

DOI: 10.3969/j.issn.1007-5461.2024.01.001

# 分布式量子计算研究进展

王升斌<sup>1,2</sup>, 窦猛汉<sup>1</sup>, 吴玉椿<sup>2\*</sup>, 郭国平<sup>1,2\*</sup>, 郭光灿<sup>2</sup>

(1 本源量子计算科技(合肥)股份有限公司, 安徽 合肥 230088;

2 中国科学技术大学中国科学院量子信息重点实验室, 安徽 合肥 230026)

**摘要:** 量子比特的高效拓展是量子计算获取量子加速优势需要解决的基本问题, 分布式量子计算 (DQC) 因其高度可行性和灵活性, 成为解决量子比特拓展问题的关键技术之一。根据芯片间通信方式的不同, 分布式量子计算可以分为基于量子隐形传态和基于量子线路拆分的分布式量子计算两种类型, 前者主要面向容错量子计算, 而后者被认为可在中等规模含噪声量子 (NISQ) 时代有效提升量子计算机算力。从长远角度来看, 作为量子网络的主要应用之一, 分布式量子计算可以更好地整合接入量子网络的海量量子计算机以解决高难度问题。首先介绍了分布式量子计算的来源和类型, 在此基础上, 给出了两类分布式量子计算的基本原理和发展状况, 以及关注度较高的应用算法和编译优化方法。

**关键词:** 量子信息; 分布式量子计算; 量子隐形传态; 量子线路拆分

**中图分类号:** O413.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1007-5461(2024)01-00001-25

## Research progress of distributed quantum computing

WANG Shengbin<sup>1,2</sup>, DOU Menghan<sup>1</sup>, WU Yuchun<sup>2\*</sup>, GUO Guoping<sup>1,2\*</sup>, GUO Guangcan<sup>2</sup>

(1 Origin Quantum Computing Company Limited, Hefei 230088, China;

2 CAS Key Laboratory of Quantum Information, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

**Abstract:** Efficient qubit extension is a fundamental problem that needs to be solved to obtain quantum speedup advantage for quantum computing. Due to its high feasibility and flexibility, distributed quantum computing (DQC) has become one of the key techniques for solving the qubit extension problem. According to different inter-chip communication modes, DQC can be divided into two types, teleportation-based and circuit-cutting-based DQC. The former mainly plays for the fault-tolerant quantum computing, while the latter is considered to effectively enhance the computing power of quantum computers in the noisy intermediate scale quantum (NISQ) era. In the long run, as one of the main applications of quantum network, DQC can efficiently harness the huge number of quantum computers connected to quantum networks to solve non-trivial problems. First, the origin and types of DQC are

**基金项目:** 科技创新2030—“量子通信与量子计算机”重大项目(2021ZD0302300), 国家自然科学基金(12034018)

**作者简介:** 王升斌(1988-), 山东日照人, 博士, 工程师, 主要从事量子-经典混合计算方面的研究。E-mail: [wsb@originqc.com](mailto:wsb@originqc.com)

**收稿日期:** 2023-09-12; **修改日期:** 2023-10-28

\*通信作者。E-mail: [wuyuchun@ustc.edu.cn](mailto:wuyuchun@ustc.edu.cn); [ggquo@ustc.edu.cn](mailto:ggquo@ustc.edu.cn)

introduced. Then, the fundamentals and development of the two types of DQC, as well as widely studied application algorithms and compiling optimization methods, are provided.

**Key words:** quantum information; distributed quantum computing; quantum teleportation; quantum circuit cutting

## 0 引言

量子计算潜在的加速优势让人们看到了破解经典计算瓶颈<sup>[1-10]</sup>的巨大希望,掀起了量子计算硬件和算法的研究热潮。不过,想要充分利用量子计算的加速优势解决实际问题,量子比特的数量和质量必须达到一定的要求。首先,逻辑比特(无噪声或噪声水平非常低)至少要达到成百上千个;其次,由于物理比特的噪声不可能被无限地压缩,需要很多物理比特通过纠错码来表示一个逻辑比特。因此,在使用表面码并假设门错误率为0.1%的情况下,可能需要高达几千万个物理比特才能容错地解决某些实际问题<sup>[11-15]</sup>。

