

文章编号: 1005-5630(2022)04-0067-06

DOI: 10.3969/j.issn.1005-5630.2022.004.009

二维颗粒系统中指数分布的几何结构

华云松¹, 戴红阳¹, 李宏泽¹, 杨 晖¹, 李 然²

(1. 上海理工大学 光电信息与计算机工程学院, 上海 200093;
2. 上海理工大学 健康科学与工程学院, 上海 200093)

摘要: 量化堆积颗粒的几何结构对于理解颗粒系统的宏观力学性质具有重要价值。本文通过 Cell 来量化圆盘颗粒在二维筒仓内的几何结构, 发现重力驱动条件下 Cell 形状的概率分布满足指数函数分布, 与颗粒系统的大小无关。值得注意的是, 振动驱动条件下形如三角形的 Cell 发生了激增现象, 形成概率提高了 19%, 而其他形状的 Cell 概率分布仍然满足指数函数分布。实验结果揭示了无序颗粒系统中介尺度条件下的有序堆积结构特征, 为完善颗粒力学理论提供了数据参考。

关键词: 颗粒材料; 堆积结构; 指数函数分布; 振动; 体积分数
中图分类号: TB 126 **文献标志码:** A

Geometric structure of exponential distribution in a two-dimensional particle system

HUA Yunsong¹, DAI Hongyang¹, LI Hongze¹, YANG Hui¹, LI Ran²

(1. School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China;
2. School of Health Science and Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: Quantifying the geometric structure of packing particles is of great value for understanding the macroscopic mechanical properties of particle systems. In this paper, Cell was utilized to measure the geometric structure of disk particles in a two-dimensional silo. The probability distribution of Cell shapes satisfied the exponential function distribution and was independent of the system size. Furthermore, it was observed that under the condition of vibration driving, the triangular-shaped Cell had a surge, and the formation probability increased by 19%, while the probability distribution of the rest shapes of Cell still satisfied the exponential function distribution. The experimental results reveal the structural characteristics of ordered packing in disordered particle system at intermediate scale, and provide references for perfecting the theory of particle mechanics.

收稿日期: 2022-01-21

基金项目: 国家自然科学基金(11972212、11902190、12072200、12002213); 上海市自然科学基金(20ZR1438800)

作者简介: 华云松(1971—), 男, 副教授, 研究方向为测试计量技术。E-mail: hyuns_yz@163.com

通信作者: 李 然(1989—), 男, 讲师, 研究方向为颗粒流。E-mail: ran89@usst.edu.cn

Keywords: granular material; packing structure; exponential function distribution; vibration; volume fraction

引 言

颗粒物质是由大量离散的固体颗粒组成的系统^[1-4]。颗粒堆积结构上的差异导致了颗粒系统复杂的动力学行为,例如非局域流变、应力陡降以及塑性变形等现象^[5-8]。因此,量化堆积颗粒的结构有助于更好地理解颗粒物质的力学行为。

Voronoi 图作为传统方法被广泛应用于量化颗粒系统的介观结构中^[9]。Meyer 等^[10]使用 Voronoi 图对堆积颗粒的体积进行划分,并根据填料的配位数和紧实度来预测填料的极限密度。这一结果对于理解圆盘颗粒的无序态排列问题以及二维系统中假定的玻璃跃迁的存在问题具有重要意义。Zhao 等^[11]采用 Voronoi 图研究了三维单分散椭球颗粒堆积体的内部结构。他们利用离散单元法模拟了椭球颗粒的各向同性和三轴压缩试验。结果表明,在剪切过程中,平均局部孔隙度、平均球度是关于整体孔隙度和平均配位数的函数,这证明了孔隙度与颗粒网络之间存在一定的关系。Quadrons 作为一种新的方法用于测量局部堆积结构^[12]。Matsushima 等^[13]利用 Quadrons 详细研究了颗粒间的摩擦和系统初始条件对二维堆积颗粒结构特征的影响。他们利用离散单元法证明了结构可以用 Quadrons 进行定量分析,并且发现了一种普遍性的结构特征与系统的初始状态和颗粒的摩擦系数无关。与 Quadrons 密切相关的 Cell 也常被用于描述堆积颗粒的结构特征,将接触颗粒的中心点沿着逆时针方向连接起来围成的区域就是 Cell,它保留了接触颗粒的连通性信息,并在颗粒统计力学中发挥着重要作用^[14]。Sun 等^[15]使用 Cell 网格分析循环剪切驱动的二维颗粒系统结构,明确了摩擦系数不同的颗粒的结构特征是力学稳定性和熵之间竞争的结果,后者的影响会随着摩擦的增大而增加。

