike 多项式各项的线性组合。文中研究了 Zernike 多项式阶数对拟合精度的影响, 以及采样点数对拟合精度的影响。得出 Zernike 多项式拟合波面并非阶数越高越好, 阶数过高会使拟合结果出现病态。因此拟合波面要选择合适阶数的 Zernike 多项式。当多项式阶数选定时, 采样点数多有利于提高拟合精度, 但采样点的多少并不是提高拟合精度的先决条件。

关键词: Zernike 多项式; 波面拟合; 拟合精度; 采样点

中图分类号: O436.1

献标识码: A

文章编号: 1673-1255(2011)02-0031-04

Fitting Accuracy of Wavefront Using Zernike Polynomials

FENG Jie^{1,2}, BAI Yu¹, XING Ting-wen¹

(1. Institute of Optics and Electronics, Chinese Academy of Sciences, Chengdu 610209, China; 2. Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: The vast majority of cases in optical surface testing, the output surface of measured optical surface or optical system always tends to be smooth and continuous, such wavefront functions must can be expressed as a complete the linear combination of the basement function. Zernike polynomials are often used as basic set of polynomials for the fitting of measured discrete data. The wavefront and curved surface are interpreted in the form of linear combinations of Zernike polynomial. The effects of fitting precision owing to Zernike polynomials order and sampling points are studied. The result is obtained that higher order Zernike polynomial fitting wavefront is not better, if order more than a certain range, fitting results will appear sick. Therefore, the wavefront fitting should choose appropriate order of Zernike polynomial. When the polynomial order is selected, more sampling points will help improve fitting accuracy. However, the number of sampling points is not a prerequisite for improving the fitting precision.

Key words: Zernike polynomials; wavefront fitting; fitting accuracy; sampling points

Zernike 多项式^[1]与初级像差有一定的对应关系, 并且与光学设计中惯用的 Seidel 像差函数很容易建立起联系, 在实际光学试验中, 数据波前往往由多种波像差混合而成, 通过 Zernike 多项式拟合就可以轻而易举地得出各种波像差的具体数据量, 有利于进一步的数据处理, 为有针对性地处理各像差

系数、优化系统性能提供了有效的方法。

文中用 Zernike 多项式拟合高次非球面, 研究了 Zernike 多项式在拟合干涉波面时阶次的选择对拟合精度的影响, 以及正确选取拟合波面所需的 Zernike 多项式的阶次后, 被拟合波面数据采样点的多少对拟合精度的影响和采样点数的高低是否是

收稿日期: 2011-02-18

作者简介: 冯婕(1985-), 女, 陕西西安人, 硕士研究生, 主要从事高精度非球面检测技术研究; 导师简介: 邢廷文(1965-), 男, 湖北阳新人, 研究员, 博士生导师, 主要从事应用光学方面的研究工作。

提高拟合精度的先决条件。

1 波面拟合算法

波面拟合是选择一个线性无关的基底函数系的组合 $W(x, y)$ 来拟合离散波差函数 $w(x_i, y_i)$,由连续的 $W(x, y)$ 函数表征被测系统的面形^[2]。

将被测波面用 n 项 Zernike 多项式表示为

$$w(x, y) = q_1 Z_1(x, y) + q_2 Z_2(x, y) + \dots + q_n Z_n(x, y) = \mathbf{q}^T \mathbf{Z} \quad (1)$$

其中, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ 为 Zernike 多项式系数; $\mathbf{Z} = [Z_1(x, y), Z_2(x, y), \dots, Z_n(x, y)]$ 为 n 项 Zernike 多项式。

现有 m 个离散数据点 $w_i(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, m$ 。令 $a_{ij} = Z_j(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ 。代入式(1)得到矛盾方程组($m > n$)

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n = w_1 \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n = w_2 \\ \dots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \dots + a_{mn}q_n = w_m \end{cases} \quad (2)$$

简记作

$$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{W} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 为 $m \times n$ 矩阵; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$; $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T$ 。

