

DOI: 10.3969/j.issn.1007-5461.2024.01.017

# 忆阻 Sprott-R 混沌系统的复杂动态分析与电路实现

曾繁鹏, 赖强\*, 赖聪

(华东交通大学电气与自动化工程学院, 江西 南昌 330013)

**摘要:** 基于 Sprott-R 三维混沌系统, 提出了一个具有多稳态和调幅特性的简单四维忆阻混沌系统。首先分析了系统的稳定性, 发现该系统具有无穷多个不稳定平衡点。进而利用 Lyapunov 指数谱、分岔图及相平面图, 研究了该忆阻混沌系统的复杂动力学行为特性。研究表明, 当系统参数发生变化时, 系统会经反倍周期分岔由混沌态进入周期态; 在不同初始条件下, 系统能产生三种共存吸引子, 分别为双混沌吸引子共存、周期极限环与混沌吸引子共存、双周期极限环共存; 当初始条件变化时, 系统输出四维混沌信号的幅度均发生变化。最后, 对该系统进行了电路设计与仿真, 验证了该忆阻混沌系统的存在性。

**关键词:** 光电子学; 忆阻混沌系统; 共存吸引子; 调幅控制; 电路实现

**中图分类号:** O415.5 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-5461(2024)01-00170-14

## Complex dynamic analysis and circuit realization of memristive Sprott-R chaotic system

ZENG Fanpeng, LAI Qiang\*, LAI Cong

(School of Electrical and Automation Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

**Abstract:** A simple four-dimensional memristive chaotic system with multistability and amplitude modulation characteristics is constructed based on three-dimensional Sprott-R chaotic system. Firstly, the system's stability characteristics are analyzed, and it is found that the system has infinite unstable equilibrium points. And then, the complex dynamical behaviors of the memristive chaotic system are studied using Lyapunov exponential spectrum, bifurcation diagram and the projection of chaotic attractors on the phase plane. The results show that when the system parameters change, the system will change from chaotic state to periodic state through inverse periodic bifurcation. And under different initial conditions, the system can generate three kinds of coexistence attractors, namely chaotic attractors coexistence, periodic limit cycle and chaotic attractor coexistence, and periodic limit cycles coexistence.

**基金项目:** 国家自然科学基金 (61961019), 江西省自然科学基金青年重点项目 (20202ACBL212003)

**作者简介:** 曾繁鹏 (2002 -), 女, 江西赣州人, 本科生, 主要从事混沌理论与应用方面的研究。E-mail: zengfp02@126.com

**导师简介:** 赖强 (1987 -), 江西赣州人, 博士, 副教授, 硕士生导师, 主要从事非线性系统分析与控制、多媒体信息安全、群体智能优化算法、复杂网络方面的研究。E-mail: Laiqiang87@126.com

**收稿日期:** 2022-04-24; **修改日期:** 2022-05-24

\*通信作者。

In addition, when the initial conditions change, the amplitude of the four-dimensional chaotic signals will change. Finally, the circuit design and realization of the system are carried out to further verify the existence of the new system.

**Key words:** optoelectronics; memristive chaotic system; coexisting attractors; amplitude modulation; circuit realization

## 0 引言

1971年, 忆阻器的概念首次被华裔学者蔡少棠教授提出<sup>[1]</sup>。2008年, 惠普实验室成功研发忆阻器物理模型<sup>[2]</sup>, 由此掀起了忆阻器研究热潮。忆阻器独特的记忆功能使忆阻系统极易产生多稳态行为, 而纳米级尺寸结构、低功耗的优良特征使其应用于混沌系统时能够减小电路尺寸和降低电路能耗, 因此在混沌学领域具有广阔的发展空间。

深入研究忆阻器的电学特性并应用于混沌系统已成为近年来的重要研究方向之一。忆阻混沌系统相比于一般的混沌系统具有更复杂的动力学行为和更丰富的类随机现象, 因此在图像加密、神经网络、保密通信等领域具有重要应用价值<sup>[3-8]</sup>。现阶段构造忆阻混沌系统的方法主要有: 一种是基于经典电路理论搭建新系统, 另一种是使忆阻器替换经典系统中的某一元件或作为经典系统的反馈项进而构造新系统。文献[9]使用电感、电容和磁控忆阻器三种元件串联构建了一个最简忆阻混沌电路, 实现了该系统的硬件电路并对混沌的生成路径进行了分析。文献[10]通过将两个忆阻器、一个电感和一个电容串并联的方式实现了一个新的四维混沌系统, 该系统能够产生混沌状态转移。文献[11]运用一个忆阻器替换 Chua 电路<sup>[1]</sup>中的电阻后提出了一个具有无穷多个稳定与不稳定平衡点的四维混沌系统。文献[12]使用忆阻器替换 Chua 二极管设计了一种四维忆阻混沌电路, 并在此基础上构建了基于忆阻混沌同步的保密通信电路, 实验结果表明该电路具有良好的抗干扰性能。文献[13]在 Lorenz 系统的基础上, 将磁控型忆阻器作为反馈项构建新系统, 利用所提出的模糊控制器实现了两种忆阻 Lorenz 混沌系统的同步。文献[14]基于 Sprott-B 系统, 引入忆阻反馈项构建了一个新的忆阻超混沌系统, 该系统存在多吸引子共存现象, 可用于保密通信设计。文献[15]使用一个磁控忆阻器去替换改进的四维 Lü 混沌系统中的耦合参数, 得到了一个具有超级多稳态的五维忆阻超混沌系统。多稳态作为非线性系统中广泛存在的一种现象, 是指系统在仅改变初始条件情况下的状态转换。系统存在多个状态, 能够提高系统的环境适应能力, 增强系统的灵活性、鲁棒性和柔韧性。因此, 研究混沌系统中的多稳态共存现象具有重要意义<sup>[16,17]</sup>。文献[18]提出了一个新的多稳态四维混沌系统, 其共存类型包含六个周期吸引子、四个周期吸引子和两个混沌吸引子、两个周期吸引子和三个混沌吸引子等。文献[19]基于蔡氏振荡电路设计了一个新型五维忆阻混沌系统, 该系统含有两个忆阻器且具有 12 种共存吸引子, 但未对其进行电路实现。文献[20]构建了一个含有两项非线性项的极简单混沌系统, 该系统具有无限多个共存混沌吸引子。文献[21]提出并实现了一个能够产生多涡卷、多翼及暂态混沌的无电感忆阻混沌系统。

混沌特性在一定程度上易受到系统参数的影响, 即系统参数的微动或误差易引起系统动力学行为的变化, 其实际应用也受限于此。而调幅控制能够在不改变系统混沌特性的情况下改变输出信号的幅度, 进而提高输出信号的强度。因此, 研究高复杂、可调控的混沌信号源十分必要。近年来学者们在该方向上也取得了一定的研究成果。文献[22]在 Sprott 系统中引入控制参数实现混沌锁定, 锁定后的系统具有恒指数谱特

性、线性与非线性调幅特性。文献[23]提出了一种不改变 Lyapunov 指数而控制输出混沌信号幅度的一般方法,即在混沌数学模型的二次项中引入控制函数,该方法基于 Lorenz 系统得以验证。文献[24]基于经典 Qi 系统构造了一个具有四种混沌吸引子的新型混沌系统,该系统存在多种全局和局部非线性调幅参数且具有多参数恒 Lyapunov 指数谱特性。