本文采用 Cell 网格研究二维体系中圆盘颗粒的堆积结构特征。首先通过图像法对颗粒进行表征,再通过 Cell 来描述二维筒仓内圆盘颗粒系统的结构特征;然后探究系统尺寸的改变与堆积结构稳定性之间的关系,最后通过施加振动进一步研究外力驱动条件下圆盘颗粒的堆积结构特性。

1 实 验

1.1 实验装置

实验装置系统由二维筒仓,高速相机和 LED 光源组成。实验装置如图 1 所示。二维筒仓前后挡板由 5 mm 钢化玻璃制成,二维筒仓高 50 cm,宽 35 cm,厚 5 mm,其中宽度可以根据实验需求在 20~35 cm 范围内调节。高速相机(型号为 3F04M)能够调节高度至恰好能拍摄到筒仓中心位置。高速相机分辨率为 1691 像素×1489 像素,曝光时间设置为 1000 μs ,采样率为 333 帧/s,通过比例近似法计算出高速相机捕获图像的空间分辨率为 0.042 mm/px。LED 光源(型号为 SL-200W)的输出功率为 200 W,光束直径为 160 mm。实验中选用的白色圆盘颗粒由有机玻璃材料制成,其直径为 10 mm,厚度为 4.4 mm。

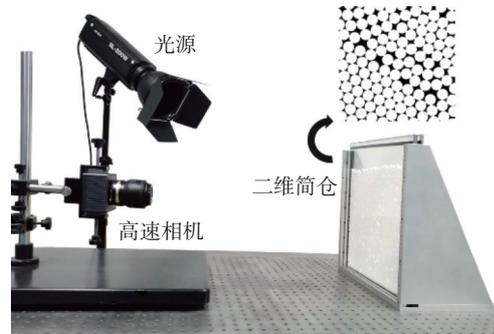


图 1 实验装置图

Fig. 1 Experimental set-up

实验中先确定筒仓的实验区域大小后将二维筒仓摆放好,采用“分布式填充”^[16]将圆盘颗粒装载进筒仓中。为了避免光源与筒壁产生的反射光对拍摄图片的干扰,光源与筒仓呈约 60°夹角放置,使光束能够均匀的打在颗粒上。最后调整高速相机的光圈和焦距,使得每个颗粒的中心点都能清晰地被高速相机捕捉到。

1.2 图像法和 Cell 构建

图 2(a) 为某次实验高速相机采集到的二维筒仓内堆积颗粒的某一区域的图像,采用全局阈

值分割法对颗粒图像二值化^[17-18], 并采用中值滤波的方法对图像进行滤波。这种非线性滤波方法可以有效保持颗粒图像的边缘, 使之不被模糊。然后对滤波后的图像进行先腐蚀后膨胀的开操作, 再进行先膨胀后腐蚀的闭操作。其中膨胀和腐蚀的操作过程如下: 若结构 A 被结构 B 膨胀, 则记为 $A \oplus B$, 可以理解为: 将结构 B 在结构 A 上进行卷积操作, 如果移动结构 B 的过程中, 与结构 A 存在重叠区域, 则记录结构 B 的中心点所在的位置, 所有移动结构 B 与结构 A 存在交集的位置的集合为结构 A 在结构 B 作用下的膨胀结果。若结构 A 被结构 B 腐蚀, 则记为 $A \ominus B$, 可以理解为: 移动结构 B, 如果结构 B 与结构 A 的交集完全属于结构 A, 则保存结构 B 的中心点所在的位置, 所有满足条件的点构成结构 A 被结构 B 腐蚀的结果。其中开操

