

文章编号: 0258-7025(2005)05-0637-05

窄带和宽带双曲正割脉冲光束的解析传输式

彭润伍, 钱列加, 范滇元

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

摘要 从近轴波动方程出发推导了窄带和宽带双曲正割脉冲光束的解析传输公式。通过数值计算比较了分别采用复振幅包络(CAE)表示式和复解析信号(CAS)表示式得到的脉冲光束, 得出了选择脉冲光束研究方法的条件。结果表明复振幅包络表示式得到的解会存在空间奇异性, 使光束出现不符合物理意义的非光束行为。对于宽带光束, 复振幅包络解的奇异点的位置距离轴中心较近, 使复包络解不能正确表示脉冲光束, 而对于奇异点位置远离轴中心的窄带光束, 对脉冲光束产生的影响可以忽略。因此, 窄带脉冲光束可以采用复振幅包络和复解析信号两种表示式来研究, 而对于宽带脉冲光束, 必须采用严格的复解析信号表示式。

关键词 激光物理; 宽带脉冲; 窄带脉冲; 复振幅包络; 复解析信号

中图分类号 O436; TN241 **文献标识码** A

Analytical Propagation Expressions of Hyperbolic Secant Pulsed Beams with Narrowband and Broadband

PENG Run-wu, QIAN Lie-jia, FAN Dian-yuan

(Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, The Chinese Academy of Sciences, Shanghai 201800, China)

Abstract Starting from paraxial wave equation, analytical propagation expressions of hyperbolic secant pulsed beams with narrowband and broadband are derived. By the use of numerical calculations, pulsed beams obtained by means of complex amplitude envelope representation and complex analytical signal representation are compared. The condition to determine what representation should be chosen is also given. It is found that pulsed beam obtained by using complex amplitude envelope representation has singularity, which is anti-beam behavior and loses physical meaning. In the case of pulsed beams with broadband, singularity of complex amplitude envelope solution locates near axis, which causes that the solution failed to describe pulsed beam. But for the case of pulsed beam with narrowband, singularity locates far from axis, which can be neglected in the study of pulsed beam. It is concluded that both of the representations are applicable to study narrowband pulse, but for broadband pulse only rigorous complex analytical signal representation should be adopted.

Key words laser physics; broadband pulse; narrowband pulse; complex amplitude envelope; complex analytical signal

1 引 言

长期以来, 建立光束合理的物理模型以及对其相关特性的研究一直是受关注的研究课题^[1~12]。在这些研究中, 由于宽带脉冲光束有着与窄带脉冲光束不同的特点, 因而其处理方法也不同。对于窄带脉冲光束, 缓变包络近似下可以引入复振幅包络(CAE)^[2,4], 从而可以得到解析解。然而, 缓变包络近似成立的条件是 $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$, 其中 $\Delta\omega$ 是脉冲谱宽(FWHM), ω_0 是载波频率。对于宽带脉冲光束,

$\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ 条件不再成立, 如果仍然采用缓变包络近似理论研究, 得到的解会出现不符合物理意义的非光束行为(即出现空间奇异性)^[2,4]。多色光(宽带光)的研究必须采用严格的复解析信号(CAS), 这样可以避免非光束行为的出现^[4,13]。因此在脉冲光束的研究中, 正确选择研究方法是必要的。本文对双曲正割脉冲非光束的复振幅包络解和复解析信号解进行了比较研究, 得出了对脉冲光束物理模型的建立以及对其相关特性研究有意义的新结果。

收稿日期: 2004-06-02; 收到修改稿日期: 2004-09-06

基金项目: 国家 863 计划(2004AA845010)资助项目。

作者简介: 彭润伍(1971—), 男, 湖南绥宁人, 中国科学院上海光学精密机械研究所博士研究生, 主要从事激光传输和高功率激光研究。E-mail: pengrunwu@siom.ac.cn

2 双曲正割脉冲光束的传输公式

对于脉冲光束的传输,每一频率成分均满足波动方程

$$(\nabla^2 + k^2)E(r, z, \omega) = 0, \quad (1)$$

其中 ∇^2 是拉普拉斯算子, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $k = \omega/c$ 是波数。近轴近似下波动方程的解可写为^[2,14]

$$E(r, z, \omega) = \frac{iz_R}{z + iz_R} \times \exp\left\{-ik\left[\frac{r^2}{2(z + iz_R)} + z\right] + i\varphi\right\} S(\omega), \quad (2)$$

