

DOI: 10.3969/j.issn.1007-5461.2024.01.009

玻色-爱因斯坦凝聚与光场作用的保真度

格日乐¹, 萨楚尔夫^{2*}, 格根图雅², 宫艳丽³

(1 内蒙古大学创业学院, 内蒙古 呼和浩特 010070;
2 内蒙古师范大学物理与电子信息学院, 内蒙古 呼和浩特 010022;
3 内蒙古电子信息职业技术学院, 内蒙古 呼和浩特 010020)

摘要: 利用量子信息论和数值计算方法, 对Pólya场态与玻色-爱因斯坦凝聚原子相互作用系统的量子态保真度演化问题进行了研究。讨论了玻色-爱因斯坦凝聚原子间的相互作用强度、Pólya场态概率参数和分布参数, 以及这些物理参数如何影响量子态保真度随时间的演化。研究表明: 上述三种物理参量均可调制信号传输中的量子态保真度, 其中光场概率参数 η 对量子态保真度的变化影响最大, 当 $\eta=0.01$ 时, 量子信息保真度的值非常接近信息理想传输的情形; 另一方面, 凝聚原子间的耦合强度越大, 量子态保真度呈现出的周期性振荡也越强, 但量子态保真度的取值范围不变。

关键词: 量子光学; 保真度; 玻色-爱因斯坦凝聚原子; Pólya态光场

中图分类号: O431.2 文献标识码: A 文章编号: 1007-5461(2024)01-00095-08

Fidelity of quantum states in a system of atomic Bose-Einstein condensate interacting with light field

Gerile¹, Sachuerfu^{2*}, Gegentuya², GONG Yanli³

(1 Pioneer College, Inner Mongolia University, Hohhot 010070, China;
2 College of Physics and Electronic Information, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China;
3 Inner Mongolia Electronic Information Vocational Technical College, Hohhot 010020, China)

Abstract: The evolution properties of quantum information fidelity in a system of atomic Bose-Einstein condensate interacting with Pólya field state have been studied using quantum information theory and numerical calculation methods. The influences of the coupling intensity among the atoms of Bose-Einstein condensates, and the probability and distribution parameters of Pólya light field on the fidelity of quantum state are mainly focused. The results indicate that the fidelity of quantum information during the transmission depends on the coupling intensity among the atoms, as well as the optical field parameters. Among the three physical parameters, the probability parameter of the light field η have a crucial effect on the fidelity of quantum state. When $\eta=0.01$, the fidelity of quantum information is very close to that in ideal transmission process for information. On the other hand, the oscillating frequency of the system

基金项目: 内蒙古自治区高等学校科学技术研究项目 (NJZY21293, NJZY20279), 内蒙古大学创业学院自然科学基金 (N2021025)

作者简介: 格日乐 (1980 -), 女, 内蒙古赤峰人, 硕士, 副教授, 主要从事量子光学方面的研究。E-mail: 1165177481@qq.com

收稿日期: 2022-05-06; 修改日期: 2022-07-25

*通信作者。E-mail: sacrf@imnu.edu.cn

fidelity would have the larger values with the increasing of coupling intensity among the atoms of Bose-Einstein condensate, but the range of system fidelity values remains unchanged.

Key words: quantum optics; fidelity; Bose-Einstein condensate; Pólya state field

0 引言

在量子光学和量子通信领域进行量子计算、量子密集编码时,要考虑量子态的保真度问题。1994年,Joza^[1]首先使用保真度来描述量子信息在传输过程中保持原来状态的程度,它也是用来度量量子通信质量、量子计算可靠性以及量子复制精确度的一个关键参数^[2-9]。量子信息由量子态承载,而一般情况下量子态在传输过程中是不断变化的,因而在随时间演化的系统中须考虑量子态保真度问题^[7-10]。量子态的保真度对量子通信、量子计算都有重要的意义^[11,12],探究量子信息在信息传输过程中如何演化是令人感兴趣的课题。近年来人们对某些系统中的保真度问题进行了深入探讨,得到了一些有意义的结果,如一个或多个二能级原子与典型非经典光场态(数态、相干态)相互作用系统中量子态保真度随时间的演化规律等^[8-14]。玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)^[10,13]是人们持续关注的一种重要的量子物理现象。Pólya态光场^[15,16]是量子光学中一种典型的构造态量子光场,通过改变这一模型中的若干参数,可使其呈现出十分特殊的光场量子统计特性。而对Pólya态光场与BEC原子相互作用系统中的量子态保真度随时间演化问题的研究,还尚未见文献报道。