本文将忆阻器引入 Sprott-R 三维混沌系统,设计了一个同时具备多共存吸引子和调幅特性的简单四维忆阻混沌系统。研究了该系统的复杂动力学行为和电路实现,结果表明该系统存在多种类型的共存吸引子现象,并且具有随系统初值变化的调幅特性。目前暂无相关文献基于 Sprott-R 系统设计忆阻混沌系统,因此本文所提系统是一个全新的系统,且其结构较现有许多系统更为简单,动力学行为更为丰富。此外基于初始条件改变的调幅特性在已有系统中并不多见,该系统丰富的动力学行为能够为保密通信、图像加密等混沌应用领域提供更多的可能。

## 1 新的忆阻混沌系统

考虑如下三维 Sprott-R 混沌系统<sup>[25]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = a - y \\ \dot{y} = b + z \\ \dot{z} = xy - z \end{cases}, \quad (1)$$

取参数  $a=0.9, b=0.4$ , 初始条件为  $[1, 1, 1]$ , 其混沌吸引子在相平面上的投影如图 1 所示, Lyapunov 指数分别为:  $LE_1=0.0635, LE_2=0, LE_3=-1.0635$ 。由基尔霍夫电压定律得系统 (1) 的等效电路方程为

$$\begin{cases} C_1 \dot{v}_x = \frac{a}{R_1} - \frac{v_y}{R_2} \\ C_2 \dot{v}_y = \frac{b}{R_3} + \frac{v_z}{R_4} \\ C_3 \dot{v}_z = \frac{v_x v_y}{R_5} - \frac{v_z}{R_6} \end{cases}. \quad (2)$$

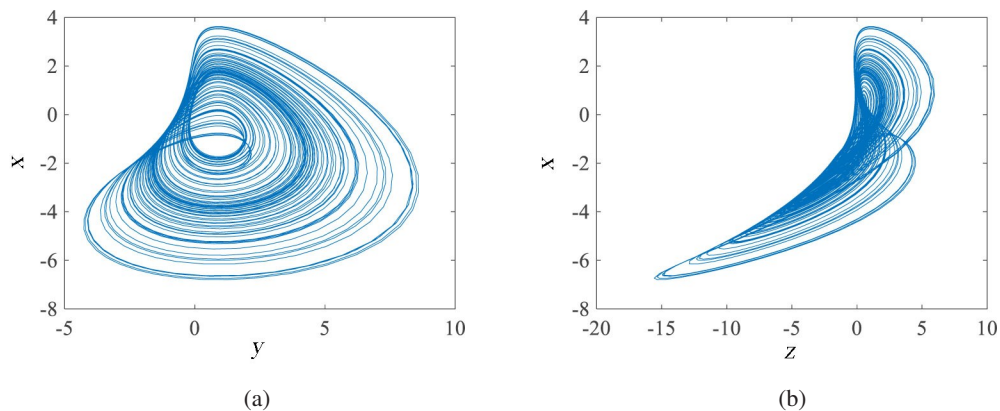


图1 Sprott-R 系统的混沌吸引子。(a) x-y; (b) x-z

Fig. 1 Chaotic attractor for Sprott-R system. (a) x-y; (b) x-z

本研究选用三次型磁控忆阻器。三次型磁控忆阻器是指具有光滑的三次单调上升的非线性特性曲线的元件,其数学表达式  $q(\phi)$  可表示为

$$q(\phi) = \alpha\phi + \beta\phi^3, \tag{3}$$

式中  $\alpha$ 、 $\beta$  为与忆阻器有关的实数, 并且满足条件  $\alpha > 0, \beta > 0, \phi$  为磁通,  $q$  为电荷。电荷随磁链的变化率表示为  $W(\phi)$ , 也称忆导函数, 表达式为

$$W(\phi) = \frac{dq(\phi)}{d\phi} = \alpha + 3\beta\phi^2. \tag{4}$$

流经忆阻器的电流以及忆阻器两端的电压分别可表示为

$$\begin{cases} i = W(\phi)v = (\alpha + 3\beta\phi^2)v \\ v = \frac{d\phi}{dt} \end{cases}. \tag{5}$$

三次型磁控忆阻器的伏安特性曲线是一条在原点紧缩的类"8"字型紧磁滞回线, 如图 2 所示。

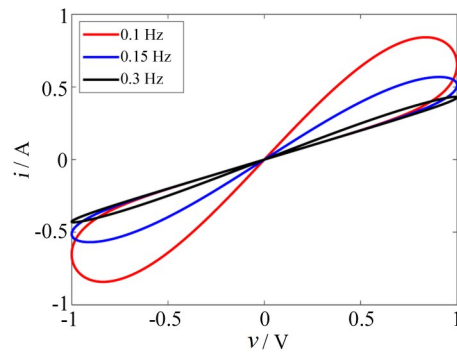


图 2 三次型磁控忆阻器"8"字型伏安特性曲线

Fig. 2 "8" type voltammetric characteristic curve of cubic magneto memristor

基于上述 Sprott-R 三维混沌系统, 在系统 (2) 的第二个方程中使用忆阻反馈项替代常数项, 设计电路如图 3 所示。

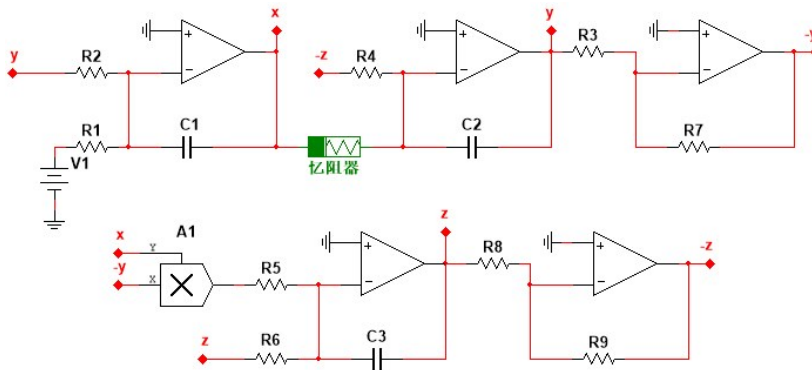


图 3 忆阻 Sprott-R 混沌电路

Fig. 3 Sprott-R chaotic system with memristor

构建的忆阻混沌系统的电路方程可表示为

$$\begin{cases} C_1 \dot{v}_x = \frac{a}{R_1} - \frac{v_y}{R_2} \\ C_2 \dot{v}_y = \frac{v_z}{R_4} + W(\phi)v_x, \\ C_3 \dot{v}_z = \frac{v_x v_y}{R_5} - \frac{v_z}{R_6} \end{cases} \tag{6}$$

化简得系统 (6) 的无量纲方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = a - y \\ \dot{y} = z + W(w)x \\ \dot{z} = xy - z \\ \dot{w} = x \end{cases}, \quad (7)$$

式中  $W(w) = b + cw^2$ , 与前述忆导函数模型一致。选定  $a, b, c$  为系统参数, 当  $a = 0.9, b = 0.4, c = 0.1$ , 且初始条件为  $[-4, -2, 10, 4]$  时, 系统 (7) 的混沌吸引子在相平面上的投影如图 4 所示。