其中 $z_R = k\omega_0^2/2$ 为高斯光束瑞利距离(ω_0 为束腰宽度), $S(\omega)$ 是频率域空间初始时($z = 0$) 仅与频率有关的轴上光强。空间域脉冲光束的解可由(2)式作傅里叶变换得到

$$E(r, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{iz_R S(\omega)}{z + iz_R} \times \exp\left\{i\omega\left[t - \frac{z}{c} - \frac{r^2}{2c(z + iz_R)}\right]\right\} d\omega, \quad (3)$$

(3)式已略去与时间无关的相差 φ 。对于等衍射长度光束, z_R 与频率无关,从而将含有 z_R 的因子提出积分式后得到

$$E(r, z, t) = \frac{iz_R}{z + iz_R} S(\tau), \quad (4)$$

其中

$$S(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega, \quad (5)$$

$$\tau = t - \frac{z}{c} - \frac{r^2}{2c(z + iz_R)}, \quad (6)$$

严格来说脉冲复数表示为复解析信号。(5)式中 $S(\omega) = 2s(\omega)\theta(\omega)$, 其中

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0 \\ 0, & \omega \leq 0 \end{cases}$$

是阶跃函数,则

$$S(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} s(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (7)$$

其中

$$s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-i\omega t) dt = \frac{1}{2} [g(\omega - \omega_0) + g^*(-\omega - \omega_0)], \quad (8)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (9)$$

对于双曲正割脉冲,(8)式中 $s(t)$ 的形式为

$$s(t) = A(t) \cos(\omega_0 t), \quad (10)$$

式中 $A(t) = \text{sech}\left(a \frac{t}{T}\right)$, $a = 2\ln(1 + \sqrt{2})$ 。(7)式则可写为复解析信号表示式

$$S_{\text{CAS}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \int_0^{\infty} [g(\omega - \omega_0) + g^*(-\omega - \omega_0)] \exp(i\omega t) d\omega. \quad (11)$$

在窄带脉冲 $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ 情况下, $g(\omega - \omega_0)$ 仅在 ω_0 附近一小段取值,忽略 $g^*(-\omega - \omega_0)$ 项且可将下限从 0 扩展到 $-\infty$ ^[4], 则

$$S_{\text{CAE}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega - \omega_0) \exp(i\omega t) d\omega = A(t) \exp(i\omega_0 t), \quad (12)$$

(12)式即为复振幅包络表示式,是复解析信号表示式(11)式在窄带脉冲 $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ 条件下的近似。所以当 $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ 时,在缓变包络近似下, $S(\tau)$ 采用(12)式表示,代入(4)式得到

$$E_{\text{CAE}}(r, z, t) = \frac{iz_R}{z + iz_R} \text{sech}(a\tau\omega_0\gamma) \exp(i\omega_0\tau), \quad (13)$$

其中 $\gamma = \Delta\omega/\omega_0 = 1/\omega_0 T$ 表示带宽。然而对于宽带脉冲光束, $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ 条件不成立,缓变包络近似失效, $S(\tau)$ 必须采用(11)式的复解析信号表示式。对(11)式积分后代入(4)式得到

$$E_{\text{CAS}}(r, z, t) = \frac{iz_R}{z + iz_R} \left(\frac{2}{\pi - ia\tau\omega_0\gamma} \right) \left\{ \exp\left(\frac{\pi}{2a\gamma}\right) {}_2F_1\left[1, \frac{1}{2} - i\frac{a\tau\omega_0\gamma}{\pi}, \frac{3}{2} - i\frac{a\tau\omega_0\gamma}{\pi}, -\exp\left(\frac{\pi}{a\gamma}\right)\right] + \exp\left(-\frac{\pi}{2a\gamma}\right) {}_2F_1\left[1, \frac{1}{2} - i\frac{a\tau\omega_0\gamma}{\pi}, \frac{3}{2} - i\frac{a\tau\omega_0\gamma}{\pi}, -\exp\left(-\frac{\pi}{a\gamma}\right)\right] \right\}, \quad (14)$$