本文运用量子信息理论和数值计算方法,研究了BEC原子与构造态场-Pólya态场相互作用系统中量子信息保真度的演化特性,通过调节Pólya态场的概率参数、分布参数及BEC原子间的耦合作用强度的值,探寻上述参数如何影响量子信息保真度的演化特性,理解量子信息保真度在此模型系统的不同参数条件下随时间演化的物理实质。

1 理论模型及其解

BEC原子与光场相互作用系统的哈密顿量可表示为

$$H = H_a + H_f + H_{fa} + H_{aa}, \quad (1)$$

式中: H_a 为裸原子哈密顿量, H_f 代表光场哈密顿量, H_{fa} 表示光场-原子相互作用哈密顿量, H_{aa} 为原子-原子间相互作用哈密顿量。在二次量子化后的粒子数表象中,分别表示为^[17]

$$\begin{cases} H_a = \omega_0 b_c^+ b_c \\ H_f = \omega a^+ a \\ H_{fa} = \varepsilon (a + a^+) (b_g^+ b_c^+ + b_g b_c + b_g^+ b_c + b_g b_c^+) = \varepsilon (a + a^+) (b_g^+ b_c + b_g b_c^+) \\ H_{aa} = \Omega (b_g^+ b_g^+ b_g b_g + b_c^+ b_g^+ b_g b_g + b_g^+ b_c^+ b_g b_c + b_c^+ b_c^+ b_c b_c) \end{cases} \quad (2)$$

式中 b_i^+ 和 b_i ($i = g, e$) 分别表示原子(基态和激发态)的产生和湮灭算符。

考虑系统中的构造态场为弱光场的情况,为了更清楚地描述凝聚原子间的相互作用对系统能量的影响,以便于系统动力学方程的求解,采用著名的 Bogoliubovs 近似^[18-20],即哈密顿量中的 b_g 和 b_g^+ 分别用 $\sqrt{N_0} e^{-i\theta}$ 和 $\sqrt{N_0} e^{i\theta}$ 代替,令 $b_c = b$ 、 $b_c^+ = b^+$,忽略非能量守恒项 $b_c^+ b_c^+ b_c b_c$,则系统的总哈密顿量可简化表示为

$$H = (\omega_0 + 2N_0\Omega) b^+ b + \omega a^+ a + \varepsilon \sqrt{N_0} (a^+ b e^{i\theta} + a b^+ e^{-i\theta}) + N_0^2 \Omega, \quad (3)$$

式中 a^+ (a) 表示腔场中单模光子的产生(湮灭)算符, b^+ (b) 是凝聚原子的产生(湮灭)算符, ε 表征光场与原子相互作用强度, 而 ω_0 、 ω 分别表征凝聚原子本征跃迁频率和单频辐射场频率^[8-10]。由哈密顿量可看出, 原子间相互作用使基态和激发态之间的原始原子能隙从 ω_0 增加到 $\omega_0 + 2N_0\Omega$, 增量 $\Delta = 2N_0\Omega$ 中, N_0 为原子数。

在共振条件($\omega = \omega_0$)下, 求解系统的海森堡运动方程

$$i\dot{a} = [a, H] = \omega a + \varepsilon \sqrt{N_0} b e^{i\theta}, \quad (4)$$

$$i\dot{b} = [b, H] = \varepsilon \sqrt{N_0} a e^{-i\theta} + (\omega_0 + 2N_0\Omega) b, \quad (5)$$

得到

$$a(t) = \alpha_a(t)a(0) + \beta_a(t)b(0), \quad (6)$$

$$b(t) = \alpha_b(t)a(0) + \beta_b(t)b(0), \quad (7)$$

式中

$$\alpha_a(t) = \frac{e^{-i(\omega + N_0\Omega)t}}{\gamma} [\gamma \cos(\gamma t) + iN_0\Omega \sin(\gamma t)], \quad (8)$$

$$\beta_a(t) = -i \frac{\sqrt{N_0} \varepsilon}{\gamma} e^{-i(\omega + N_0\Omega)t} \sin(\gamma t) e^{i\theta}, \quad (9)$$

$$\alpha_b(t) = -i \frac{\sqrt{N_0} \varepsilon}{\gamma} e^{-i(\omega + N_0\Omega)t} \sin(\gamma t) e^{-i\theta}, \quad (10)$$

$$\beta_b(t) = \frac{e^{-i(\omega + N_0\Omega)t}}{\gamma} [\gamma \cos(\gamma t) - iN_0\Omega \sin(\gamma t)], \quad (11)$$

$$\gamma = \sqrt{N_0(\varepsilon^2 + N_0\Omega^2)}. \quad (12)$$

初始时刻, 量子场处于 Pólya 态光场

$$|\varphi(0)\rangle_f = |M, l, \eta\rangle = \sum_{n=0}^M [P_n^M(l, \eta)]^{1/2} |n\rangle, \quad (13)$$