作可以消除细小的突出物从而进行轮廓光滑处理, 闭操作可用于填补小的空洞和轮廓的断裂从而进行轮廓光滑处理, 这一操作有利于后续对颗粒进行有效识别。对开操作和闭操作后的图像进行连通域特征提取, 以图像左下角为原点建立坐标系, 以确保准确无误地对颗粒的中心点进行定位, 其中中心点的坐标计算公式如下:

$$\begin{cases} \bar{X} = \frac{1}{S} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} yB(x,y) \\ \bar{Y} = -\frac{1}{S} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} xB(x,y) \end{cases} \quad (1)$$

式中: \bar{X} 为中心点横坐标; \bar{Y} 为中心点纵坐标; S 为颗粒连通域的面积; $M \times N$ 为连通域的大小, 最终用坐标点来代替颗粒。通过两点间距离公式可以计算出颗粒与颗粒中心点间的距离 d , 通过判断 d 与颗粒直径 D 的大小关系, 可以判断颗粒是否接触, 计算公式如下:

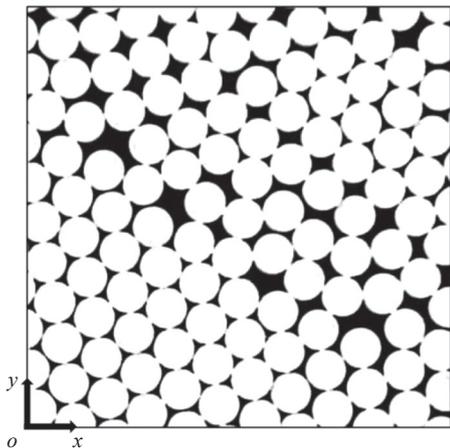
$$\begin{cases} d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ d \leq D \end{cases} \quad (2)$$

式中: d 为基准颗粒和对照颗粒间的距离; D 为颗粒直径; (x_1, y_1) 为基准颗粒的坐标; (x_2, y_2) 为对照颗粒的坐标。若判断为接触, 则将两个颗粒的中心点连接起来, 基于以上算法可以较为精确地表征出如图 2(b) 所示的堆积颗粒的 Cell 分布图。

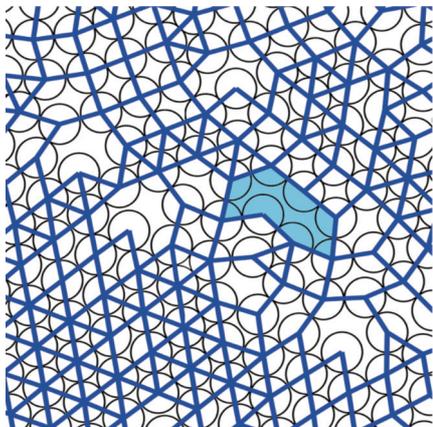
由于二维筒仓内形成的 Cell 都是平面图形, 故通过单个 Cell 含有的边数 n 可以确定 Cell 的形状为几边形, 如图 2(b) 中的蓝色阴影部分即为八边形的 Cell 示意图。 $P(n)$ 等于边数为 n 的 Cell 占总数的比值。对诸如图 2(b) 表征的图像中所有 Cell 的周长进行计算, 当把图像中的像素当作点看待时, 周长可用链码表示, 求周长也就是计算链码的长度。此时, 若链码值为奇数, 长度记作 $\sqrt{2}$; 链码值为偶数, 长度记作 1。将计算得到的 Cell 的周长和边长进行比较就可以判断出此 Cell 对应的边数 n , 其计算公式如下:

