

·信号与信息处理·

分数阶 Fourier 域非均匀采样 LFM 信号的检测概率

邹世杰¹, 刘 锋^{1,2}, 徐会法¹, 陶 然²

(1. 海军航空工程学院, 山东 烟台 264001; 2. 北京理工大学信息科学技术学院, 北京 100081)

摘要:为了减少分数阶 Fourier 域线性调频(LFM)信号处理的计算量,满足实时性要求,提出了一种新的非均匀采样方法.与传统的非均匀采样方法相比,该方法既解决了整个采样时段内由于过采样造成的数据冗余性,也消除了信号时变特征造成的局部冗余性.最后,应用该方法得到了非均匀采样 LFM 信号在分数阶 Fourier 变换域的频谱表达式,并对不同信噪比(SNR)条件下信号的检测概率进行了研究.结果表明,该方法具有较好的抗噪声能力.

关键词:非均匀采样;分数阶 Fourier 变换;LFM 信号;分数阶谱;检测概率

中图分类号:TN911.6

文献标识码:A

文章编号:1673-1255(2009)02-0080-05

Detection Probability of Nonuniformly Sampled LFM Signals in Fractional Fourier Domain

ZOU Shi-jei¹, LIU Feng^{1,2}, XU Hui-Fa¹, TAO Ran²

(1. Naval Aeronautical Engineering Institute, Yantai 264001, China;

2. Beijing University of Science And Technology, Institute of Information And Science, Beijing 100081, China)

Abstract:In order to reduce the computational quantity of the processing of the LFM signal in fractional Fourier domain and to meet the real-time request, a new nonuniformly sampling method is proposed. Compared to traditional nonuniformly sampling method, this method solves the problem of redundant data due to over-sampling in the whole sampling period, and eliminates the partial redundancy caused by signal time-variant feature. In the end, the spectrum expression of nonuniformly sampled LFM signal in the fractional Fourier domain is derived, and the detection probability of the signal in the case of different SNR is studied. The results show that the method proposed is able to resist noise.

Key words:nonuniformly sampling; fractional Fourier transform; LFM signal; fractional spectrum; detection probability

雷达信号的检测和识别是电子侦察系统中至关重要的部份,可以根据有无良好的分选能力来判断一个侦察系统的性能.在现代雷达体制中,LFM 信号已得到广泛的使用,而目前电子侦察系统对 LFM 信号的检测和识别只能在脉内进行分析.脉内分析是根据脉内的细微特征来分辨和识别复杂的调制信号,即通过时频分析将信号表征在时-频域来分析信号的细微特征^[1].利用分数阶 Fourier 域非均匀采

样理论对 LFM 信号进行频谱分析和检测研究.非均匀采样是相对于均匀采样的一种采样方法^[2].现实中,由于受到采样设备和被采样信号的限制,均匀采样是相对的,而非均匀采样是绝对的.文献[2]利用周期性非均匀采样方法给出了非均匀采样 LFM 信号在分数阶 Fourier 变换下的频谱表达式,分析了其在分数阶域的频谱的特点.提出了一种新的非均匀采样方法,利用此法得到了非均匀采样 LFM 信

收稿日期:2009-02-18

基金项目:国家杰出青年科学基金资助项目(60625104);国家部委预研资助项目(41001020201)

作者简介:邹世杰(1982-),男,辽宁营口人,助理工程师,硕士研究生,研究方向为分数阶 Fourier 域非均匀采样理论.

号在分数阶 Fourier 变换下的频谱表达式,并研究了在不同的信噪比条件下对非均匀采样 LFM 信号的检测概率.结论丰富了分数阶 Fourier 变换域的非均匀采样理论体系.

1 非均匀采样信号的分数阶 Fourier 变换

1.1 分数阶 Fourier 变换

近年来,一种新的时频分析工具——分数阶 Fourier 变换^[3]受到了信号处理界越来越多的关注.

$$k_\alpha(u, t) = \begin{cases} A_\alpha \exp\left(j \frac{t^2}{2} \cot\alpha - jut \csc\alpha + j \frac{u^2}{2} \cot\alpha\right), & \alpha \neq k\pi \\ \delta(t - u), & \\ \delta(t + u), & \end{cases}$$

有关分数阶 Fourier 变换的详细介绍,可以参考文献[4].

1.2 非均匀采样信号模型

设模拟信号 $x(t)$ 的分数阶 Fourier 变换 $X_\alpha(u)$ 是分数阶域中的带限信号^[5],即

$$X_\alpha(u) = 0, |u| > \Omega_\alpha \quad (3)$$

式中, Ω_α 是信号 $x(t)$ 在分数阶域的带宽.