式中

$$\begin{cases} P_n^M(l, \eta) = \binom{M}{n} \frac{\eta(\eta+1) \cdots [\eta + (n-1)l] \bar{\eta}(\bar{\eta}+1) \cdots [\bar{\eta} + (M-n-1)l]}{(1+l)(1+2l) \cdots [1 + (M-1)l]}, \\ \bar{\eta} = 1 - \eta \end{cases}, \quad (14)$$

式中: M 表示最大光子数; l 为光场分布参数, 取值为正实数; $\eta \in [0, 1]$ 表示光场概率参数。光子数分布为 $|\langle n|M, l, \eta\rangle|^2 \equiv P_n^M(l, \eta)$, 对应概率论中的 Pólya 态分布。当 $l \rightarrow 0$ 时, $|\varphi(0)\rangle_f$ 将约化为二项式态; $M \rightarrow \infty$ 、 $l \rightarrow 0$ 、 $\eta \rightarrow 0$ 、 $M\eta = \lambda$ 、 $Ml = \rho^{-1}$ 时, $|\varphi(0)\rangle_f$ 处于负二项式态。

在 Bogoliubovs 近似下, 初始时刻发生 BEC 的原子均处于原子基态, 湮灭算符 b_g 的本征态为 $|\beta\rangle_g$, 而原子的激发态为真空态 $|0\rangle_c$, 光场制备于 Pólya 态 $|\varphi(0)\rangle_f = |M, l, \eta\rangle$, 系统初始时刻的态矢为

$$|\psi(0)\rangle = |\beta\rangle_g \otimes |0\rangle_c \otimes |\varphi(0)\rangle_f = |\beta, 0, \varphi(0)\rangle. \quad (15)$$

在任意时刻, 系统的态矢演化为

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^M [P_n^M(l, \eta)]^{1/2} [C_n^k]^{1/2} [\alpha_a^*(-t)]^{n-k} [\beta_a^*(-t)]^k |\beta, k, n-k\rangle, \quad (16)$$

式中演化算符 $U(t) = \exp(-iHt)$, H 为系统总哈密顿量。

2 量子态保真度概念

保真度表示量子态在传输过程中保持原来状态的程度^[8-10], 其定义为

$$F = \left[\text{Tr} \left(\sqrt{\rho(0)} \rho(t) \sqrt{\rho(0)} \right)^{1/2} \right]^2, \quad (17)$$

式中: $\rho(0)$ 为初态密度矩阵算符, $\rho(t)$ 为终态密度算符。保真度 $0 \leq F \leq 1$, 其中 $F=1$ 对应理想的信息传输过程, $F=0$ 对应信息在传输过程中完全失真, $0 < F < 1$ 表明量子态在传输过程中不能保持原来状态而存在一定程度的失真现象^[8-10]。

由量子态传输中的保真度概念, 量子系统、辐射态场、产生 BEC 原子的量子态保真度数学表示形式^[8-10] 可分别表示为

$$F_s = \text{Tr} \{ \rho(0) \rho(t) \}, \quad (18)$$

$$F_f = \text{Tr} \{ \rho_f(0) \rho_f(t) \}, \quad (19)$$

$$F_b = \text{Tr} \{ \rho_b(0) \rho_b(t) \}. \quad (20)$$

根据保真度数学形式求解得到系统、光场、BEC 原子的量子态保真度可分别表示为

$$F_s = \sum_{n=0}^M [P_n^M(l, \eta)]^2 |\alpha_a(-t)|^{2n}, \quad (21)$$

$$F_f = \sum_{n=0}^M \sum_{k=0}^n [P_n^M(l, \eta)]^2 C_n^k |\alpha_a(-t)|^{2n} |\beta_a(-t)|^{2k}, \quad (22)$$

$$F_b = \sum_{n=0}^M [P_n^M(l, \eta)] |\alpha_a(-t)|^{2n}. \quad (23)$$

3 量子态保真度的演化

为方便起见, 取 $N_0 = 1000$ 、 $\omega = 1$ 、 $\varepsilon = 1$, 将(8)、(9)式代入(21)~(23)式中, 利用数值模拟方法分析量子系统、光场、凝聚原子的量子信息保真度随时间的演化, 讨论凝聚原子间的耦合常数 Ω 、光场概率参数 η 、光场分布参数 l 对量子信息保真度 F_s 、 F_f 和 F_b 的影响。