$$\begin{cases} p = N_o + \sqrt{2}N_e \\ n = p/l \end{cases} \quad (3)$$

式中: N_o 和 N_e 分别为 8 连通边界链码中奇数码



(a) 颗粒原始图像



(b) 颗粒表征结果

图 2 颗粒表征图

Fig. 2 Particle characterization

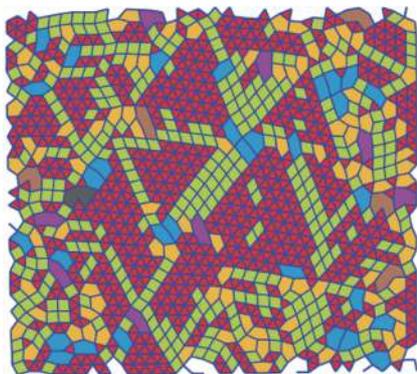
和偶数码的数目； l 为 Cell 边长的链码长度； p 为所得 Cell 的周长； n 为 Cell 对应的边数。对实验采集的所有图像中出现的 Cell 的形状和数量进行统计，即可计算出边数为 n 的 Cell 对应的 $P(n)$ 值。

对比原始图像可以发现，对于颗粒是否接触的判断仍会存在误差。误差主要来源于照片边缘会存在不可避免的几何失真，所以对处于照片边缘的颗粒的表征会存在些许误差。对此，实验中在保证照片清晰的情况下尽可能把高速相机放置得离二维筒仓远点来加以避免。

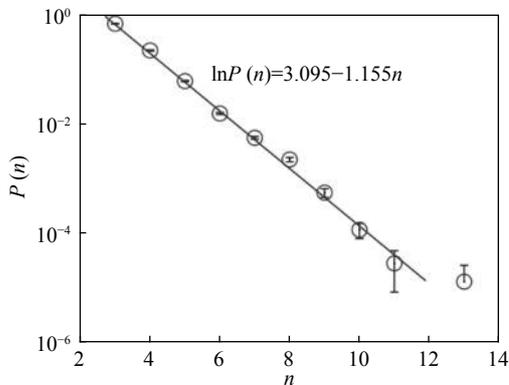
2 结果与讨论

2.1 Cell 分布

图 3(a) 为 35 cm×30 cm 二维筒仓内堆积颗粒的 Cell 分布，不同颜色表示不同形状的 Cell。



(a) 堆积颗粒的 Cell 分布



(b) Cell 形状的概率分布

图 3 颗粒系统结构特征

Fig. 3 The structure characteristics of a particle system

可以看出，在重力驱动下，形状相同的 Cell 分布比较集中，堆积颗粒的 Cell 分布出现了若干大面积的结晶区域。

重复 50 次实验，对诸如图 3(a) 所示的图像中不同形状的 Cell 数量进行统计，得到二维筒仓内堆积颗粒 Cell 形状的概率分布，如图 3(b) 所示。可以看出，堆积颗粒的 Cell 形状的概率分布满足指数函数分布，即堆积颗粒的 Cell 形状的概率分布曲线满足：

$$\ln P(n) = a + bn \quad (4)$$

式中 a 、 b 为拟合系数。拟合系数 b 可以用来描述堆积结构的松散程度， b 越大表示堆积颗粒的密集程度越低。采用最小二乘法对图 3(b) 中数据进行拟合，拟合误差小于 5%，发现拟合函数为 $\ln P(n) = 3.095 - 1.155n$ ，值得注意的是，颗粒系统中十三边形的 Cell 偏离了指数函数曲线。这是因为较大的 Cell 出现概率具有随机性，故而偏离曲线，这与自组织临界模型的结果^[19]是一致的。