量子计算机的物理实现是一个持续性的挑战。到目前为止,人们已经探索并成功制造出了多种类型的量子芯片,包括离子阱<sup>[16-18]</sup>、超导<sup>[18-20]</sup>、光子<sup>[21]</sup>、半导体<sup>[22, 23]</sup>、金刚石<sup>[24]</sup>、原子<sup>[25]</sup>、核磁共振<sup>[26]</sup>等等<sup>[27, 28]</sup>。其中,离子阱和超导已经取得了可喜的进展,门错误率也达到了使用纠错码进行容错计算的阈值<sup>[29-32]</sup>。在比特拓展方面,离子阱相对缓慢,目前比特数只达到了32个<sup>[33, 34]</sup>,而超导芯片的比特数已经达到了433个<sup>[35]</sup>,国内也已经上线了136比特的Quafu超导量子芯片<sup>[36]</sup>。

单从堆砌数量的角度来看,量子芯片比特数很快就可以达到容错计算所需要的数量级,但实际情况远非如此。离子阱需要高真空、超导则需要超低温,而保证这些理想环境的容器的体积必然是有限的,同时更大的容器不仅需要更多的资金投入,也更难保证环境的稳定性,严重降低能效比。具体来说,超导比特的体积比晶体管大的多,需要占用更大的芯片空间,在阱中囚禁大量离子也不是一件容易的事<sup>[27, 28]</sup>。随着芯片上比特数量的增多,控制系统的复杂度急剧上升,控制线会占用容器的大部分空间,其布局和噪声控制等变得更加困难;比特热噪声增大、比特间串扰增多,退相干现象更加严重,也更难支撑信息的有效传递,反而降低了系统的信息处理效率<sup>[37, 38]</sup>。针对以上问题,半导体量子芯片可能会有更大的优势,但在比特数和性能上还有不小的差距,需要更加深入地研究<sup>[22, 23]</sup>;光量子计算机已经实现了量子优越性验证,但其确定性两比特纠缠门的实现问题也亟待解决<sup>[28]</sup>。此外,由于系统参数偏移导致性能下降,量子芯片需要经常校准,而这是一件非常耗时的工作,严重制约大比特芯片的有效利用时间。由此可见,在单个芯片上集成数十万甚至数百万个量子比特是不太现实的,需要采用其他可行的比特拓展方法,分布式量子计算<sup>[27, 39, 40]</sup>就是解决该问题的可行方法之一。

量子计算仍处于起步阶段,需要解决的问题众多<sup>[16, 20, 22, 41-43]</sup>,争论哪种类型的量子硬件更加先进为时尚早。实际上,各类量子硬件的优势和缺点各不相同,呈现互补状态。因此,作为量子网络<sup>[44-48]</sup>的主要应用方向之一,未来的分布式量子计算系统将会是一个由大量的不同类型且分布于不同空间的量子硬件通过大型量子网络连接而成的可拓展的异构量子系统,能够更加充分地发挥量子计算的优势。

## 1 分布式量子计算

当前对分布式量子计算类型的划分主要以芯片间通信方式为依据<sup>[39]</sup>,通常芯片之间只能通过有限的链路进行通信。第一类分布式量子计算通过量子隐形传态(Quantum Teleportation)进行芯片间通信<sup>[49, 50]</sup>,同时包含量子

信道和经典信道。经典信道用于传输测量操作引起的量子信道丢失的信息, 表征整个系统状态的量子态始终处于纠缠状态。第二类分布式量子计算仅通过经典信道实现芯片间通信, 各芯片上的子系统分别处于纠缠状态, 各子系统之间原本的量子信道被完全分解为经典信道, 当前主要以量子线路拆分技术为代表。图 1 为两种类型芯片间通信方式的示意图, 绿色、黄色和浅蓝色的背景色分别表示离子阱、超导和半导体量子芯片, 黑色和红色圆点分别表示数据比特和通信比特, 蓝色粗折线和紫色粗直线分别表示经典通信链路和量子通信链路, 连接比特的细实线表示芯片的比特拓扑结构。