其中 ${}_2F_1[\]$ 为超几何函数。

3 数值计算和分析

计算参量均取 $\omega_0 = 1 \text{ mm}$, $\lambda_0 = 1064 \text{ nm}$, 即 $\omega_0 =$

1.77 fs^{-1} ($T_0 = 3.55 \text{ fs}$)。图 1(a) 是 $\gamma = 0.32$ 脉冲光束光场的实部在 $z = z_R = 2.95 \times 10^3 \text{ mm}$ 处不同径向距离时的时间波形。从图中看出传输方向的中心轴上($r = 0$) 复振幅包络解的实部(虚线)与复解析信号

解的实部(实线)差异很小,二者在轴外的差异则随径向距离增加而增大。图 1(b)是 $\gamma=0.054$ 脉冲光束光场的实部在 $z=z_R=2.95 \times 10^3$ mm 处不同径向距离时的时间波形。复振幅包络解的实部(虚线)与复解析信号解的实部(实线)已趋于一致,曲线重合在一起。图 1 说明宽带脉冲光束的复振幅包络解和复解析信号解存在较大的差异,而窄带脉冲光束的两种解是一致的。从图 1 还可以看到两种解的轴外脉冲峰值相对于轴中心脉冲峰值存在时间延迟,这个复数时间移动由(6)式得出为 $r^2/[2c(z+iz_R)]$ 。另外,(6)式还表现出脉冲光束的时空耦合和频率移动现象,类似于文献[2,4,6]中所详细讨论的。

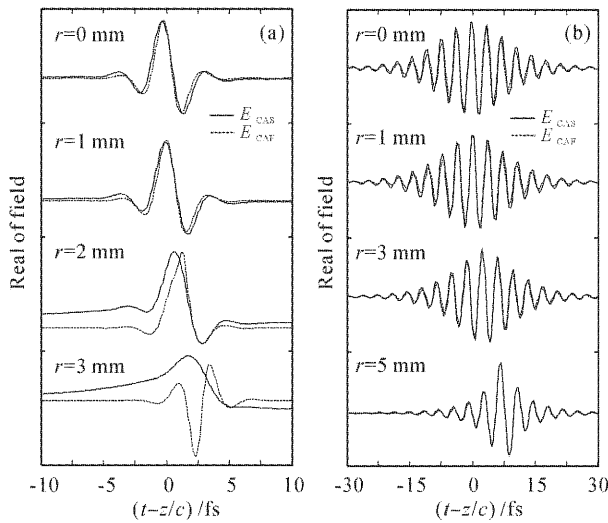


图 1 脉冲光束光场实部在 $z=z_R=2.95 \times 10^3$ mm 处的时间波形。(a) $\gamma=0.32$; (b) $\gamma=0.054$

Fig. 1 Temporal waveforms of the real of pulsed beams at $z=z_R=2.95 \times 10^3$ mm. (a) $\gamma=0.32$; (b) $\gamma=0.054$

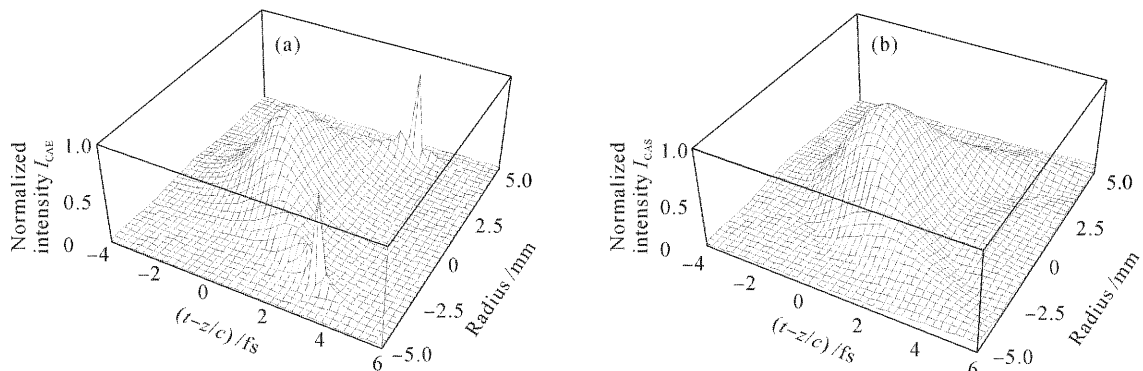


图 2 $\gamma=0.32$ 脉冲光束在 $z=2z_R=5.9 \times 10^3$ mm 处的径向和时间波形

Fig. 2 Radial and temporal waveforms of pulsed beams with $\gamma=0.32$ at $z=2z_R=5.9 \times 10^3$ mm