图1~3描述了光场与 BEC 原子相互作用系统中, 量子系统、光场、凝聚原子的量子信息保真度分别随时间的演化特性。由图1~3可见, 当 $\eta = 0.01$ 、 $l = 1$ 、 Ω 分别取 0.001、0.005、0.01 时, 系统、光场、原子的量子信息保真度随时间均以周期振荡形式变化, 且保真度取值均较大; 当 Ω 逐渐增大时, 周期振荡加剧, 但振荡的幅值不变, 这表明 Ω 的改变只影响耦合系统量子信息保真度的振荡频率而不改变其幅值, 通过适当改变 Ω 的强弱可调控量子态传输的失真变化模式。

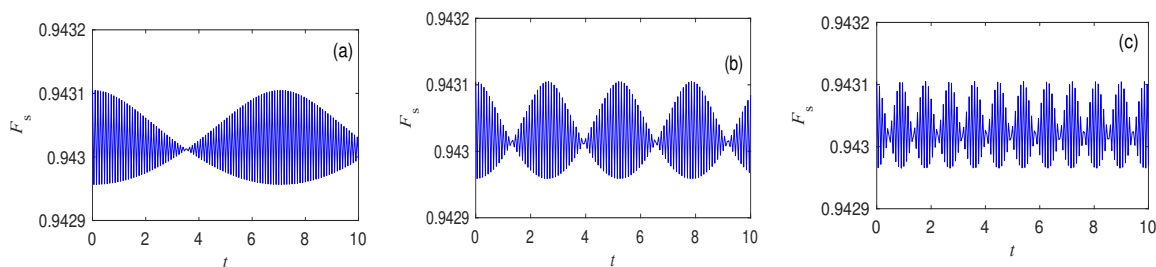


图 1 当 $l=1, \eta=0.01$ 时 Ω 对 F_s 的影响。(a) $\Omega = 0.001$; (b) $\Omega = 0.005$; (c) $\Omega = 0.01$

Fig. 1 Influence of Ω on F_s with $l=1, \eta=0.01$. (a) $\Omega = 0.001$; (b) $\Omega = 0.005$; (c) $\Omega = 0.01$

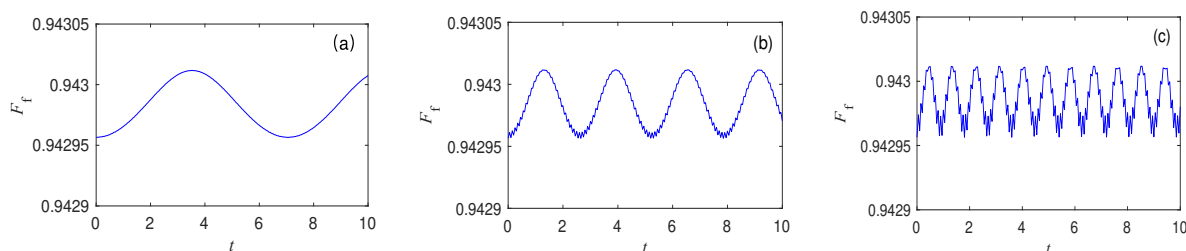


图 2 当 $l=1, \eta=0.01$ 时 Ω 对 F_r 的影响。(a) $\Omega = 0.001$; (b) $\Omega = 0.005$; (c) $\Omega = 0.01$

Fig. 2 Influence of Ω on F_r with $l=1, \eta=0.01$. (a) $\Omega = 0.001$; (b) $\Omega = 0.005$; (c) $\Omega = 0.01$