2.2 尺寸效应

图 4(a) 为筒仓高度为 30 cm 时，不同筒仓宽度下堆积颗粒的 Cell 形状概率分布。可以发现，改变筒仓宽度后，堆积颗粒 Cell 形状的概率分布仍然符合指数函数分布。但是增大筒仓宽度后，曲线的拟合系数 b 呈上升趋势，如图 4(b) 所示。图中采用最小二乘法拟合，拟合误差小于 5%，求得拟合直线的斜率 $k_1 = 2.9 \times 10^{-3}$ 。在筒仓宽度为 35 cm 时，改变筒仓的高度后，同样可以发现堆积颗粒的 Cell 形状的概率分布始终符合指数函数分布，如图 4(c) 所示。但是增大筒仓高度后，曲线的拟合系数 b 呈下降趋势，如图 4(d) 所示。图中采用最小二乘法拟合，拟合误差小于 5%，求得拟合直线的斜率 $k_2 = -3.5 \times 10^{-2}$ 。这揭示了在相同颗粒体系下，一定范围内，堆积系统宽度的增加会导致 Cell 网络的结构变得松散，从而降低了颗粒系统的力学稳定性。而堆积系统高度的增加，促使颗粒受到的应力也随之增加，因此 Cell 网络的结构变得更加紧密，从而增加了颗粒系统的力学稳定性。但需要说明的是，这样的规律可能不会随着筒仓尺寸的继续增加而一直持续。

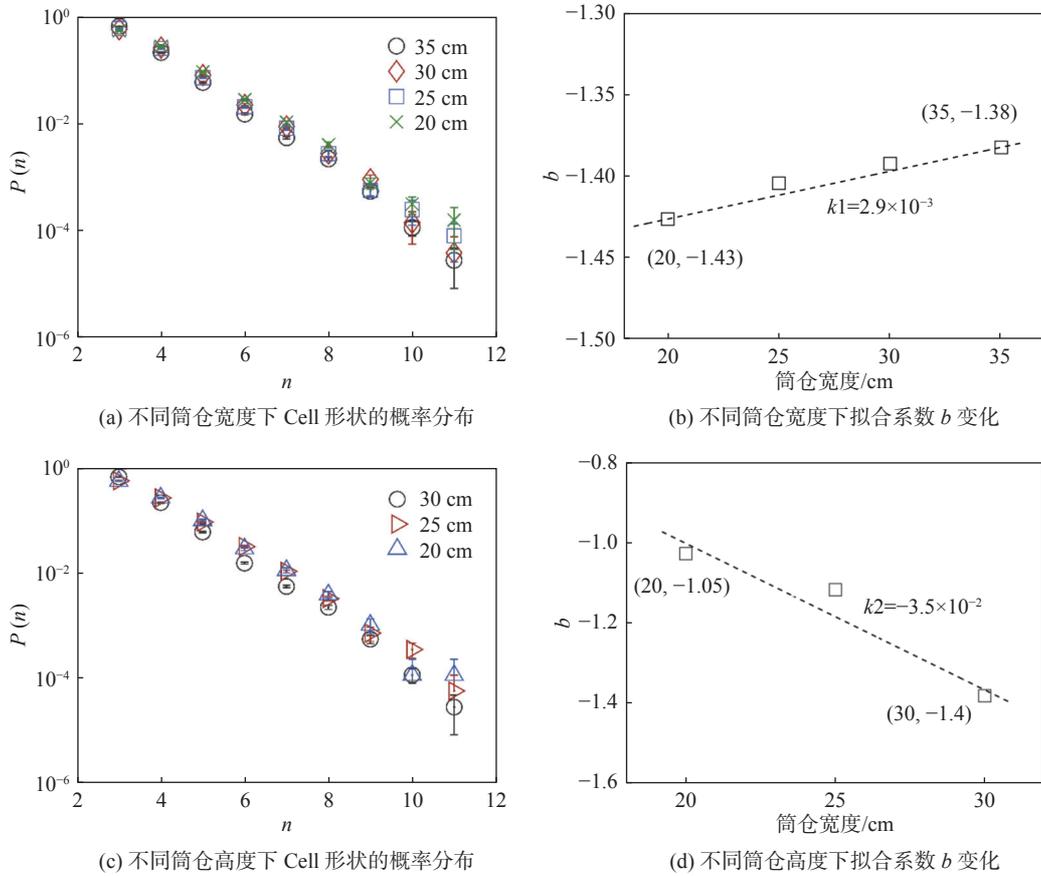


图 4 不同大小的筒仓下 Cell 形状的概率分布及拟合参数 b 的变化

Fig. 4 Probability distribution of cell shapes with different silo size and the change of the fitting parameter b