脉冲光束的复振幅包络解和复解析信号解最大的差别在于前者存在奇异性。图 2 是带宽 $\gamma=0.32$ ($T=1.77$ fs) 的脉冲光束传输到 $z=2z_R=5.9 \times 10^3$ mm 处的径向和时间波形。从图中看出,沿传输方向的轴中心 ($r=0$) 及其附近的 $I_{CAE}(r,z,t) = |E_{CAE}(r,z,t)|^2$ 与 $I_{CAS}(r,z,t) = |E_{CAS}(r,z,t)|^2$ 分布相似,但在轴外一定距离处 $I_{CAE}(r,z,t)$ 出现了奇异点,而 $I_{CAS}(r,z,t)$ 则没有奇异点。图 3 是带宽 $\gamma=0.054$ ($T=10.5$ fs) 的脉冲光束传输到 $z=30z_R=8.85 \times 10^4$ mm 处的径向和时间波形。可以看出在图示范围内 $I_{CAE}(r,z,t)$ 与 $I_{CAS}(r,z,t)$ 的分布一致。结果表明,宽带脉冲光束的复振幅包络解由于存在奇异点,与复解析信号解存在较大的差异,而窄带时二者是一致的。必须指出的是窄带脉冲光束的复振幅包络解仍然存在奇异点,只是其位置在离传输方向的轴中心 ($r=0$) 较远的地方,这从图 4 可以看出。图 4 是复振幅包络解的奇异点径向位置 r_s 随带宽的变化。因为较大带宽时复振幅包络解随 r 增加而增大直至出现奇异性的过程较为缓慢,计算中把两种解差别较大时的位置即作为奇异点的位置,二者差值较小并随带宽变窄而减小,最终趋于一致。从图 4 看出奇异点随带宽的减小和传输距离的增大而远离轴中心 ($r=0$)。计算可知带宽 $\gamma=0.054$ ($T=10.5$ fs) 的脉冲光束在 $z=0$ 处的奇异点到轴中心的距离约为 4.05 mm,而对于较大带宽 $\gamma=0.32$ ($T=1.77$ fs) 结果约为 1.65 mm。

从图 4 知道复振幅包络解肯定存在奇异点,只是其位置随带宽不同而有变化。但在计算作图时发现,图形中奇异点的出现还与考察时的取样间隔有关。

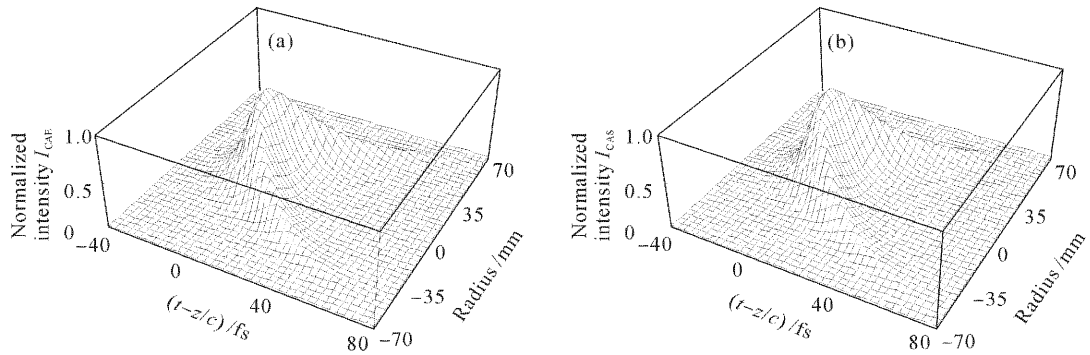


图 3 $\gamma=0.054$ 脉冲光束在 $z=30z_R=8.85 \times 10^4$ mm 处的径向和时间波形

Fig. 3 Radial and temporal waveforms of pulsed beams with $\gamma=0.054$ at $z=30z_R=8.85 \times 10^4$ mm