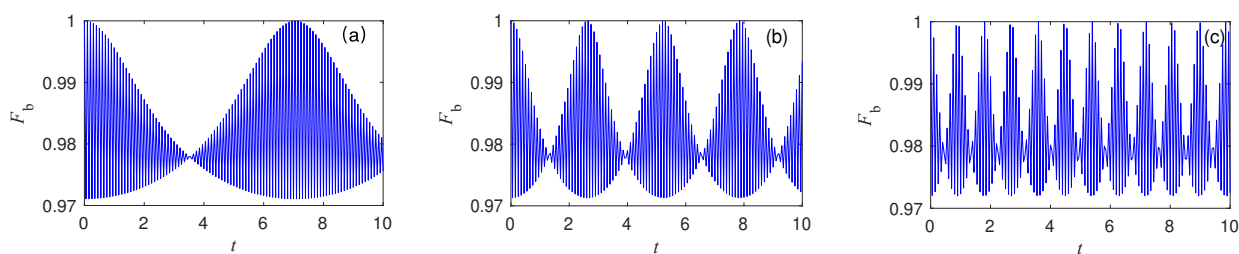


图 3 当 $l=1, \eta=0.01$ 时 Ω 对 F_b 的影响。(a) $\Omega = 0.001$; (b) $\Omega = 0.005$; (c) $\Omega = 0.01$

Fig. 3 Influence of Ω on F_b with $l=1, \eta=0.01$. (a) $\Omega = 0.001$; (b) $\Omega = 0.005$; (c) $\Omega = 0.01$

图4~6给出了 $\Omega = 0.005$ 、 $l=1$ 、 η 分别为 0.01、0.1、0.5 时, 构造态光场与产生 BEC 现象的原子相互作用系统中量子耦合系统的三种量子态保真度的时间演化图像。由图可见 Ω 、 l 取确定值而改变 η 时, 系统、光场、原子的量子信息保真度的变化仍然呈现为振荡形式; 当 $\eta=0.01$ 时, 三种保真度的取值均较大; η 的值增大时, F_s 和 F_r 取值显著减小, 幅值振荡范围均显著下移, 呈现出明显失真现象, 特别在 η 较大时, F_r 趋于 0, 即接近完全失真态。由图 6 可见 F_b 则呈现为振荡范围越来越大, 在某些时刻原子态保真度取值为 1, 对应这些时刻无失真现象发生, 而当 $\eta = 0.5$ 时, 可看到原子态保真度的最小值在 0.2 附近, 表明在对应时刻出现了较大的失真情况, F_b 的取值范围变大。对比 F_s 、 F_r 和 F_b 随 η 变化的过程, 不难看出 F_r 的变化最明显, 表明 F_r 对 η 的变化更敏感, 故可采用减小 η 的方法来提高量子态保真度。另外, 还可以观察到 η 的改变对量子耦合系统、光场及原子的量子态保真度的振荡频率不产生影响。

图7~9给出了原子间的耦合强度 $\Omega = 0.005$ 、 $\eta=0.6$ 、 l 分别为 1、5、10 时, 系统中的量子信息保真度 F_s 、 F_r 和 F_b 随时间的演化特性。由图可知, 在 $\Omega = 0.005$ 、 $\eta=0.6$ 时, 随着 l 的增大, F_s 、 F_r 和 F_b 的振荡曲线均上

移, 保真度的平均值均增大, F_s 、 F_f 振荡曲线的最大和最小值都变大, F_b 随振荡曲线的最小值变大, 这些振荡曲线的振荡频率则保持不变。这表明, 在其他参数确定的条件下, 增大光场分布参数也可以适当提高上述三个量子态保真度的值。

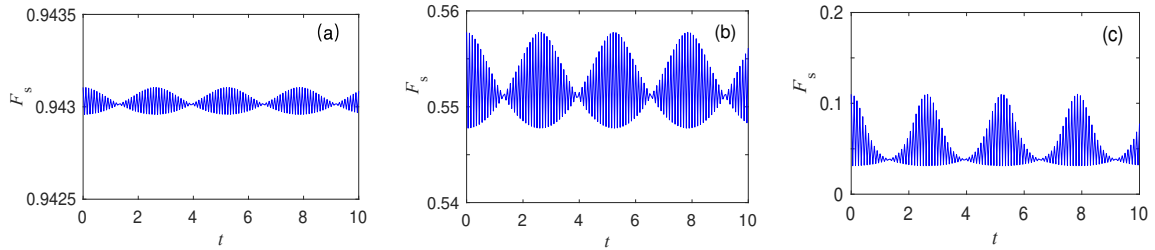


图4 当 $\Omega = 0.005$, $l = 1$ 时 η 对 F_s 的影响。(a) $\eta = 0.01$; (b) $\eta = 0.1$; (c) $\eta = 0.5$