矛盾方程组(2)一般不存在通常意义下的解,要用最小二乘准则来求解参数 q_1, q_2, \dots, q_n ,从而得到法方程组

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{A}^T \mathbf{W} \quad (4)$$

求解此方程组(4)即可得到 q_1, q_2, \dots, q_n 。由于构造出的法方程组往往是严重病态的,会造成计算错误,导致求解失败。因此文中采用Householder变换^[3-5]把系数正交三角化,直接求解拟合系数。具体过程是:首先用数学函数 $f(x, y)$ 表示待测非球面,对其进行采样,得到离散数据点,然后利用Householder变换法拟合该非球面,得到用 Zernike 多项式表达的波面函数 $g(x, y)$,令 $W(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$,根据 $W(x, y)$ 的峰谷值 PV 和均方根值 RMS 来判断 Zernike 多项式对非球面波前误差的拟合精度。

2 Zernike 多项式阶数对拟合精度的影响

Zernike 多项式拟合高次非球面的面形方程为

$$Z = \frac{cy^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)c^2y^2}} + B_4y^4 + B_6y^6 \quad (5)$$

其中, $c = -1/1\ 732.323$, $k = -0.445\ 957$, $B_4 = 5.945\ 535\ 9E-12$, $B_6 = 2.771\ 781\ 7E-18$ 。

用 Matlab 绘出该非球面的面形图,如图 1 所示。

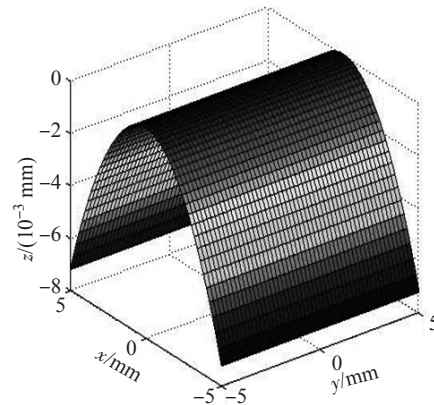


图1 非球面原始图

Zernike 多项式的基函数^[3-5]都代表一种像差。对于一般非球面检测中遇到的实际波面,用 36 项 Zernike 多项式已经完全足够。Zernike 多项式的每一项基函数都代表一种具体像差,第一项表示平移,第二、三项表示倾斜,第四项为离焦,第五、六项为像散,第七、八项为彗差,再后面的项表示的是一些高级像差。数据波前往往由多种波像差混合而成,这样通过 Zernike 多项式拟合,就可以容易得出各种波像差的具体数据量,有利于进一步数据处理。

用 Zernike 多项式对该非球面进行拟合,结果发现取前 24 项拟合时会出现病态,因此在研究 Zernike 多项式阶次的选择对拟合精度的影响时,项数最多取到 23 项。表 1 为 Zernike 多项式阶次对该拟合非球面的 RMS 值和 PV 值的影响。

将该非球面的各项参数,输入光学设计软件 code v 中,根据检测非球面的具体光路,可以得到其 RMS 值为 $6.328e-09$, PV 值为 $31.64e-09$ ^[6]。Zernike 多项式是一个函数系,从原则上讲,选择尽可能高阶的 Zernike 多项式来拟合干涉波面,将可以使光学干涉波面的拟合精度尽可能地提高。然而,当把拟合干涉波面的 Zernike 多项式的阶次提高到一定程

表1 Zernike多项式阶次对拟合精度的影响

Zernike多项式拟合项数	8	9	10	11	12	13
RMS值	1.297 8e-06	1.297 8e-06	1.297 8e-06	1.210 6e-06	7.895 9e-07	7.895 9e-07
PV值	4.102 4e-06	4.102 4e-06	4.102 4e-06	4.8600e-06	3.624 4e-06	3.624 4e-06
Zernike多项式拟合项数	14	15	16	17	18	19
RMS值	1.348 1e-09	1.348 1e-09	1.348 1e-09	1.348 1e-09	1.348 1e-09	1.348 1e-09
PV值	3.697 8e-09	3.697 8e-09	3.697 8e-09	3.697 8e-09	3.697 8e-09	3.697 8e-09
Zernike多项式拟合项数	20	21	22	23	24	
RMS值	1.348 1e-09	1.348 1e-09	1.326 0e-09	1.326 0e-09	5.647 8e-05	(出现病态)
PV值	3.697 8e-09	3.697 8e-09	4.404 1e-09	4.404 1e-09	2.744 7e-04	(出现病态)