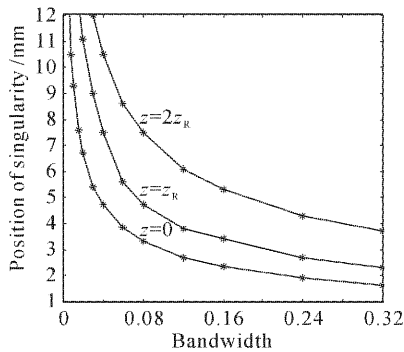


图 4 奇异点径向位置 r_s 随脉冲带宽 γ 的变化

Fig. 4 Radial position r_s of singularity versus pulse bandwidth γ

图 5(a)是 $z=0$ 和 $t=0$ 处 $\gamma=0.054$ ($T=10.5$ fs) 的脉冲光束的光场分布。该图的取样间隔为 100 nm, 即约为波长的 0.1 倍。由图 4 可知此时在 $r=4.05$ mm 处应该有奇异点, 但图中没有出现。然而当把取样间

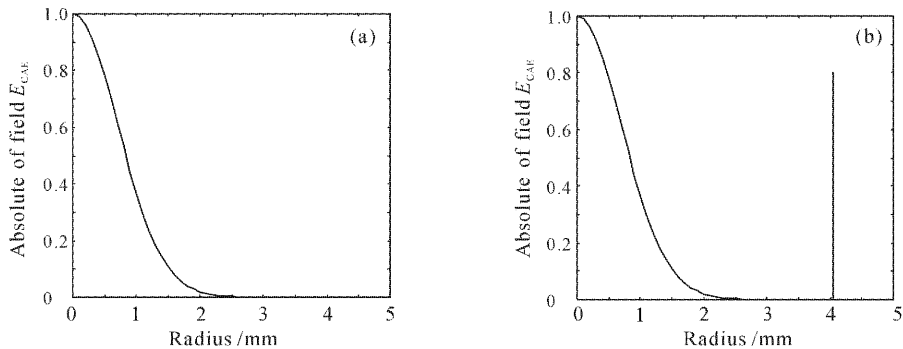


图 5 $\gamma=0.054$ 脉冲光束在不同取样间隔时 $z=0$ 和 $t=0$ 处场振幅的径向波形。

(a) 取样间隔 100 nm 时场振幅的径向波形; (b) 取样间隔 10 nm 时场振幅的径向波形

Fig. 5 Field radial waveforms of pulsed beams at $z=0$ and $t=0$ with $\gamma=0.054$ with different sample interval sample interval, (a) 100 nm; (b) 10 nm

隔定为 10 nm 时, 得到同样条件下在 $r=4.05$ mm 处出现了奇异点。由此可知, 选取恰当的取样间隔可以使脉冲光束的奇异性消失。如果把取样间隔为波长 0.1 倍时奇异点没有出现作为可以忽略光束奇异性一个条件, 则在 $z=0$ 处脉宽 $\gamma \leq 0.054$ ($T \geq 10.5$ fs) 时脉冲光束的复振幅包络解与复解析信号解是一致的。此时奇异点出现的位置 r_s 已经大于 $4r_{w0}$, 对传输轴中心 ($r=0$) 附近的光场分布没有影响。因此, 参考文献[2]的研究方法对于窄带脉冲光束是适用的。严格来说 $\gamma=0.054$ 的脉冲光束不能称为窄带脉冲光束。本文把 $\gamma=0.054$ 的脉冲光束包括在窄带脉冲光束中是因为在考虑的范围 $\gamma=0.054$ 脉冲光束的复包络解和复解析信号解已趋于一致。很显然, 在本文规定的条件下, 对于 $\gamma \leq 0.054$ 的脉冲光束可以使用窄带条件下才成立的缓变包络近似。

4 结 论

本文对双曲正割脉冲光束的复振幅包络解和复

解析信号解进行了比较研究。文献[13]提出的复解析信号表示式因未作任何近似, 因而是适合所有带

宽脉冲光束的研究方法。而复振幅包络表示式是在缓变包络近似下引入的表示式,由该式得到的脉冲光束解会出现奇异性。数值计算结果表明,对于宽带脉冲光束,复振幅包络解的奇异点出现在传输方向轴中心较近的位置,这时复振幅包络解不能正确描述脉冲光束,因此不能采用复振幅包络表示式。但是对于 $\gamma \leq 0.054$ 的窄带脉冲光束,复振幅包络解的奇异点远离轴中心,其轴中心附近的场分布与复解析信号解是一致的,此时可以采用复振幅包络表示式。因而对于脉冲光束的研究应根据具体情况确定所采用的研究方法。所得到的结果对脉冲光束研究方法的选取具有参考意义。