2.3 振动对圆盘颗粒结构特性的影响

为了探究振动对颗粒堆积结构的影响, 设置了不同的振动参数进行实验。在垂直振动频率为 10 Hz、加速度为 6.7 m/s^2 的条件下, $35 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$ 的二维筒仓内堆积颗粒的体积分数的变化

经历了快速上升、平缓上升和趋于稳定 3 个阶段, 如图 5(a) 所示。振动后的颗粒系统的体积分提升了 3% 左右, 达到了 85.7%, 这表明振动后的颗粒堆积得更加紧密。图 5(b) 为稳定阶段堆积颗粒 Cell 形状的概率分布, 可以看出,

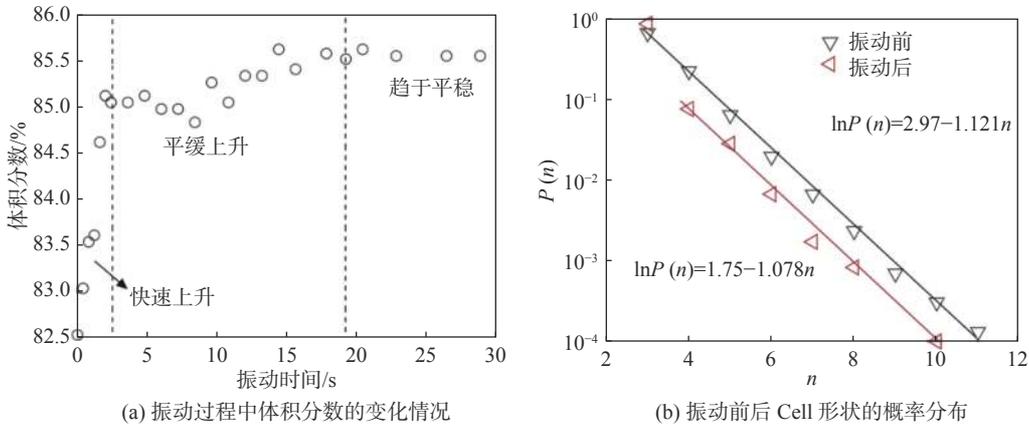


图 5 振动对颗粒结构特性的影响

Fig. 5 Influence of vibration on structural characteristics of particles

振动后堆积颗粒的 Cell 形状的概率分布已经不再满足指数函数, 其中形如三角形的 Cell 的出现概率增大了约 19%, 而其他形状的 Cell 的出现概率都显著降低了, 这恰好与振动前后体积分数的变化情况相互对应。然而值得注意的是, 除去形如三角形的 Cell, 采用最小二乘法对余下数据进行拟合, 拟合误差小于 5%, 发现余下 Cell 形状的概率分布仍然满足指数函数分布。这一现象揭示了外力驱动条件下, 颗粒堆积系统的有序结构特征。

3 结 论

研究了系统尺寸和振动对无序二维颗粒系统堆积结构特征的影响。通过测量圆盘颗粒在二维筒仓内的 Cell 网络, 发现了堆积颗粒的 Cell 形状是满足指数函数分布的。进一步观察到, 不同系统尺寸条件下, Cell 形状的概率分布始终满足指数函数分布, 并且随着筒仓宽度的增加, 拟合系数 b 呈上升趋势, 这说明颗粒堆积系统宽度越宽, 堆积结构的稳定性越差; 而随着筒仓高度的增加, 拟合系数 b 呈下降趋势, 这说明颗粒堆积系统高度越高, 堆积结构的稳定性越好。在振动驱动条件下, 发现形如三角形的 Cell 的出现概率增大了 19%, 值得注意的是, 其他形状的 Cell 的概率分布仍符合指数函数分布。实验结果揭示了无序颗粒系统中介尺度条件下的有序堆积结构特征, 为完善工业生产中颗粒材料运输和加工技术提供了参考数据。