Fig. 4 Influence of η on F_s with $\Omega = 0.005$, $l = 1$. (a) $\eta = 0.01$; (b) $\eta = 0.1$; (c) $\eta = 0.5$

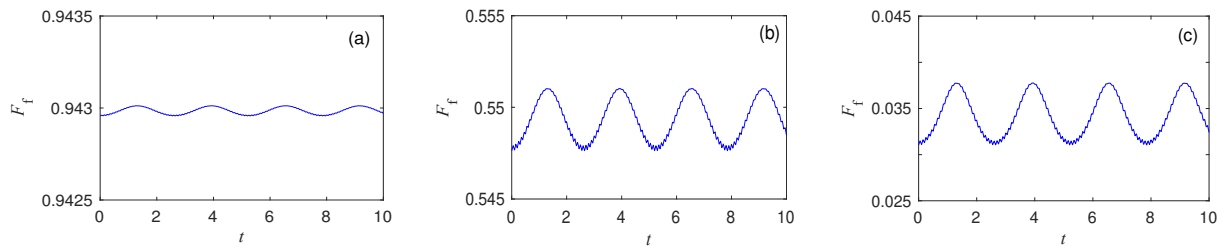


图5 当 $\Omega = 0.005$, $l = 1$ 时 η 对 F_f 的影响。(a) $\eta = 0.01$; (b) $\eta = 0.1$; (c) $\eta = 0.5$

Fig. 5 Influence of η on F_f with $\Omega = 0.005$, $l = 1$. (a) $\eta = 0.01$; (b) $\eta = 0.1$; (c) $\eta = 0.5$

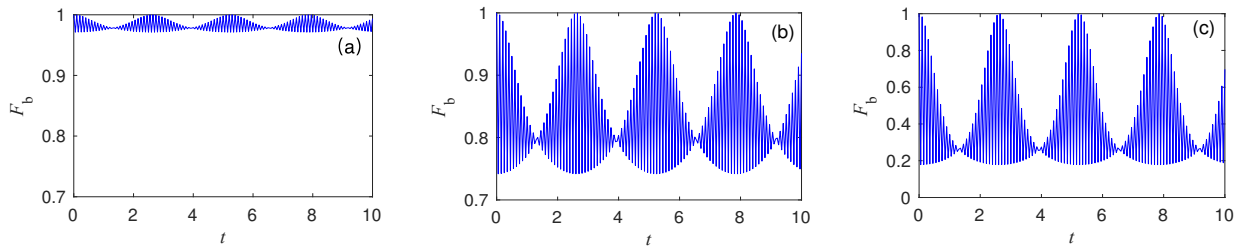


图6 当 $\Omega = 0.005$, $l = 1$ 时 η 对 F_b 的影响。(a) $\eta = 0.01$; (b) $\eta = 0.1$; (c) $\eta = 0.5$

Fig. 6 Influence of η on F_b with $\Omega = 0.005$, $l = 1$. (a) $\eta = 0.01$; (b) $\eta = 0.1$; (c) $\eta = 0.5$

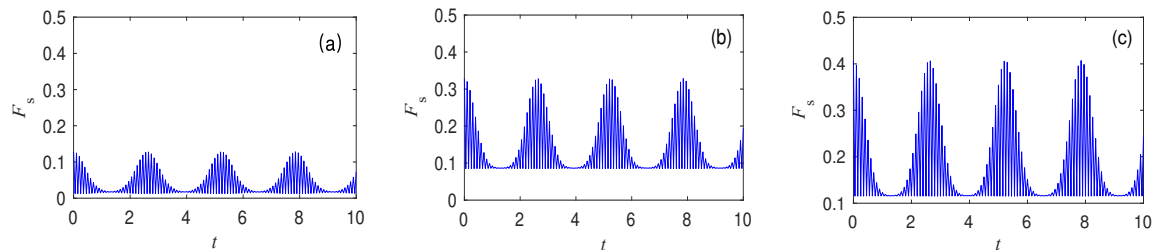


图7 当 $\Omega = 0.005$, $\eta = 0.6$ 时 l 对 F_s 的影响。(a) $l = 1$; (b) $l = 5$; (c) $l = 10$

Fig. 7 Influence of l on F_s with $\Omega = 0.005$, $\eta = 0.6$. (a) $l = 1$; (b) $l = 5$; (c) $l = 10$