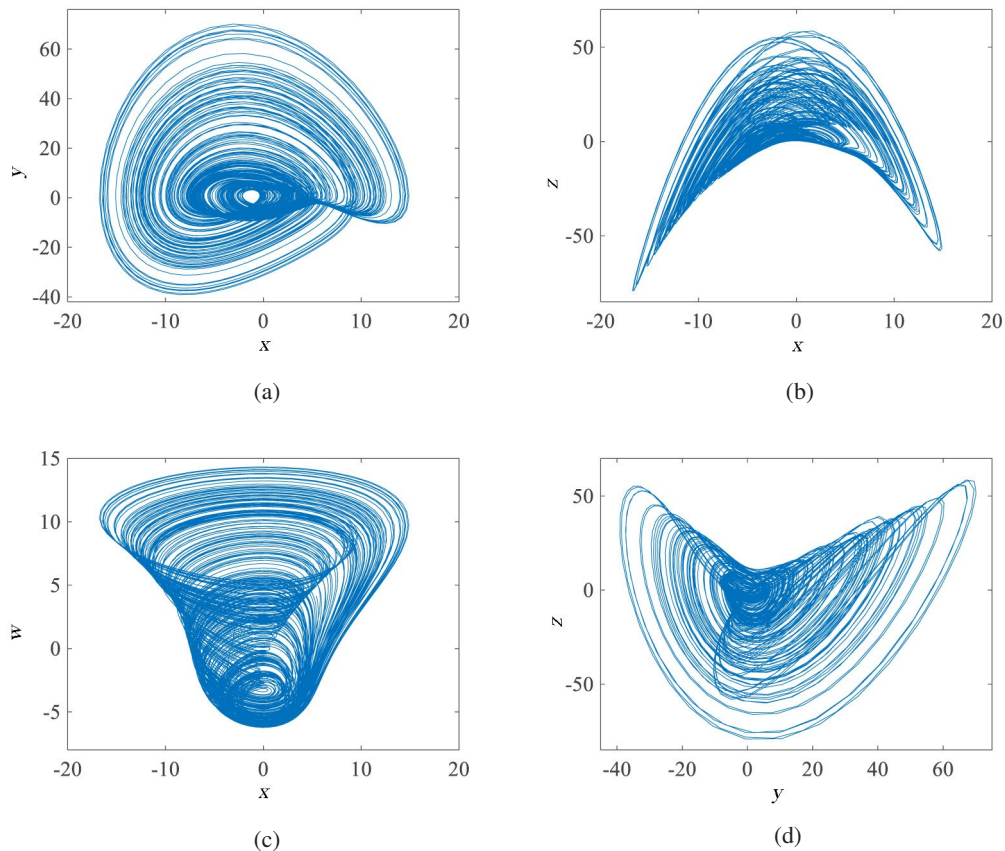


图 4 系统 (7) 的混沌吸引子。(a)  $x-y$ ; (b)  $x-z$ ; (c)  $x-w$ ; (d)  $y-z$

Fig. 4 Chaotic attractor for system (7). (a)  $x-y$ ; (b)  $x-z$ ; (c)  $x-w$ ; (d)  $y-z$

## 2 动力学行为分析

### 2.1 Lyapunov 指数和维数

取  $a = 0.9, b = 0.4, c = 0.1$  且初始条件  $[-4, -2, 10, 4]$  时, 利用 Wolf 方法计算系统 (7) 的 Lyapunov 指数可得  $LE_1 = 0.1721, LE_2 = 0, LE_3 = -0.0511, LE_4 = -1.0209$ 。该系统有一个正的 Lyapunov 指数, 表明系统满足混沌条件。

该四阶忆阻混沌系统的 Lyapunov 维数可表示为

$$D = n + \frac{1}{|LE_{n+1}|} \sum_{i=1}^n LE_i = 3 + \frac{0.121}{1.0209} = 3.1185, \quad (8)$$

式中  $n$  表示满足  $\sum_{i=1}^n LE_i > 0$  条件的最大整数值。计算结果为  $D = 3.1185$ , 进一步说明该忆阻系统是混沌的。



## 2.2 耗散性

由系统 (7) 可得

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = 0 + 0 - 1 + 0 = -1 \quad (9)$$

显然  $\nabla V < 0$ , 满足耗散性条件, 因此该系统是耗散的, 且以指数方程  $dV/dt = e^{-t}$  收敛。体积元  $V_0$  在  $t$  时刻将收缩为体积元  $V_0 e^{-t}$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时, 包含系统轨线的每个体积元都以指数率 -1 收缩到零。这表明系统的轨迹最终会被限制在一个零体积区域内, 最终固定在一个吸引子上。

## 2.3 平衡点及稳定性

令  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{w} = 0$ , 得系统的平衡点集为

$$E = \{(x, y, z, w) \mid x = z = 0, y = a, w = k\}, \quad (10)$$

式中  $k$  为任意实数,  $a$  为系统参数, 表明系统存在无穷的平衡点集。在平衡点处对系统进行线性化, 得到其 Jacobian 矩阵为

$$J_E = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ b + ck^2 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

将特征方程  $|J_E - \lambda E| = 0$  代入矩阵  $J_E$  得到  $\lambda^4 + \lambda^3 + (b + ck^2)\lambda^2 + (a + b + ck^2)\lambda = 0$ 。取系统参数值分别为  $a = 0.9$ ,  $b = 0.4$ ,  $c = 0.1$ , 代入上述特征方程可得  $\lambda^4 + \lambda^3 + (0.4 + 0.1k^2)\lambda^2 + (1.3 + 0.1k^2)\lambda = 0$ 。由 Routh - Hurwitz 判据可知, 在给定其它参数值的情况下, 无论  $k$  取何值, 系统的平衡点均不稳定。当  $k$  值取 0 时, 平衡点为  $S(0, 0, 0.9, 0)$ , 求得系统的特征值分别为  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0.1936 + 0.9485i$ ,  $\lambda_3 = 0.1936 - 0.9485i$ ,  $\lambda_4 = -1.3872$ , 故平衡点  $S$  为不稳定的平衡点。

## 2.4 参数改变对系统的影响

该系统具有无穷的平衡点集和不稳定点, 说明其可能存在丰富的动力学行为特性。为进一步探索其动力学行为特性, 下面分析系统参数变化时的 Lyapunov 指数谱与分岔图。

### 1) 参数 $a$ 变化时系统的动力学行为

给定系统参数  $b = 0.4$ ,  $c = 0.1$ , 初始条件  $[-4, -2, 10, 4]$ , 改变参数  $a$ , 绘制系统在  $a \in [0.4, 2.4]$  条件下的 Lyapunov 指数谱和分岔图如图 5 所示, 两图表现轨迹基本一致。由 Lyapunov 指数谱可知, 系统参数  $a$  在区间  $[0.4, 1.44]$ ,  $[1.55, 1.96]$  的最大 Lyapunov 指数大于零, 说明系统在  $[0.4, 1.44]$ 、 $[1.55, 1.96]$  两个区间内能够产生混沌。观察分岔图, 结果同样体现了系统在  $[0.4, 1.44]$ 、 $[1.55, 1.96]$  两个区间内处于混沌状态。

系统随参数  $a$  变化时, 混沌吸引子、周期轨道在  $x$ - $y$  平面上的相图如图 6 所示。当  $a \in [0.4, 1.44]$  时, 系统处于混沌状态, 对应图 6(a)、(b); 当  $a \in (1.44, 1.55)$  时, 系统进入周期状态, 对应图 6(c); 当  $a \in [1.55, 1.96]$  时, 系统再次进入混沌态, 对应图 6(d); 当  $a \in (1.96, 2.4]$  时, 系统经反倍周期分岔退出混沌进入稳态, 对应图 6(e)、(f)。通过图 6(d)、(e)、(f) 能够直观地看出系统经过反倍周期分岔退出混沌态的过程。