度的时候,波面拟合函数的一致性遭到严重破坏,其拟合精度反而大大降低,出现病态。由表1可以看出,随着Zernike多项式阶次的增加,拟合精度逐渐提高。但当增加到第24项时,结果出现严重病态,拟合精度大大降低,表1中所示前14项拟合,一直到前19项拟合,其拟合波面的RMS值和PV值相同,与用光学设计软件设计出的检测非球面系统得到的波面RMS值和PV值数量级相同,结果相近,达到较高的拟合精度。

因此研究发现,追求高阶次的Zernike多项式拟合,结果往往不是最优的,要综合选择Zernike多项式的阶次,使其拟合结果达到较高的拟合精度。

3 采样点数的高低对拟合结果的影响

通过表1 Zernike多项式阶次变化对拟合精度的影响结论,本文选取固定前14项Zernike多项式来拟合该非球面,基于此来研究采样点数的高低对最终拟合结果的影响^[7]。表2为采样点数的高低对该拟合非球面的RMS值和PV值的影响。

表2 采样点数的高低对拟合结果的影响

采样点数	169	225	361
RMS值	1.190 5e-09	1.246 2e-09	1.287 5e-09
PV值	4.240 3e-09	4.144 6e-09	3.868 9e-09
采样点数	441	676	
RMS值	1.348 1e-09	1.361 7e-09	
PV值	3.697 8e-09	4.131 6e-09	

从表2可以看出,在选用合适的Zernike多项式阶次拟合非球面的基础上,随着采样点数的增加,拟合精度也逐步提高。这说明在正确选取拟合所需的Zernike多项式的阶后,应尽可能选择较高的采样点数,这样有利于拟合精度的提高。

下面选取固定前8项Zernike多项式来拟合该

非球面,基于此来讨论采样点数的高低是不是提高拟合精度的先决条件。表3为采样点数的高低对该拟合非球面的RMS值和PV值的影响。

由表3看出,在选取固定前8项Zernike多项式来拟合该非球面的前提下,拟合精度本身就较低,在此基础上增加采样点数,对提高拟合精度并没有决定性的影响,拟合非球面的RMS值和PV值均和非球面检测系统求出的RMS值和PV值相差3个数量级。因此被拟合干涉波面数据采样点的多少不是提高拟合精度的先决条件。即便采样点较少(但是不能太少),只要Zernike多项式的阶数选择合适,也能保证Zernike多项式对干涉波面有一定的拟合精度,采样点数多,也不一定能保证其精度一定高。

表3 采样点数的高低对拟合结果的影响

采样点数	169	225	361
RMS值	1.213 5e-06	1.263 1e-06	1.265 5e-06
PV值	4.431 2e-06	4.234 7e-06	4.225 0e-06
采样点数	441	676	
RMS值	1.297 8e-06	1.264 2e-06	
PV值	4.102 4e-06	4.222 5e-06	

4 结论

通过利用Zernike多项式拟合高次非球面,研究发现追求高阶次的Zernike多项式拟合,结果往往不是最优的,而且把Zernike多项式的项数提高到一定程度时,拟合精度大大降低,出现病态。因此要根据实际波面选择合适阶数的Zernike多项式,当多项式阶数选定时,采样点数多有利于Zernike多项式对干涉波面拟合精度的提高。被拟合干涉波面数据采样点的多少不是提高拟合精度的先决条件,即便采样点数较少(但是不能太少),只要Zernike多项式的阶数选择合适,也能保证Zernike多项式对干