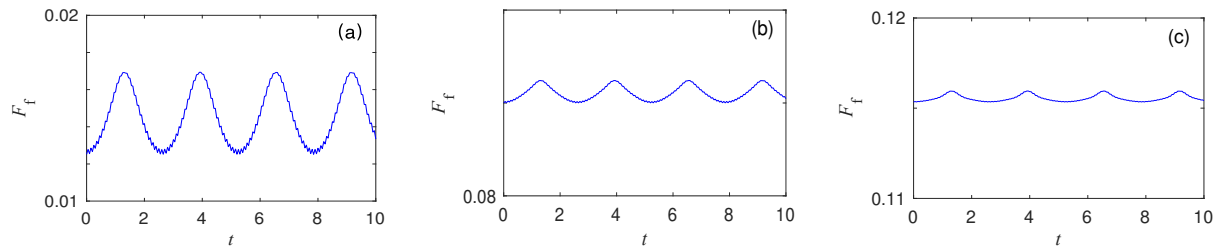


图 8 当 $\Omega = 0.005$, $\eta = 0.6$ 时 l 对 F_f 的影响。(a) $l=1$; (b) $l=5$; (c) $l=10$

Fig. 8 Influence of l on F_f with $\Omega = 0.005$, $\eta = 0.6$. (a) $l=1$; (b) $l=5$; (c) $l=10$

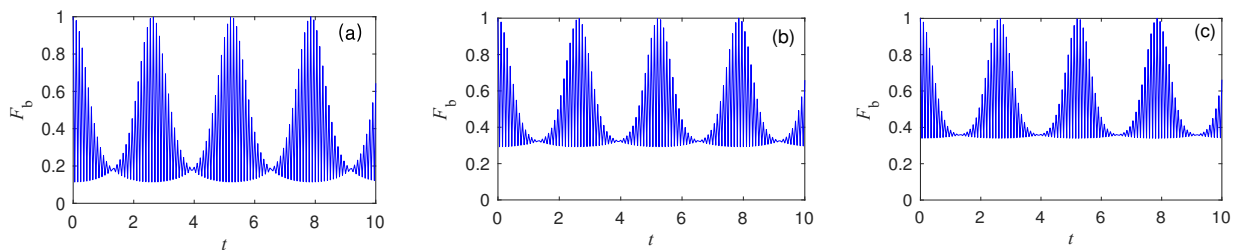


图 9 当 $\Omega = 0.005$, $\eta = 0.6$ 时 l 对 F_b 的影响。(a) $l=1$; (b) $l=5$; (c) $l=10$

Fig. 9 Influence of l on F_b with $\Omega = 0.005$, $\eta = 0.6$. (a) $l=1$; (b) $l=5$; (c) $l=10$

4 结 论

运用量子态保真度理论和数值计算的方法,研究了 Pólya 态光场与 BEC 原子相互作用系统中量子态保真度随时间的演化。分析了 BEC 原子间的耦合强度、Pólya 态光场概率参数和分布参数对量子态保真度演化特性的影响。结果表明光场概率参数、光场分布参数保持不变的条件下, BEC 原子间的耦合强度对量子态保真度的振荡频率有调制作用,而不改变量子态保真度振荡的幅值范围; Pólya 态的光场概率参数是影响量子信息保真度幅值大小的主要因素,当光场概率参数值较小时,三个量子态保真度均取较大值,表明失真程度较低;当光场分布参数变化时,随光场分布参数的增大,三种量子态保真度的平均值也有随之增大的趋势。通过恰当选取 Pólya 态光场概率参数和光场分布参数,可实现具有较高保真度的量子信息传输,研究结果在实际应用方面具有潜在价值。

参考文献:

- [1] Jozsa R. Fidelity for mixed quantum states [J]. *Journal of Modern Optics*, 1994, 41(12): 2315-2323.
 - [2] Nielsen M A, Chuang I L. *Quantum Computation and Quantum Information* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2000: 87-92.
 - [3] Alber G, Beth T, Horodecki M, et al. *Quantum Information: An Introduction to Basic Theoretical Concepts and Experiments* [M]. Berlin, Germany: Springer, 2001: 14-18.
 - [4] He Q L, Ding M, Song X S, et al. Non-classical correlations and quantum state transfer in nonlinear atom-cavity-fiber system with Kerr medium [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2021, 38(3): 382-392.
- 贺启亮, 丁敏, 宋晓书, 等. 非线性原子-腔-光纤系统中的量子关联转移和量子态传输 [J]. 量子电子学报, 2021, 38(3): 382-392.