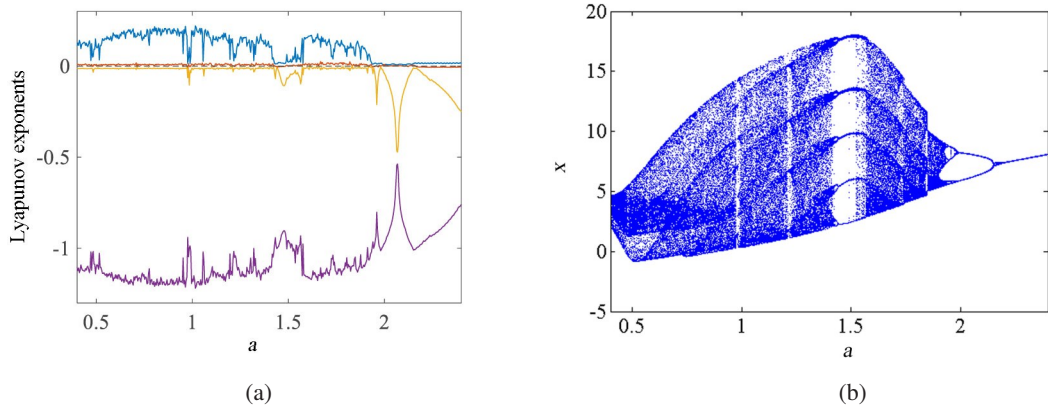


图5 系统参数  $a \in [0.4, 2.4]$  时系统 (7) 的 Lyapunov 指数谱 (a) 和分岔图 (b)

Fig. 5 The Lyapunov exponential spectrum (a) and bifurcation diagram (b) of system (7) change with  $a$  and  $a \in [0.4, 2.4]$

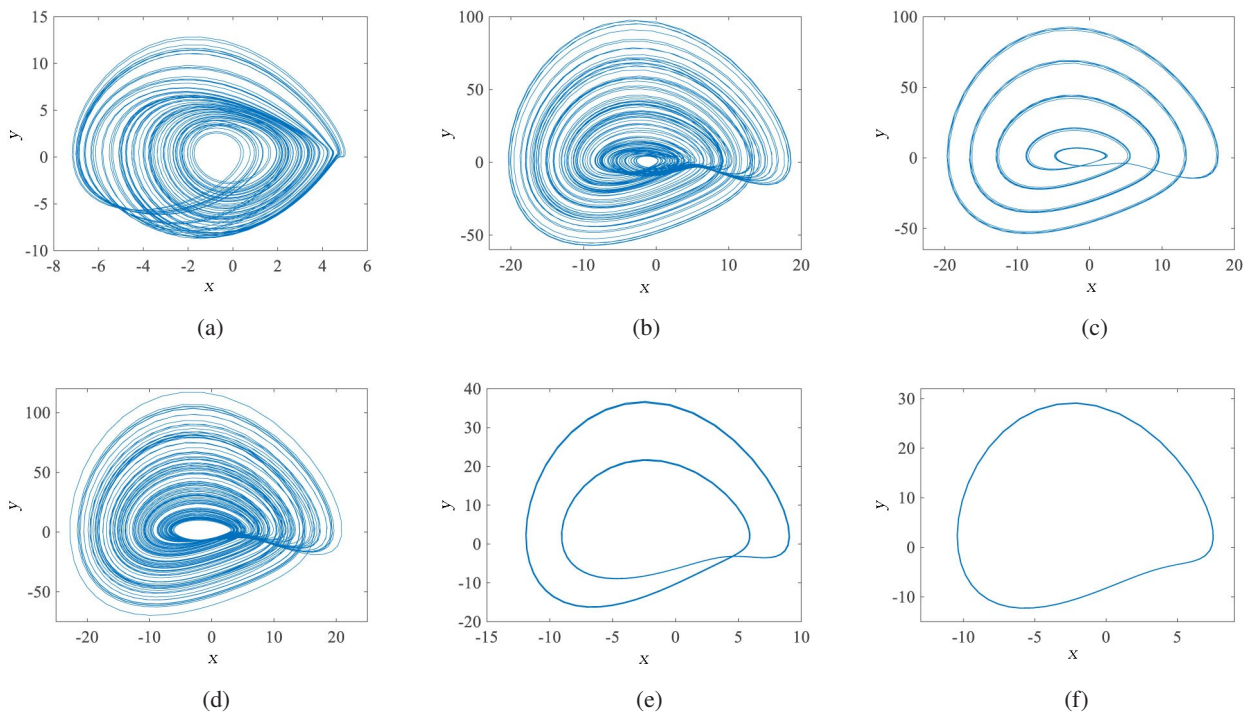


图6 系统 (7) 随参数  $a$  变化时在  $x$ - $y$  平面的投影。(a)  $a=0.45$ ; (b)  $a=1.15$ ; (c)  $a=1.45$ ; (d)  $a=1.75$ ; (e)  $a=2.1$ ; (f)  $a=2.25$

Fig. 6 Projection of system (7) on  $x$ - $y$  plane with  $a$ . (a)  $a=0.45$ ; (b)  $a=1.15$ ; (c)  $a=1.45$ ; (d)  $a=1.75$ ; (e)  $a=2.1$ ; (f)  $a=2.25$

2) 参数  $b$  变化时系统的动力学行为

给定系统参数  $a=0.9, c=0.1$ , 初始条件为  $[-4, -2, 10, 4]$ , 改变系统参数  $b$  的大小, 令  $b \in [0.1, 2.1]$  绘制 Lyapunov 指数谱和分岔图如图7所示, 两图表现结果一致, 系统处在混沌-周期变化中, 同样存在反倍周期分岔现象。由图7可知, 系统在区间  $b \in [0.1, 0.68]$  的最大 Lyapunov 指数大于 0, 这表示系统在该区间处于混沌状态。当  $b \in [0.68, 2.1]$  时, 系统经反倍周期分岔退出混沌态, 图8直观地反映了该动态演变过程。

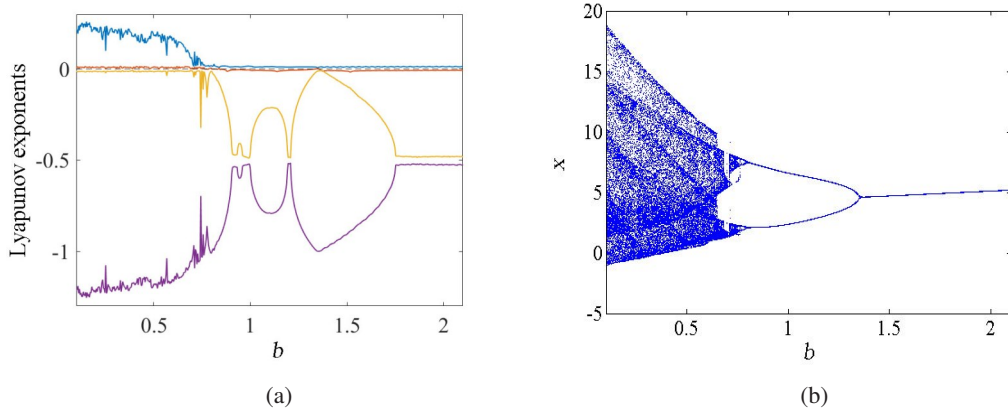


图 7 系统参数  $b \in [0.1, 2.1]$  时系统 (7) 的 Lyapunov 指数谱 (a) 和分岔图 (b)