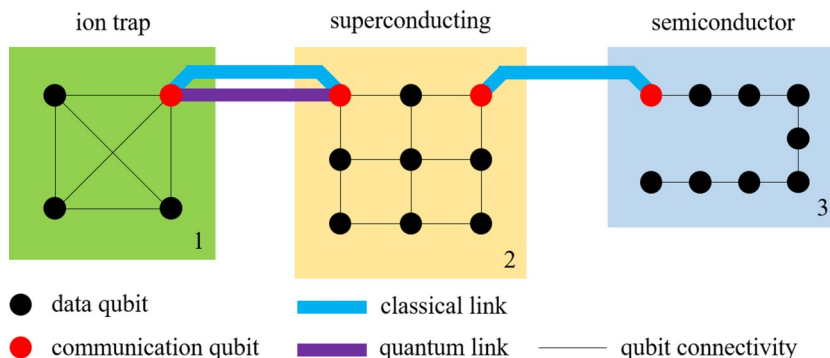


图 1 芯片间通信方式示意图

Fig. 1 Illustration for the communication types among quantum processing units

芯片 1 和芯片 2 之间采用量子隐形传态进行通信, 这使得两个芯片上的子系统处于纠缠状态, 该系统信息存储和处理能力随两个芯片的数据比特总数指数增长; 而芯片 2 和芯片 3 之间仅通过经典通信方式进行信息的交互, 其处理能力达不到两个芯片数据比特总数的指数, 但它不使用复杂度非常高的量子信道<sup>[51]</sup>, 使 NISQ 计算机的分布式计算成为可能。此处所述通信比特的功能和形式在不同的实现方案中存在较大差异, 具体将在下文中进行介绍。“量子-经典混合计算”能够很好地发挥图 1 所示分布式量子计算系统的性能, 是量子计算的未来发展趋势。其中, 量超融合将量子计算机与超级计算机联合起来<sup>[52, 53]</sup>, 让二者分别处理问题中自己擅长的部分, 可以极大地提升解决复杂问题的速度和效率, 极有可能在 NISQ 时代获得成功。

实际上, 从为什么需要分布式量子计算的角度来看, 所有能够使用小规模量子计算机(及其组合)进行大规模量子计算的方法都应该属于分布式量子计算的范畴。例如, 2016 年, IBM 沃森研究中心的 Bravyi 等<sup>[54]</sup>使用小比特量子芯片辅助经典计算机进行量子-经典混合模拟, 稀疏量子线路(Sparse quantum circuits) 和基于泡利的计算(Pauli-based computation) 均可通过  $2^{O(k)} \text{poly}(n)$  的时间复杂度完成模拟, 其中  $n+k$  为原始线路的比特数、 $n$  为量子芯片的比特数; 2017 年, 中山大学的 Li 等<sup>[55]</sup>使用分布式半量子计算模型对量子相位估计(Quantum phase estimation, QPE)算法进行了研究, 将原来需要同时估计的  $n$  比特位结果分解到  $n$  个小规模的量子计算机上进行并行处理, 输出寄存器包含有效信息的比特数由  $n$  个降到 1 个, 最后将所有小规模量子计算机的输出结果进行经典合并; 2022 年, 大阪大学的 Fujii 等<sup>[56]</sup>使用 D&C(Divide and conquer)方法将大规模系统拆分成很多小规模子系统, 并将子系统之间的相互作用转化为等效哈密顿量, 最终使用小规模量子计算机通过级联式变分量子本征求解器(Variational quantum eigensolver, VQE)的方式完成对大规模系统问题的求解。其他分布式计算方法可参考文献 [57-60] 等。

本研究以芯片间通信方式为切入点, 详述两种类型的分布式量子计算技术的原理、线路、发展、应用及编译等。

## 2 基于量子隐形传态的分布式量子计算

### 2.1 基本原理

第一类分布式量子计算主要依赖于量子隐形传态技术。量子隐形传态技术由 IBM 沃森研究中心的 Bennett 等<sup>[61]</sup>于 1993 年提出, 该技术在不需要传输物理比特的情况下实现了信息传输, 是构建量子网络的关键, 为大规模量子通信和量子计算提供了支持。在介绍量子隐形传态技术之前, 先给出贝尔态 (Bell states, 也称为 EPR 对, 来源于 Einstein、Podolsky 和 Rosen 在 1935 年发表的论文)<sup>[62]</sup>的相关说明, 它是量子隐形传态的核心组成部分。四个贝尔态分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} |\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\beta_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\beta_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \end{array} \right. , \quad (1)$$

它们是图 2 中两比特态  $|xy\rangle$  分别为  $|00\rangle$ 、 $|01\rangle$ 、 $|10\rangle$ 、 $|11\rangle$  时线路的输出态  $|\beta_{xy}\rangle = (|0,y\rangle + (-1)^x|1,\bar{y}\rangle)/\sqrt{2}$ , 其中  $\bar{y}=y \oplus 1$ 。图中波浪线连接的两个通信比特处于远程纠缠状态, 建立贝尔态纠缠的各方用不同的背景色来指示(下同)。