- [5] Jones J A, Jaksch D. *Quantum Information, Computation and Communication* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2012: 54-78.
- [6] Scully M O, Zubairy M S. *Quantum Optics* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [7] Guo G C, Zhou X F. *Quantum Optics* [M]. Beijing: Science Press, 2022: 102-119.
郭光灿, 周祥发. 量子光学 [M]. 北京: 科学出版社, 2022: 102-119.
- [8] Lu D M. Evolution of fidelity in the system of atoms interacting with coupled cavities [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2015, 44(6): 0627001.
卢道明. 原子与耦合腔相互作用系统中量子态保真度演化 [J]. 光子学报, 2015, 44(6): 0627001.
- [9] Gerile, Sachuerfu, Zhang C H. Fidelity of quantum state for interacting system of S-cat state light field and atomic Bose-Einstein condensate [J]. *Journal of Atomic and Molecular Physics*, 2009, 26(3): 557-564.
格日乐, 萨楚尔夫, 张彩花. 玻色-爱因斯坦凝聚原子与 Schrödinger 猫态相互作用系统中的保真度 [J]. 原子与分子物理学报, 2009, 26(3): 557-564.
- [10] Davis K B, Mewes M O, Andrews M R, *et al.* Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms [J]. *Physical Review Letters*, 1995, 75(22): 3969-3973.
- [11] Kwek L C, Cao L, Luo W, *et al.* Chip-based quantum key distribution [J]. *AAPPS Bulletin*, 2021, 31(1): 15.
- [12] Xu G F, Tong D M. Realizing multi-qubit controlled nonadiabatic holonomic gates with connecting systems [J]. *AAPPS Bulletin*, 2022, 32(1): 13-18.
- [13] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, *et al.* Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor [J]. *Science*, 1995, 269(5221): 198-201.
- [14] Li J N, Sachuerfu, Zhao Q Q. Fidelity for quantum state of a moving two-level atom interacting with Number-Chaotic state light via multi-photon transition [J]. *Journal of Quantum Optics*, 2018, 24(1): 47-54.
李婧楠, 萨楚尔夫, 赵姗姗. 多光子跃迁下 the Number-Chaotic 态光场与运动二能级原子相互作用系统的保真度 [J]. 量子光学学报, 2018, 24(1): 47-54.
- [15] Gegentuya B, Sachuerfu S, Gerile Z. Different correlations in a system of two entangled atoms interacting with the Pólya state field [J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2020, 59(9): 2951-2965.
- [16] Jia H J, Sachuerfu, Zhang C H. The quantum entanglement in a system of two atoms in Bell state interacting with Pólya state light [J]. *Journal of Quantum Optics*, 2017, 23(4): 316-325.
贾怀杰, 萨楚尔夫, 张彩花. Pólya 态光场与 Bell 态双原子相互作用系统的量子纠缠 [J]. 量子光学学报, 2017, 23(4): 316-325.
- [17] Liu T K, Wang J S, Liu X J, *et al.* Influence of entangled states of atomic dipole-dipole interaction on the fidelity of quantum states [J]. *Acta Physica Sinica*, 2000, 49(4): 708-712.
刘堂昆, 王继锁, 柳晓军, 等. 纠缠态原子偶极间相互作用对量子态保真度的影响 [J]. 物理学报, 2000, 49(4): 708-712.
- [18] Liu B Y, Sun X B, Liu W Y, *et al.* Fidelity of quantum states in the nonlinear J-C model of trapped ion [J]. *Journal of Atomic and Molecular Physics*, 2021, 38(4): 120-125.
刘宝元, 孙小斌, 刘王云, 等. 囚禁离子非线性 J-C 模型量子态保真度 [J]. 原子与分子物理学报, 2021, 38(4): 120-125.
- [19] Ni G J, Chen S Q. *Advanced Quantum Mechanics* [M]. Shanghai: Fudan University Press, 2000: 372-379.
倪光炯, 陈苏卿. 高等量子力学 [M]. 上海: 复旦大学出版社, 2000: 372-379.
- [20] Duan L M, Guo G C. Perturbative expansions for the fidelities and spatially correlated dissipation of quantum bits [J]. *Physical Review A*, 1997, 56(6): 4466-4470.