Fig. 7 The Lyapunov exponential spectrum (a) and bifurcation diagram (b) of system (7) change with  $b$  and  $b \in [0.1, 2.1]$

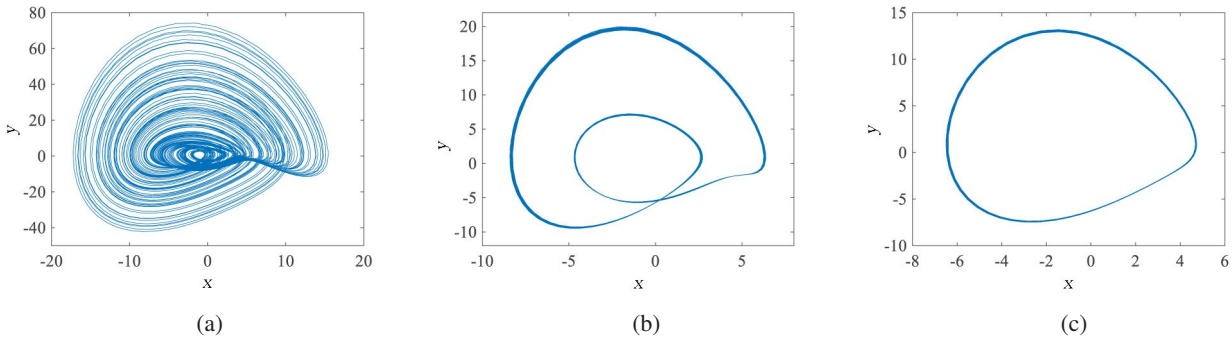


图 8 系统 (7) 随参数  $b$  变化时在  $x$ - $y$  平面的投影。(a)  $b=0.3$ ; (b)  $b=1.1$ ; (c)  $b=1.5$

Fig. 8 Projection of system (7) on  $x$ - $y$  plane with  $b$ . (a)  $b=0.3$ ; (b)  $b=1.1$ ; (c)  $b=1.5$

### 2.5 吸引子共存

给定原系统参数  $b=0.4, c=0.1$ , 初始条件  $[-4, -2, m, 4]$ , 分别令调整实数  $m=3, 8$ , 绘制系统随参数  $a$  变化的分岔图如图 9 所示, 系统随参数  $a$  变化的 Lyapunov 指数谱如图 10 所示。通过观察图 9 和图 10, 分别取典型系统参数  $a=0.41, 0.9, 2$ 。系统参数  $a=0.41$  时, 由图 11(a) 系统吸引子在  $x$ - $y$  平面上的投影可知, 系统的混沌吸引子共存; 系统参数  $a=0.9$  时, 由图 11(b) 可知, 周期吸引子与混沌吸引子共存; 系统参数  $a=2$  时, 由图 11(c) 可知, 系统产生周期环与周期环共存。通过改变初始条件, 系统产生混沌吸引子共存、周期极限环与混沌吸引子共存、周期极限环共存现象, 充分说明本忆阻混沌系统对初始条件具有高度敏感性。

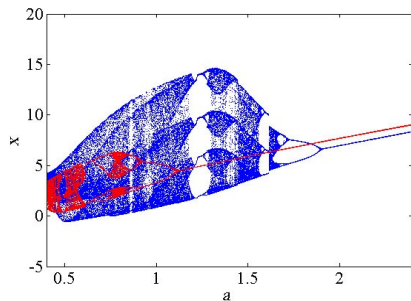


图 9 初始条件不同时系统随参数  $a$  变化的分岔图 (红蓝线分别表示初始条件为  $[-4, -2, 3, 4]$ ,  $[-4, -2, 8, 4]$ 。)

Fig. 9 Bifurcation diagram of the system with different parameters under different initial conditions (The red and blue lines represent the initial conditions  $[-4, -2, 3, 4]$  and  $[-4, -2, 8, 4]$ .)



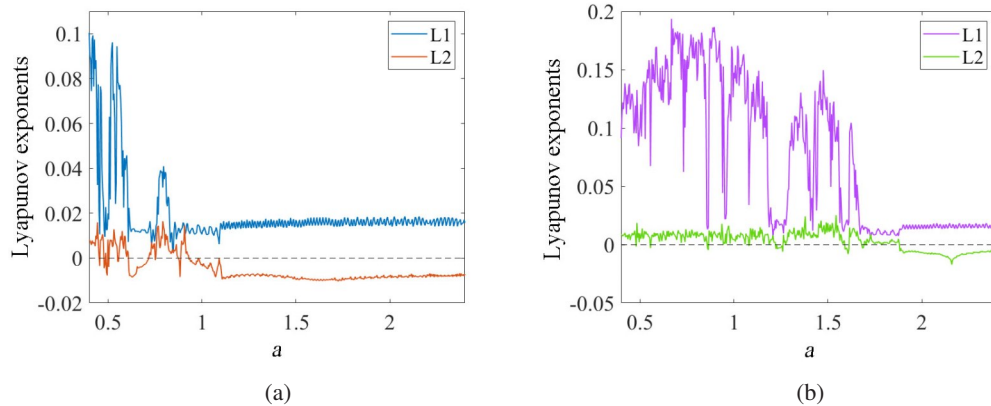


图10 初始条件分别为 $[-4, -2, 3, 4]$  (a)、 $[-4, -2, 8, 4]$  (b)时, 系统(7)的Lyapunov指数谱  
(L1、L2分别表示四个Lyapunov指数中较大的两个且 $L1 > L2$ )

Fig. 10 Lyapunov exponential spectrum of system (7) with different initial conditions  $[-4, -2, 3, 4]$  (a) and  $[-4, -2, 8, 4]$  (b)  
(L1, L2 respectively represent the two larger of the four Lyapunov indices and  $L1 > L2$ .)

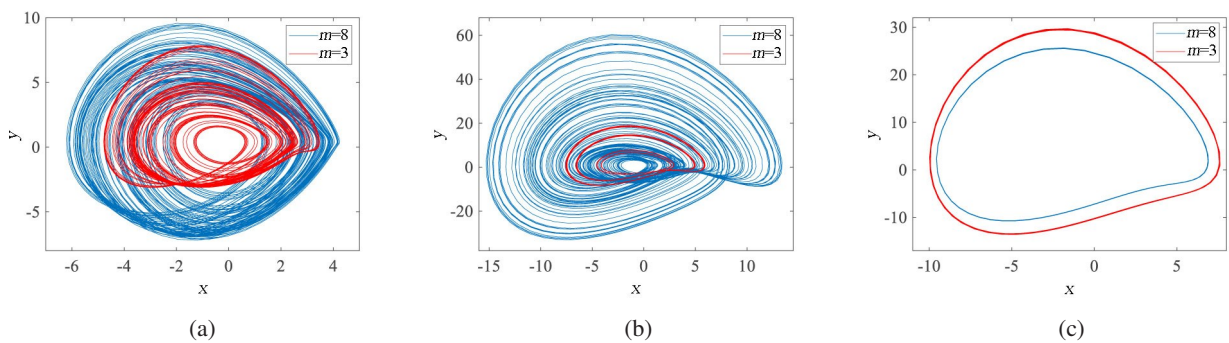


图11 多共存吸引子在 $x$ - $y$ 平面上投影。(a)  $a=0.41$ ; (b)  $a=0.9$ ; (c)  $a=2$

Fig. 11 Projection on  $x$ - $y$  plane of multiple coexisting attractors. (a)  $a=0.41$ ; (b)  $a=0.9$ ; (c)  $a=2$