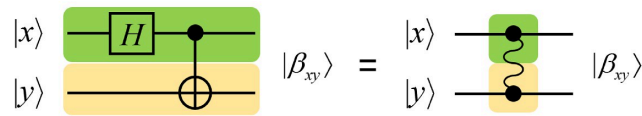


图2 贝尔态制备量子线路(左)及其非局部表示形式(右)

Fig. 2 Circuit for preparing Bell states (left) and their non-local representation (right)

对于多比特之间的纠缠, 通过将贝尔态拓展为 GHZ (Greenberger-Horne-Zeilinger) 态来实现, 图 3 为  $|\text{GHZ}_3\rangle = (|000\rangle + |111\rangle)/\sqrt{2}$  态制备线路及其非局部表示形式。远程纠缠时三个比特均为通信比特。

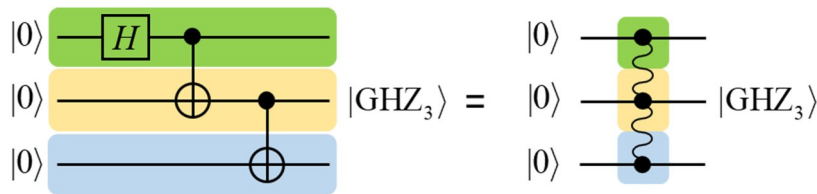


图3  $|\text{GHZ}_3\rangle$  态制备量子线路(左)及其非局部表示形式(右)

Fig. 3 Circuit for preparing  $|\text{GHZ}_3\rangle$  state (left) and its non-local representation (right)

下面以贝尔态  $|\beta_{00}\rangle$  为例, 对量子隐形传态技术进行说明。如图 4 所示, 图中 Id 表示恒等信道, 该信道输出与其输入完全相同的量子态, 双实线表示经典比特。假设距离相对较远的节点 A 和 B 之间已经建立起了贝尔态  $|\beta_{00}\rangle$  的纠缠, 目标是将节点 A 上数据比特存储的信息  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  传输给节点 B。首先在节点 A 的数据比特和通信比特上执行 CNOT 门和 H 门操作, 系统量子态演进为

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}[\alpha(|0\rangle + |1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)(|10\rangle + |01\rangle)], \quad (2)$$

对节点 A 和 B 上的比特进行分离, 量子态  $|\psi_1\rangle$  的形式变为

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2} [|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)], \quad (3)$$

可以看出, 节点 A 高比特位 (数据比特) 的状态决定所传输量子态是否发生相位翻转, 而节点 A 低比特位 (通信比特) 的状态决定所传输量子态是否发生比特翻转。也就是说, 经典信道只用于传输测量操作引起的相位翻转和比特翻转信息, 量子态  $|\psi\rangle$  的其他信息则通过量子信道进行传输。所以, 只需要在测量了节点 A 的两个比特之后, 将得到的两比特数据通过经典通信传输给节点 B, 节点 B 根据接收数据的高低位分别控制 Z 门和 X 门 (NOT 门) 作用在其通信比特上, 就可以实现信息  $|\psi\rangle$  从节点 A 到节点 B 的传输。可见, 节点 B 的通信比特也是数据比特。经过以上操作, 最终只有节点 B 获得了量子态  $|\psi\rangle$ , 节点 A 的两个比特均处在基矢量态  $|0\rangle$  或  $|1\rangle$  上, 并没有实现 "复制" 功能, 因此量子隐形传态技术不违背不可克隆原理<sup>[63]</sup>。

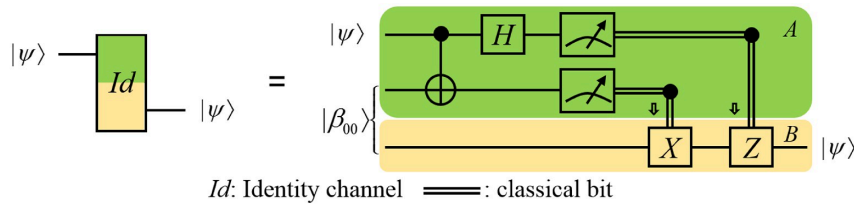


图 4 量子隐形传态线路示意图

Fig. 4 Sketch circuit for quantum teleportation

从传输对象上看, 上方所述量子隐形传态传输的是存储在量子态中的信息, 也可以认为是存储量子态的逻辑量子比特。与此不同的是, 还可以对量子门进行传输<sup>[64]</sup>, 二者分别称为 Teledata 和 Telegate; 为了统一两类分布式量子计算对应方法的名称, 把它们分别称为比特传输和门传输。图 5 为传输 CNOT 门的线路图, 与传输量子态不同, 传输 CNOT 门需要双向的经典通信来实现<sup>[65]</sup>。