非均匀采样模型如图 1 所示.

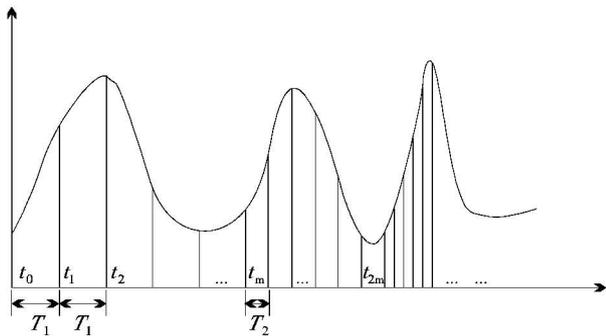


图 1 非均匀采样模型

在采样模型中,前 $(m + 1)$ 个点是均匀采样,采样周期是 T_1 ,采样频率 $f_1 = 1/T_1$,且使 $f_1 \geq 2 \max_{i=0,1,\dots,m} f(t_i)$ ^[6],即在此区间内所进行的采样频率完全满足采样定理^[7]的要求,这样对信号进行采样

它作为 Fourier 变换的一种广义形式,可以理解为信号的坐标轴在时频平面上绕原点作逆时针旋转.如果把信号的 Fourier 变换看成其由时间轴逆时针旋转 $\pi/2$ 后到频率轴上的表示,则分数阶 Fourier 变换可以看成将信号由时域逆时针旋转一定的角度到分数阶域上的表示.信号 $x(t)$ 的角度为 α 的分数阶 Fourier 变换定义为

$$X_\alpha(u) = \{F_\alpha[x(t)]\}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} K_\alpha(u, t) \cdot x(t) dt \quad (1)$$

式中,下标 α 表示的是角度为 α 的连续分数阶 Fourier 变换,变换核为

$$\alpha = 2k\pi, A_\alpha = \sqrt{\frac{1 - j \cot\alpha}{2\pi}}, k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$\alpha = (2k \pm 1)\pi$$

时就不会出现丢失信号局部信息的情况.从 t_m 时刻到 t_{2m} 时刻也是均匀采样,采样周期为 T_2 ,但 $T_1 \neq T_2$,因此该非均匀采样模型也可称为分段均匀采样模型.采样频率 $f_2 = 1/T_2$,同样使 $f_2 \geq \max_{i=m+1,\dots,n} f(t_i)$.在对以后时间段的信号进行采样时,也是按照此规则.在工程上的实现如图 2 所示.第 1 个 ADC 从 t_0 时刻开始以采样频率 f_1 对信号进行均匀采样,输出的离散采样序列是 s_0 .但从 t_m 时刻起,第 1 个 ADC 停止工作,第 2 个 ADC 开始以采样频率 f_2 对信号进行均匀采样,一直采样到 t_{2m} 时刻,输出离散序列 s_1 .按此规则,直到对信号采样完毕.

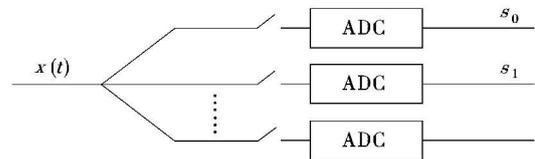


图 2 非均匀采样框图

由上面所述可知,这些非均匀采样序列的采样时刻可以表示为

$$t = T_1 m + (n - m) T_2 + \dots (m, n \in \mathbb{N}, n > m) \quad (4)$$

此非均匀采样序列可写为 $s = \{s_0, s_1, \dots\}$ 的形式,其中

$$s_0 = [x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_m)]$$

$$s_1 = [x(t_{m+1}), x(t_{m+2}), \dots, x(t_{2m})] \quad (5)$$

将序列 s_1 右移 $m+1$ 个位置, 得到

$$s_1 z^{-(m+1)} = [\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m+1 \uparrow}, x(t_{m+1}), x(t_{m+2}), \dots, x(t_{2m})] \quad (6)$$

式中, z^{-1} 表示的是单位延迟算子, 因此原始的非均匀采样序列可以表示为

$$s = s_0 + s_1 z^{-(m+1)} + \dots \quad (7)$$

1.3 非均匀采样序列的分数阶 Fourier 变换

由均匀采样信号在分数阶域的采样定理可以得到

$$F_a[s_0](u) = (S_0)_a(u) = \frac{1}{T_1} e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \cdot [X_a(u) e^{-j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \times \sum_{k=0}^m \delta(u - k \frac{2\pi \sin \alpha}{T_1})] \quad (8)$$

$$F_a[s_1](u) = (S_1)_a(u) = \frac{1}{T_2} e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \cdot [X_a(u) e^{-j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \times \sum_{k=m+1}^{2m} \delta(u - k \frac{2\pi \sin \alpha}{T_2})] \quad (9)$$

.....