涉波面有一定的拟合精度,采样点数多,也不一定能保证其精度一定高。

孙学真等人研究过测量设备精度和抽样点数目对拟合精度的影响,得出通过增加抽样点可以对由较低精度设备测得的数据进行较高精度拟合的结论。文中在研究 Zernike 多项式阶次对波面拟合精度的基础上,深入讨论了抽样点数目对拟合精度的影响,得出抽样点并不是提高精度的先决条件。对采用 Zernike 多项式来拟合干涉波面所得到的干涉波面函数与实际的光学干涉波面的接近程度有一定的促进作用。通过提高 Zernike 多项式拟合波面的精度,对实际高精度的检测波面面形有一定的指导意义,有利于更快更有效地分析被测波面。

参考文献

- [1] Daniel Malacara. Optical shop testing[M]. 3rd ed. Cana-

da:John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2007:538.

- [2] John Loomis. Fringe User's Manual[S]. Tucson: Version2, Optical Science Center of the University of Arizona, 1976.
- [3] 鄢静舟,孙厚环,高志强,等.用 Zernike 多项式进行波面拟合的一种新算法[J]. 数学物理学报, 2000, 20(3): 378-385.
- [4] 鄢静舟,雷凡,周必方,等.用 Zernike 多项式进行波面拟合的几种算法[J]. 光学精密工程, 1999, 7(5): 119-128.
- [5] 魏学业,俞信.一种基于 Zernike 多项式的波前探测和重构方法[J]. 光学学报, 1994, 14(7): 719-723.
- [6] 龙夫年,郭秀梅,刘剑峰.利用 ZYGO 干涉仪进行非球面检测技术研究[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2005, 37(2): 232-233.
- [7] 孙学真,苏显喻,荆海龙.抽样点对基于 Zernike 多项式曲面拟合精度的影响[J]. 光学仪器, 2008, 30(4): 7-10.

(上接第20页)

3 结论

通过总结激光大气传输仿真系统所需的基本理论模型,完善大气环境参数和激光源参数数据库。对激光通过复杂大气环境,如尘埃、烟、雾、雨、雪、风等产生的线性与非线性效应进行了探讨,对光斑在路径上的变化进行了模拟。

计算过程采用对大气结构分层处理、依次进行叠代的手段。在二维和三维空间上给出激光在各种大气环境下传输演变过程,并将各次结果保存到数据库。

从结果上看,该激光大气传输仿真系统提供了友好的图形界面,可以方便用户对相关数据进行录入与维护,同时可灵活设置仿真模型,并对激光源参数和大气环境参数进行选择,最后得到激光路径仿真和传输截面上光斑图形演示。经过测试,该系统在稳定性、功能性及其他各项性能上,都基本达到了较高水平。

参考文献

- [1] 朱文越,黄印博,钱仙妹,等.激光大气传输模拟程序 CLAP 及其应用[J]. 大气与环境光学学报, 2007, 2(6): 451-458.
- [2] 董海燕,李伟,戴明,等.大功率光纤激光大气传输特性的研究[J]. 光学技术, 2007, 33(6): 830-832.
- [3] 宋正方.应用大气光学基础[M].北京:气象出版社, 1990.
- [4] Charles S, Johnson Jr, Don A. Gabriel laser light scattering[M].New York: Dover Publications, Inc, 1981.
- [5] 李双刚,聂劲松,孙晓泉.大气折射和色散对激光传输的影响[J]. 量子电子学报, 2004, 21(5): 679-682.
- [6] 张逸新,朱拓,陶纯堪.激光传输湍流大气的折射率起伏双尺度模型[J]. 光电子·激光, 2004, 15(10): 1247-1249.
- [7] C M Harding, R A Johnston, R G Lane. Fast Simulation of a Kolmogorov Phase Screen[J]. Appl. Opt., 1999, 38: 2161-2170.
- [8] 刘延武,何友金,任建存.海上激光低仰角大气传输研究[J]. 红外与激光工程, 2004, 33(3): 235-238.

欢迎投稿 nloe@vip.163.com