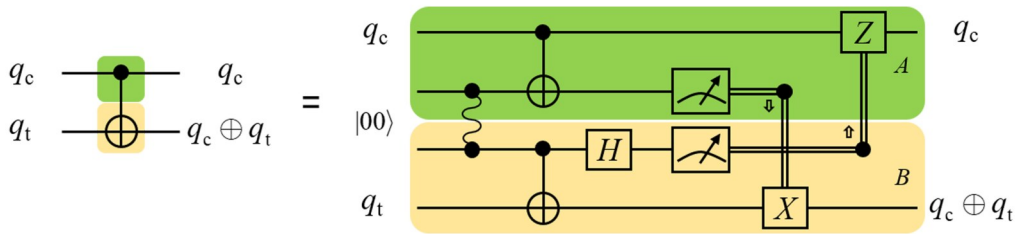


图 5 传输 CNOT 门的线路示意图<sup>[65]</sup>

Fig. 5 Sketch circuit for teleporting CNOT gate<sup>[65]</sup>

如图 5 所示, 假设节点 A 数据比特  $q_c$  上的信息仍然为  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , 节点 B 数据比特  $q_t$  为  $|0\rangle$ 。首先在节点 A 的数据比特和通信比特上执行 CNOT 门操作, 系统量子态演进为

$$|\psi_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle_A(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle_A(|10\rangle + |01\rangle)]|0\rangle_B, \quad (4)$$

式中, 下标 A 和 B 分别表示节点 A 和节点 B 的数据比特  $q_c$  和  $q_t$ 。

然后, 在节点 B 的数据比特和通信比特上执行 CNOT 门和 H 门操作, 系统量子态变为

$$|\psi_2'\rangle = \frac{1}{2}[\alpha|0\rangle_A((|00\rangle + |01\rangle)|0\rangle_B + (|10\rangle - |11\rangle)|1\rangle_B) + \beta|1\rangle_A((|10\rangle + |11\rangle)|0\rangle_B + (|00\rangle - |01\rangle)|1\rangle_B)], \quad (5)$$



在实际操作中, 以上两步是同时进行的, 此处进行了拆分简化。最后, 分离通信比特和数据比特, 量子态 $|\psi'_2\rangle$ 的形式变为

$$|\psi'_2\rangle = \frac{1}{2} [(\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle)_{A,B}|00\rangle + (\alpha|00\rangle - \beta|11\rangle)_{A,B}|01\rangle + (\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle)_{A,B}|10\rangle + (-\alpha|01\rangle + \beta|10\rangle)_{A,B}|11\rangle]. \quad (6)$$

对于CNOT门来说, 它作用在量子态 $|\psi\rangle|0\rangle$ 上得到的量子态为 $\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ 。那么, 从(6)式可以看出, 节点A通信比特的状态决定所传输CNOT门是否发生比特翻转(为0时不翻转, 为1时翻转), 节点B通信比特的状态决定所传输CNOT门是否发生相位翻转(为0时不翻转, 为1时翻转)。所以, 只需要在测量了节点A和节点B的两个通信比特之后, 将得到的两比特数据通过经典信道分别传输给节点B和节点A, 用它们分别控制X门和Z门作用在各自的数据比特上, 就实现了对门的传输。注意, 在测得 $|11\rangle$ 时, 执行Z门操作引入的是全局相位, 不影响CNOT门的传输。

可见, 一个芯片上的通信比特越多, 它与其他芯片之间可以构建的EPR对就越多, 从而能够提供更加丰富的非局部连接。但这会降低数据比特的数量, 进一步限制单个芯片的计算能力, 从而影响整个系统的执行效率。所以, 需要针对特定问题和硬件情况进行合理地折中。例如, 当两个芯片间没有直接的量子信道时, 可通过纠缠交换 (Entanglement swapping)<sup>[66, 67]</sup>实现这两个芯片之间的纠缠, 如图6所示, 芯片1和芯片3之间没有直接的EPR对, 可以通过与二者都有EPR对的芯片2实现它们之间的纠缠。