由分数阶 Fourier 变换的性质可以得到

$$F_a[s_1 z^{-(m+1)}](u) = e^{j\frac{(m+1)^2}{2} \sin \alpha \cos \alpha - ju(m+1) \sin \alpha} \cdot (S_1)_a[u - (m+1) \cos \alpha] = \frac{1}{T_2} e^{j[u - (m+1) \cos \alpha]^2 \cot \alpha} \cdot \{F_a[u - (m+1) \cos \alpha] \times e^{-j[u - (m+1) \cos \alpha]^2 \cot \alpha} \times \sum_{k=m+1}^{2m} \delta[u - (m+1) \cos \alpha - k \frac{2\pi \sin \alpha}{T_2}]\} \quad (10)$$

最终可得非均匀采样信号的分数阶 Fourier 变换为

$$F_a[s](u) = F_a[s_0](u) + F_a[s_1 z^{-(m+1)}](u) + \dots \quad (11)$$

当 $T_1 = T_2 = \dots$ 时, $F_a[s](u) = \frac{1}{T_1} e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha}$

$$[X_a(u) e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \times \sum_{k=0}^{\infty} \delta(u - k \frac{2\pi \sin \alpha}{T_1})], \text{ 即为均匀采样信号的数字谱表达式. 进一步, 当 } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ 时,}$$

$F_{\pi/2}[s](u) = \frac{1}{T_1} \sum_{k=0}^{\infty} X_{\pi/2}(u - k \frac{2\pi}{T_1})$, 即变为 Fourier 域中的均匀采样频谱表示.

2 非均匀采样 Chirp 信号的分数阶频谱

在工程处理和应用中经常会遇到 Chirp 信号,

如在雷达和声纳的回波信号中. 处理 Chirp 信号的方法很多, 但到目前为止, 分数阶 Fourier 变换是处理 Chirp 信号比较理想的方法. Chirp 信号的模型可以表示为

$$x(t) = C e^{j2\pi(f_t t + \frac{1}{2} m_0 t^2 + \varphi)}$$

当 $\cot \alpha + m_0 = 0$ 时, 其分数阶 Fourier 变换可以表示为

$$X_a(u) = 2\pi C A_a e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} \delta(f_0 - u \csc \alpha) \quad (12)$$

将式(12)代入式(11)即可得到非均匀采样 Chirp 信号的分数阶数字频谱

$$X_a(u) = \frac{1}{T_1} e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha} [2\pi C A_a \delta(f_0 - u \csc \alpha) \times \sum_{k=0}^m \delta(u - k \frac{2\pi \sin \alpha}{T_1})] + \frac{1}{T_2} e^{j[u - (m+1) \cos \alpha]^2 \cot \alpha} \cdot \{2\pi C A_a e^{j\frac{u^2}{2} \cot \alpha - j[u - (m+1) \cos \alpha]^2 \cot \alpha} \delta[f_0 - u \csc \alpha - (m+1) \cos \alpha] \times \sum_{k=m+1}^{2m} \delta[u - (m+1) \cos \alpha - k \frac{2\pi \sin \alpha}{T_2}]\} + \dots \quad (13)$$

3 检测概率研究

假定噪声的概率密度函数 $p(x)$ 是高斯型, 即

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma_n^2}) \quad (14)$$

式中, σ_n^2 是噪声方差. 要产生信号的包络, 需要 2 路信号, 如果式(14)表示一路的输出噪声, 则另一路的输出噪声可以表示为

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp(-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}) \quad (15)$$

包络的概率密度是 $p(x)p(y)$, 它可以写成 r 的函数

$$p(r) = \int_0^{2\pi} r p(x) p(y) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r}{2\pi\sigma_n^2} \exp(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma_n^2}) d\theta = \frac{r}{\sigma_n^2} \exp(-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}) \quad (16)$$

式中, $r^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \arctan(y/x)$. 此概率密度函数为瑞利分布.

虚警概率可写为^[8]

$$P_{fas} = \int_{u_T}^{\infty} p(r) dr = \int_{u_T}^{\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} \exp(-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}) dr = \exp(-\frac{u_T^2}{2\sigma_n^2}) \quad (17)$$

$$u_T = \sqrt{-2\sigma_n^2 \ln(P_{fas})} \quad (18)$$

式中, u_T 是门限.