参 考 文 献

- 1 A. M. Weiner, J. P. Heritage, E. M. Kirschner. High-resolution femtosecond pulse shaping [J]. *J. Opt. Soc. Am. B*, 1988, **5**(8): 1563~1572
- 2 Zhangyang Wang, Zhengquan Zhang, Zhizhan Xu *et al.*. Space-time profiles of an ultrashort pulsed Gaussian beam [J]. *IEEE J. Quantum Electron.*, 1997, **33**(4): 566~573
- 3 Zhongyong Liu, Dianyuan Fan. Propagation of pulsed zeroth-order Bessel beams [J]. *J. Mod. Opt.*, 1998, **45**(1): 17~21
- 4 Miguel A. Porras. Ultrashort pulsed Gaussian light beams [J]. *Phys. Rev. E*, 1998, **58**(1): 1086~1093
- 5 Fu Xiquan, Guo Hong, Hu Wei *et al.*. Invalidation of the slowly-varying envelope approximation and producing and eliminating of the spatial singularity for ultrashort pulsed-beam propagation in free space [J]. *Acta Physica Sinica*, 2001, **50**(9): 1693~1698
傅喜泉,郭弘,胡巍等. 超短脉冲光束传输缓变包络近似理论的失效和空间奇异性的形成与消除 [J]. *物理学报*, 2001, **50**(9): 1693~1698
- 6 Miguel A. Porras. Diffraction effects in few-cycle optical pulses [J]. *Phys. Rev. E*, 2002, **65**(2-2): 026606-1~026606-10
- 7 Lu Xingqiang, Qian Liejia, Fan Dianyuan. Theory and simulation of amplified pulses from chirped-pulse laser amplifier [J]. *Chinese J. Lasers*, 2002, **A29**(10): 882~884
卢兴强,钱列加,范滇元. 啁啾脉冲激光放大器输出光束时间特性的理论和数值模拟 [J]. *中国激光*, 2002, **A29**(10): 882~884
- 8 Daquan Lu, Wei Hu, Yizhou Zheng *et al.*. Propagation of pulsed beam beyond the paraxial approximation in free space [J]. *Opt. Commun.*, 2003, **228**: 217~223
- 9 Zeng Zhinan, Li Ruxin, Xu Zhizhan. Effect of the absolute carrier phase of a few-cycle laser pulses on the generation of attosecond pulse [J]. *Acta Optica Sinica*, 2003, **23**(3): 317~320
曾志男,李儒新,徐至展. 激光脉冲绝对相位对产生阿秒脉冲的影响 [J]. *光学学报*, 2003, **23**(3): 317~320
- 10 Song Jien, Huang Yongqing, Guo Yong *et al.*. Transmission properties of the strong pulse in fiber gratings [J]. *Chinese J. Lasers*, 2003, **30**(11): 1003~1005
宋继恩,黄永清,郭勇等. 强脉冲在光纤光栅中的传输特性 [J]. *中国激光*, 2003, **30**(11): 1003~1005
- 11 Wu Ping, Zhuang Jian, Lü Baida. A new method for producing flat-topped beams: Hermite-Gaussian beam combination [J]. *Chinese J. Lasers*, 2004, **31**(1): 48~52
吴平,庄建,吕百达. 一种产生平顶光束的新方法: 厄米-高斯光束的合成 [J]. *中国激光*, 2004, **31**(1): 48~52
- 12 Lu Daquan, Hu Wei, Zheng Yizhou *et al.*. The influence of vectorial effect on the non-paraxial propagation of ultrashort pulsed beam in free space [J]. *Acta Optica Sinica*, 2004, **24**(1): 52~56
陆大全,胡巍,郑一周等. 矢量效应对超短脉冲光束非傍轴传输的影响 [J]. *光学学报*, 2004, **24**(1): 52~56
- 13 M. Born, E. Wolf. Principles of Optics [M]. 7th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1999
- 14 A. E. Siegman. Lasers [M]. Sausalito: University Science Books, 1986