## 2.6 调幅特性

给定原系统参数 $a=0.9$ 、 $b=0.4$ 、 $c=0.1$ , 令初始条件为 $[-4, -2, m, 4]$ , 其中 $m$ 为实数。令调整实数 $m$ 的大小分别为20、35、45、60, 绘制系统混沌吸引子在 $x$ - $y$ 平面上的投影如图12(a), 时域波形图如图12(b)。由图12(a)可知, 在有界范围内, 系统(7)的混沌吸引子所在区域范围不断扩大, 说明该混沌吸引子正处于不断膨胀的状态。由图12(b)可知, 当 $m=20$ 时,  $x \in (-20, 20)$ ; 当 $m=35$ 时,  $x \in (-30, 30)$ ; 当 $m=45$ 时,  $x \in (-35, 35)$ ; 当 $m=60$ 时,  $x \in (-50, 50)$ 。这表明随时间的变化, 当 $m$ 值增大时, 时域波形的浮动范围也增大。

令 $m \in [10, 60]$ , 系统输出的四维信号幅度变化情况分岔图如图13所示。图13进一步说明了系统存在随初始条件变化的调幅特性, 可实现较大尺度的调幅控制。同时图13还说明了随着初始条件的改变混沌吸引子的运动范围不断扩大, 尽管吸引子形状没有发生改变, 但本质上可视为不同的吸引子, 这表明系统可产生无穷共存混沌吸引子。 $m \in [10, 60]$ 时, 输出信号 $x$ 的范围由 $(0, 14)$ 变化至 $(-5, 42)$ , 输出信号 $y$ 的范围由 $(0, 62)$ 变化至 $(0, 320)$ , 输出信号 $z$ 的范围由 $(0, 50)$ 变化至 $(-35, 361)$ , 输出信号 $w$ 的下限由 $-2.5$ 变化至 $-10$ , 上限由 $12.8$ 变化至 $26$ 。随着 $m$ 的增加, 输出信号 $x, y, z, w$ 的幅度均非线性增加。实际上, 随着 $m$ 的不断增大, 即取值范围超过60时, 系统仍存在调幅特性, 如图14所示。

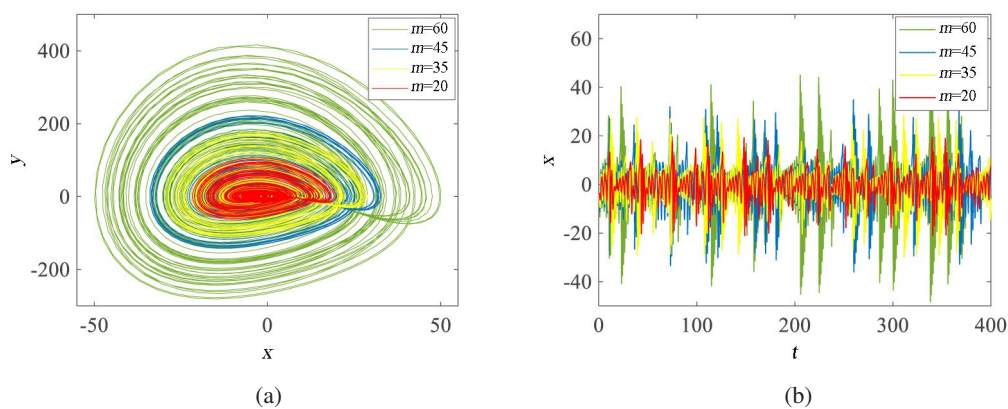


图 12  $m$  变化时系统(7)的混沌吸引子在  $x$ - $y$  平面的投影 (a) 和时域波形 (b)

Fig. 12 Projection (a) of Chaos attractor for system (7) and wave diagram (b) on  $x$ - $y$  plane with  $m$

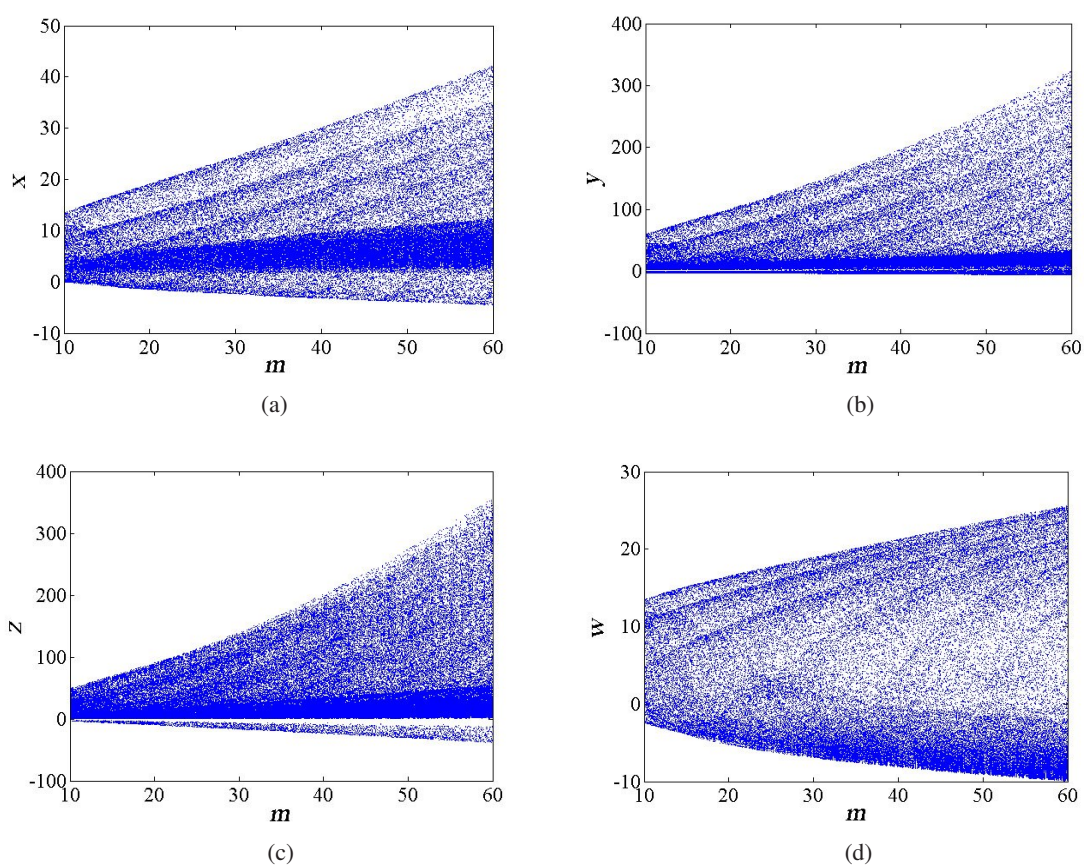


图 13  $m \in (10, 60)$  时系统 (7) 的四维输出信号分岔图。(a)  $x$ - $m$ ; (b)  $y$ - $m$ ; (c)  $z$ - $m$ ; (d)  $w$ - $m$