下面将研究信号的检测概率. 当雷达侦察系统所接收的数据中有信号时, 信噪比可表示为

$$SNR = 10 \lg \frac{C^2}{\sigma_n^2} \quad (19)$$

而 2 路输出的概率密度函数可以写成

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{x - \mu_x}{2\sigma_n^2}\right] \quad (20)$$

$$p(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{y - \mu_y}{2\sigma_n^2}\right] \quad (21)$$

其中, μ_x 和 μ_y 是高斯分布的均值, 它们与信号的关系为

$$\mu_x = C \cos \varphi, \mu_y = C \sin \varphi \quad (22)$$

式中, φ 是信号的初始相位.

联合概率密度函数可写为

$$p(r, \theta | \varphi) = rp(x)p(y) = \frac{r}{2\pi\sigma_n^2} \exp\left\{-\frac{r^2 + C^2 - 2rC\cos(\varphi - \theta)}{2\sigma_n^2}\right\} \quad (23)$$

对 θ 积分得

$$p(r | \varphi) = \int_0^{2\pi} p(r, \theta | \varphi) d\theta = \frac{r}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{r^2 + C^2}{2\sigma_n^2}\right) I_0\left(\frac{rC}{\sigma_n^2}\right) = p(r) \quad (24)$$

其中, $I_0(x)$ 是修正的零阶贝塞尔函数. 由于式(23)不依赖于 φ , 因此可用 $p(r)$ 表示.

因此, 信号的检测概率 P_d 可由下式计算

$$P_d = \int_{u_T}^{\infty} p(r) dr = 1 - \int_0^{u_T} p(r) dr \quad (25)$$

4 仿 真

仿真时选择 $x(t) = e^{j\pi(4t^2 + 4t)}$ 作为初始信号, 信号观测时间为 $[0, 0.395 \text{ s}]$, 取 2 个周期对信号进行非均匀采样, 其中 $T_1 = 0.003 \text{ s}$, $T_2 = 0.002 \text{ s}$, 采样点数为 160 个. 对非均匀采样 LFM 信号进行分数阶 Fourier 变换后如图 3 所示(图 3 中 $p = \frac{2\alpha}{\pi}$, 以下同). 该变换所用时间为 53.704 s. 若对该信号进行均匀采样, 设定信号的观测时间仍为 $[0, 0.395 \text{ s}]$, 采样间隔 $T = 0.001 \text{ s}$, 采样点数为 396 个, 其分数阶 Fourier 变换如图 4 所示, 所用时间为 134.289 s. 从采样点数和所用时间可以看出, 文中所提出的非均匀采样方法和均匀采样方法相比, 既减少了存储空间, 又满足了实时性

要求. 而且, 对比图 3 和图 4 可以明显看到, 图 3 中信号的幅度低于图 4 中信号的幅度, 这是由于信号的分数阶 Fourier 变换具有能量聚集性, 如果信号采样点数少, 那么经过分数阶 Fourier 变换后, 信号在分数阶域的幅度必然低. 同时, 还给出了非均匀采样 LFM 信号在信噪比为 -11 db 时的分数阶 Fourier 变换图, 如图 5 所示. 从图 5 可看出, 非均匀采样 LFM 信号在信噪比为 -11 db 时可以被检测出来. 图 6 给出了在虚警概率 $P_{fas} = 2 \times 10^{-5}$ 的条件下非均匀采样 LFM 信号在不同信噪比条件下的检测概率. 因此该方法具有较好的抗噪声能力.