参考文献:

- [1] JAEGER H M, NAGEL S R, BEHRINGER R P. Granular solids, liquids, and gases[J]. *Reviews of Modern Physics*, 1996, 68(4): 1259 – 1273.
- [2] YANG H, ZHANG B F, LI R, et al. Particle dynamics in avalanche flow of irregular sand particles in the slumping regime of a rotating drum[J]. *Powder Technology*, 2017, 311: 439 – 448.
- [3] 陆坤权, 刘寄星. 颗粒物质 (上)[J]. *物理*, 2004, 33(9): 629 – 635.
- [4] 陆坤权, 刘寄星. 颗粒物质 (下)[J]. *物理*, 2004, 33(10): 713 – 721.
- [5] KRISHNA B V, VENUGOPAL P, RAO K P. Analysis of deformation during simultaneous plastic deformation of dissimilar powder metallurgical preforms[J]. *Powder Technology*, 2004, 146(1/2): 137 – 146.
- [6] LIU Y Y, ZHANG D L, DAI B B, et al. Experimental study on vertical stress distribution underneath granular silos[J]. *Powder Technology*, 2021, 381: 601 – 610.
- [7] TOORANI M H, LAKIS A A. Shear deformation in dynamic analysis of anisotropic laminated open cylindrical shells filled with or subjected to a flowing fluid[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 190(37/38): 4929 – 4966.
- [8] 郑文. 颗粒物质体系复杂动力学行为研究 [D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2013.
- [9] 孙继忠, 胡艳, 马永强. 基于 Delaunay 三角剖分生成 Voronoi 图算法 [J]. *计算机应用*, 2010, 30(1): 75 – 77,97.
- [10] MEYER S, SONG C M, JIN Y L, et al. Jamming in two-dimensional packings[J]. *Physica A:Statistical Mechanics and its Applications*, 2010, 389(22): 5137 – 5144.
- [11] ZHAO S W, EVANS T M, ZHOU X W. Three-dimensional Voronoi analysis of monodisperse ellipsoids during triaxial shear[J]. *Powder Technology*, 2018, 323: 323 – 336.
- [12] BAULE A, MORONE F, HERRMANN H J, et al. Edwards statistical mechanics for jammed granular matter[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2018, 90(1): 015006.
- [13] MATSUSHIMA T, BLUMENFELD R. Fundamental structural characteristics of planar granular assemblies: self-organization and scaling away friction and initial state[J]. *Physical Review E*, 2017, 95(3): 032905.
- [14] MATSUSHIMA T, BLUMENFELD R. Universal structural characteristics of planar granular packs[J]. *Physical Review Letters*, 2014, 112(9): 098003.
- [15] SUN X L, KOB W, BLUMENFELD R, et al. Friction-controlled entropy-stability competition in granular systems[J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(26): 268005.
- [16] NIELSEN J. Pressures from flowing granular solids in silos[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A:Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1998, 356(1747): 2667 – 2684.
- [17] 许潇, 张文阁, 池顺鑫. 基于圆形拟合识别算法的颗粒粒度粒形自动测量方法研究 [J]. *计量科学与技术*, 2021, 65(3): 15 – 18.
- [18] 任世龙, 王浩亮, 刘桢, 等. 多相流图像法测量中目标颗粒识别方法 [J]. *南京工业大学学报:自然科学版*, 2020, 42(6): 710 – 720.
- [19] MARKOVIĆ D, GROS C. Power laws and self-organized criticality in theory and nature[J]. *Physics Reports*, 2014, 536(2): 41 – 74.

(编辑: 李晓莉)