Fig. 13 Four-dimensional output signal bifurcation diagram of system (7) with  $m \in (10, 60)$ . (a)  $x$ - $m$ ; (b)  $y$ - $m$ ; (c)  $z$ - $m$ ; (d)  $w$ - $m$

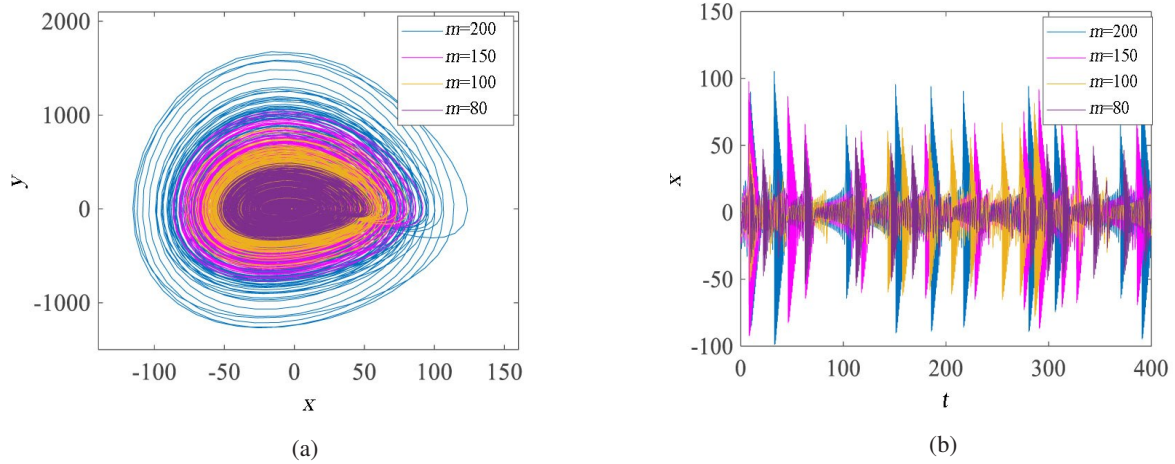


图 14  $m > 60$  时混沌吸引子在  $x$ - $y$  平面的投影 (a) 和时域波形 (b)

Fig. 14 Projection (a) of system (7) and wave diagram (b) on  $x$ - $y$  plane with  $m > 60$

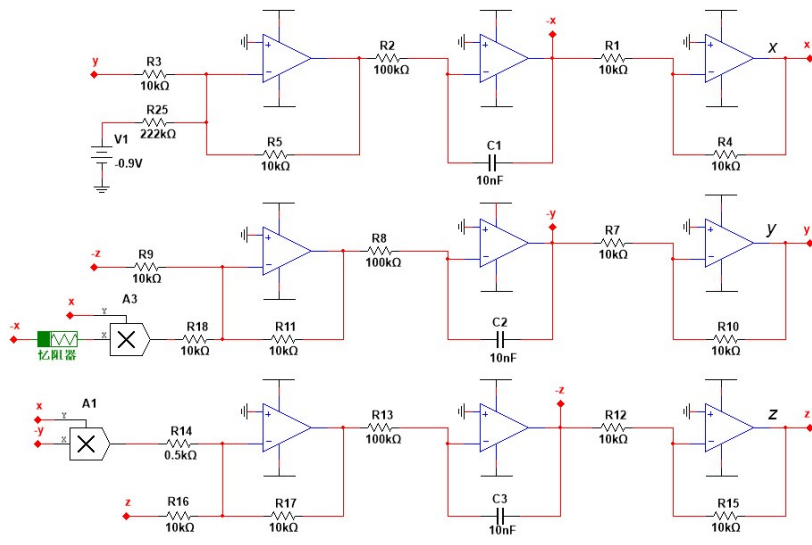
### 3 系统的电路设计与实现

为进一步验证该系统的混沌特性, 基于电子电路设计原理, 采用若干电阻、电容、运算放大器、模拟乘法器构成加法比例运算电路、积分电路、反相电路和乘法电路, 设计了忆阻混沌系统电路及忆阻器等效电路, 如图 15 所示。

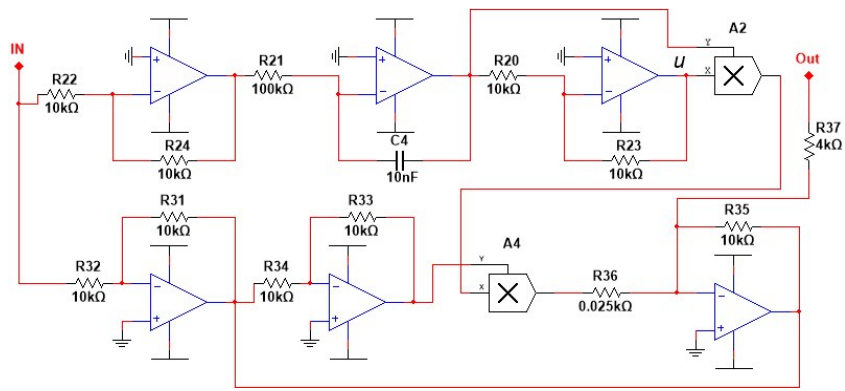
由于系统 (7) 的电路变量变化范围超出元件容许的电压大小, 为使元器件工作在正常状态, 需对各变量进行比例压缩变换, 令  $(x, y, z, w) \rightarrow (20x, 20y, 20z, 20w)$ , 再对系统作时间尺度变换, 得到系统 (7) 变换后的电路如方程 (12)。比较方程 (12) 与 (7) 的对应系数, 计算得电路各参数值如图 15 中标示。

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \frac{1}{C_1 R_2} \left( \frac{0.9 R_5}{R_{25}} - \frac{R_5}{R_3} v_y \right) \\ \dot{v}_y = \frac{1}{C_2 R_8} \left( \frac{R_{11}}{R_9} v_z + \frac{R_{11}}{R_{18}} W(\phi) v_x \right) \\ \dot{v}_z = \frac{1}{C_3 R_{13}} \left( \frac{R_{17}}{R_{14}} v_x v_y - \frac{R_{17}}{R_{16}} v_z \right) \\ \dot{v}_w = \frac{1}{C_4 R_{21}} \frac{R_{24}}{R_{22}} v_x \end{cases} \quad (12)$$

图 16 展示了系统 (7) 的电路仿真结果, 分别对应系统在  $x$ - $y$  平面、 $x$ - $z$  平面、 $x$ - $w$  平面和  $y$ - $z$  平面上的投影。由图可知, 理论分析与设计电路的数值仿真结果一致, 一定程度上验证了该忆阻混沌系统的存在性。



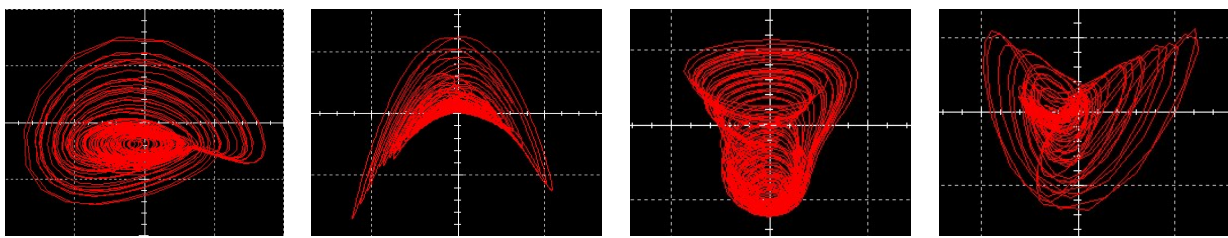
(a)