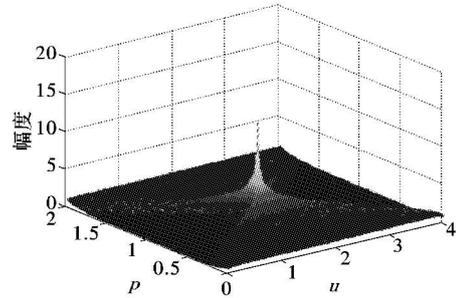


图 3 非均匀采样 LFM 信号的分数阶 Fourier 变换

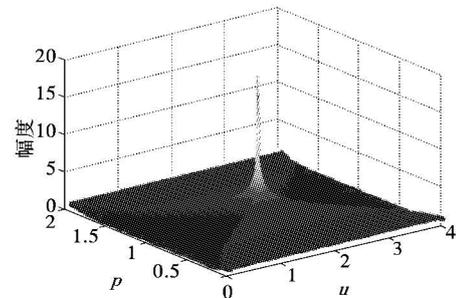


图 4 均匀采样 LFM 信号的分数阶 Fourier 变换

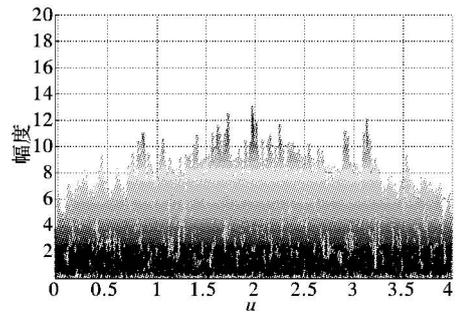


图 5 在信噪比为 -11 db 时的非均匀采样 LFM 信号的分数阶 Fourier 变换

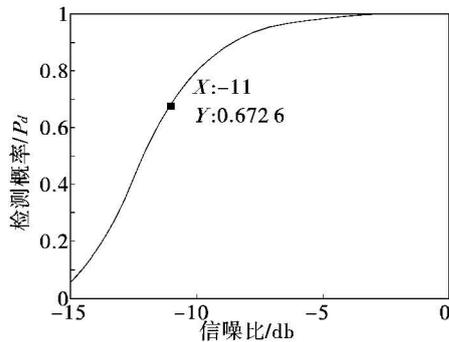


图 6 非均匀采样 LFM 信号在不同信噪比下的检测概率

5 结 束 语

提出了一种新的非均匀采样方法,在此基础上,得到了这类非均匀采样信号在分数阶 Fourier 变换域的频谱表达式,并分析了非均匀采样 LFM 信号在分数阶域的频谱性质.所提出的非均匀采样方法,与均匀采样方法相比,尽管信号在分数阶域的幅度有所降低,但是该方法既节省了存储空间,又满足了实时性要求;与传统的非均匀采样方法相比,该方法既解决了整个采样时段内由于过采样造成的数据冗余性,也消除了信号时变特征造成的局部冗余性.最后研究了该非均匀采样方法在不同信噪比条件下对 LFM 信号的检测概率,进一步验证了该方

法的有效性.

参考文献

- [1] 尉宇,孙德宝. 基于分数阶域的多分量线性调频信号能量聚集性检测[J]. 电讯技术,2004(3):139-143.
- [2] 汪安民. 基于非均匀采样的信号频率检测方法及其实现[D]. 武汉:华中科技大学,2004:1-8.
- [3] 陶然,齐林,王越. 分数阶 Fourier 变换的原理与应用[M]. 北京:清华大学出版社,2004:23-48.
- [4] 李炳照,陶然,王越. 非均匀采样信号的分数阶数字频谱研究[J]. 电子学报,2006,34(12):2146-2149.
- [5] Ozaktas H M, Kutay M A, Zalevsky Z. The fractional Fourier transform with Applications in Optics and Signal Processing[M]. New York: John Wiley & Sons, 2000: 1-45.
- [6] 潘晓峰,刘红星. 采样定理的拓展——一种新的非均匀采样规则[J]. 振动、测试与诊断,2003,23(1):14-17.
- [7] Oppenheim A V, Willsky A S, Nawab S H. 信号与系统[M]. 2 版. 北京:电子工业出版社,2007:514-582.
- [8] 张明友,吕明. 信号检测与估计[M]. 2 版. 北京:电子工业出版社,2006:168-172.
- [9] Ran T, Bing-Zhao L, et al. Spectral Analysis and Reconstruction for Periodic Nonuniformly Sampled Signals in Fractional Fourier Domain[J]. IEEE Trans Signal Processing, 2007, 55(7): 3541-3547.

(上接第 74 页)

- [7] 李凌杰,王建国,黄顺吉. 基于真实反射场景 SAR 原始信号模拟[J]. 电子科技大学学报,1996, 25(6):566-568.
- [8] 詹学丽. 机载合成孔径雷达回波模拟器设计与实现[D]. 北京:北京理工大学,2003.
- [9] Liang Yi, Wang Hongxian, Xing Mengdao, et al. Imaging Study of High Squint SAR Based on FMCW[C]//2007 Asian and Pacific Conference on Synthetic Aperture Radar,2007:6-9.
- [10] 刘永坦. 雷达成像技术[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1999:38-40.
- [11] 张玉玲,曲长文,何友. 调频连续波 SAR 成像算法研究[J]. 海军航空工程学院学报,2007,22(6):637-640.
- [12] 朱珍珍. 调频连续波 SAR 回波模拟研究[D]. 长沙:国防科学技术大学,2005

欢 迎 刊 登 广 告