(b)

图 15 忆阻混沌系统电路 (a) 及忆阻器等效电路 (b)

Fig. 15 Memristive chaotic system circuit diagram (a) and memristor's equivalent circuit (b)



(a)

(b)

(c)

(d)

图 16 电路仿真结果。(a) x-y; (b) x-z; (c) x-w; (d) y-z

Fig. 16 Circuit simulation results. (a) x-y; (b) x-z; (c) x-w; (d) y-z

### 4 结论

基于三维 Sprott-R 混沌系统, 提出了一个新的简单四维忆阻混沌系统。基于基本动力学分析方法, 证明了该系统的混沌特性。分析发现该系统同时具备多稳态共存和调幅性质, 使得其与一般的混沌系统相比更加灵活且易于调控。设计并实现了系统的电子电路, 研究显示, 理论分析与设计电路的数值仿真结果一致。后续将进一步探讨混沌系统的工程应用问题。



**参考文献:**

- [1] Chua L O. Memristor-the missing circuit element [J]. *IEEE Transactions on Circuit Theory*, 1971, 18(5): 507-519.
- [2] Strukov D B, Snider G S, Stewart D R, *et al.* The missing memristor found [J]. *Nature*, 2008, 453(7191): 80-83.
- [3] Buscarino A, Fortuna L, Frasca M, *et al.* A chaotic circuit based on Hewlett-Packard memristor [J]. *Chaos*, 2012, 22(2): 023136.
- [4] Li X X, Feng Z X, Zhang Q Y, *et al.* Memristive multi-scroll chaotic system and its synchronization under sliding mode control [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2020, 37(6): 727-736.  
李晓霞, 冯志新, 张启宇, 等. 忆阻器多涡卷混沌系统及其滑模控制同步 [J]. 量子电子学报, 2020, 37(6): 727-736.
- [5] Wang B, Zou F C, Cheng J. A memristor-based chaotic system and its application in image encryption [J]. *Optik*, 2018, 154: 538-544.
- [6] Qu S H, Yang Z H, Rong X W, *et al.* A new memristor chaotic system and its application in image encryption [J]. *Journal of System Simulation*, 2019, 31(5): 984-991.  
屈双惠, 杨志宏, 容旭巍, 等. 一个新忆阻混沌系统及其在图像加密中的应用 [J]. 系统仿真学报, 2019, 31(5): 984-991.
- [7] Kengne J, Njitacke Tabekoueng Z, Kamdoum Tamba V, *et al.* Periodicity, chaos, and multiple attractors in a memristor-based Shinriki's circuit [J]. *Chaos*, 2015, 25(10): 103126.
- [8] Guo M, Yang W Y, Xue Y B, *et al.* Multistability in a physical memristor-based modified Chua's circuit [J]. *Chaos*, 2019, 29(4): 043114.
- [9] Muthuswamy B, Chua L O. Simplest chaotic circuit [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, 20(5): 1567-1580.
- [10] Fang N, Jiang M H, Deng W. Design of a dual memristor four-dimensional chaotic system and its circuit implementation [J]. *Journal of Lanzhou University (Natural Sciences)*, 2021, 57(4): 544-550.  
方娜, 姜明浩, 邓玮. 双忆阻器四维混沌系统的设计与电路实现 [J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2021, 57(4): 544-550.
- [11] Yang F Y, Leng J L, Li Q D. The 4-dimensional hyperchaotic memristive circuit based on Chua's circuit [J]. *Acta Physica Sinica*, 2014, 63(8): 080502.  
杨芳艳, 冷家丽, 李清都. 基于 Chua 电路的四维超混沌忆阻电路 [J]. 物理学报, 2014, 63(8): 080502.
- [12] Qu S C, Chen Y, Luo J, *et al.* Design and implementation of memristor-based chaotic synchronization under a single input controller [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2022, 44(1): 400-407.  
瞿少成, 陈尧, 罗静, 等. 一种单输入控制器下的忆阻混沌同步电路设计与实现 [J]. 电子与信息学报, 2022, 44(1): 400-407.
- [13] Lin T C, Huang F Y. Interval type-2 fuzzy modeling and chaotic synchronization of two different memristor-based Lorenz circuits [C]. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Beijing, China, IEEE, 2014.
- [14] Li X X, Wang X, Feng Z X, *et al.* Dynamics analysis and circuit realization of Sprott-B hyper-chaotic system based on memristor [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2021, 38(3): 393-404.  
李晓霞, 王雪, 冯志新, 等. 基于忆阻器的 Sprott-B 超混沌系统的动力学分析与电路实现 [J]. 量子电子学报, 2021, 38(3): 393-404.
- [15] Li X X, Zheng C, Wang X, *et al.* A novel five-dimensional memristive hyperchaotic system with extreme multistability [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2022, 54(3): 163-170.  
李晓霞, 郑驰, 王雪, 等. 一个新的具有超级多稳态的五维忆阻超混沌系统 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2022, 54(3): 163-170.
- [16] Sprott J C, Wang X, Chen G R. Coexistence of point, periodic and strange attractors [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, 23(5): 1350093.
- [17] Li C B, Sprott J C, Xing H Y. Constructing chaotic systems with conditional symmetry [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 87(2): 1351-1358.



- [18] Lai Q, Nestor T, Kengne J, *et al.* Coexisting attractors and circuit implementation of a new 4D chaotic system with two equilibria [J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018, 107: 92-102.
- [19] Min F H, Wang Z L, Cao Y, *et al.* Multistability analysis of a dual-memristor circuit based on hyperbolic function [J]. *Acta Electronica Sinica*, 2018, 46(2): 486-494.  
闵富红, 王珠林, 曹弋, 等. 基于双曲函数的双忆阻器混沌电路多稳态特性分析 [J]. 电子学报, 2018, 46(2): 486-494.
- [20] Lai Q, Kuate P D K, Liu F, *et al.* An extremely simple chaotic system with infinitely many coexisting attractors [J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2020, 67(6): 1129-1133.
- [21] Zeng Y C, Cheng D W, Tan Q W. A simple inductor-free memristive chaotic circuit and its characteristics [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2020, 42(4): 862-869.  
曾以成, 成德武, 谭其威. 简洁无电感忆阻混沌电路及其特性 [J]. 电子与信息学报, 2020, 42(4): 862-869.
- [22] Li C B, Xu K S, Hu W. Sprott system locked on chaos with constant Lyapunov exponent spectrum and its anti-synchronization [J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, 60(12): 74-84.  
李春彪, 徐克生, 胡文. Sprott 系统的恒 Lyapunov 指数谱混沌锁定及其反同步 [J]. 物理学报, 2011, 60(12): 74-84.
- [23] Li C B, Sprott J C. Amplitude control approach for chaotic signals [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(3): 1335-1341.
- [24] Wan Q Z, Zhou Z T. Novel unified chaotic system with multi-parameter invariable Lyapunov exponent spectrum [J]. *Journal on Communications*, 2020, 41(6): 202-213.  
万求真, 周昭腾. 具有多参数恒 Lyapunov 指数谱的新型统一混沌系统 [J]. 通信学报, 2020, 41(6): 202-213.
- [25] Sprott J C. Some simple chaotic flows [J]. *Physical Review E*, 1994, 50(2): R647-R650.