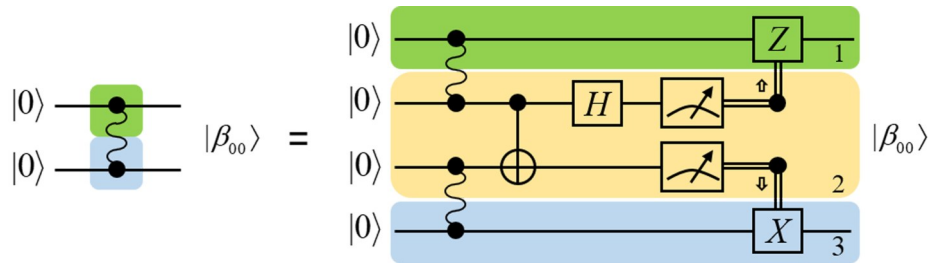


图6 纠缠交换示意图<sup>[67]</sup>

Fig. 6 Circuit for entanglement swapping<sup>[67]</sup>

量子隐形传态技术可以将分布在空间中不同位置的量子硬件纠缠起来, 提供强大的数据存储和处理能力, 使大规模、全纠缠的分布式量子计算成为可能。

## 2.2 研究进展

### 2.2.1 理论研究

量子隐形传态技术一经提出就受到了广泛的关注, 并实现了向门传输的拓展。1999年, 美国洛斯阿拉莫斯国家实验室的Gottesman等<sup>[64]</sup>提出的门传输 (Telegate) 方案使用两个EPR对 (或者两个GHZ态), 测量对象为数据比特和两个通信比特, 测量结果作用在另两个通信比特上, 该方案只需要同步双向经典通信; 2000年, 斯坦福大学的Zhou等<sup>[68]</sup>采用类似于量子隐形传态的方式对容错量子逻辑门进行构造, 包括非局部CNOT门, 使用一个EPR对, 测量对象为数据比特; 同一时间, 波茨坦大学的Eisert等<sup>[69]</sup>采用异步双向经典通信实现了对CNOT门的传输, 测量对象为通信比特, 他们还完成了向传输Toffoli门、多控U门等的多个控制位、一个受控位操作的拓展; 2004年, 马里兰大学的Yimsiriwattana等<sup>[70, 71]</sup>研究了一个控制位、多个受控位操作的传输方式, 通过将贝尔态替换为GHZ态, 可以将一个节点的控制位信息同步传输到多个节点的受控位上。图7是

在三个节点之间进行的纠缠 (左) 和解纠缠 (右) 操作, 实现了控制位信息的分发和回收, 分别被称为缠猫 (Cat-entangler) 和解猫 (Cat-disentangler)。

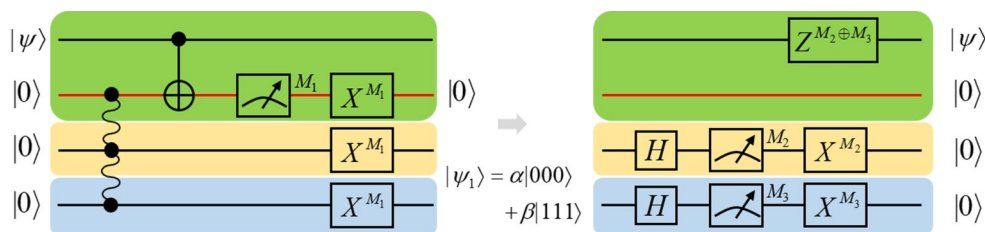


图 7 缠猫(左)和解猫(右)线路示意图<sup>[71]</sup>

Fig. 7 Sketch circuits of cat-entangler (left) and cat-disentangler (right)<sup>[71]</sup>

2007年, 哈佛大学的 Jiang 等<sup>[65]</sup>改变了文献[69]传输 CNOT 门的线路结构, 受控节点的测量操作不再依赖于控制节点的测量结果, 实现了同步双向经典通信, 使得线路的执行、测量和经典通信均可并行完成, 如图 5 所示线路; 2023年, 意大利那不勒斯费德里科二世大学的 Cuomo 等<sup>[67]</sup>实现了跨多节点纠缠交换的并行传输, 以及串行 CNOT 门的并行传输等, 由于一次传输操作花费的时间比一个局部量子门操作多很多, 其并行执行可节约大量时间, 大大提高分布式量子计算的效率。

量子隐形传态的理论研究已经非常成熟, 各种多比特门的传输得到了全面的研究。在分布式量子计算领域, 降低节点间的通信复杂度是大家普遍关心的问题。除了文献[67]采用的并行传输方法外, 还可以通过设计分布式量子算法或采用其他编译优化方法来降低节点间通信复杂度, 可参阅 2.3 和 2.4 节。

### 2.2.2 硬件实验

分布式量子计算硬件实验是一个热门的研究方向, 但也面临诸多挑战, 例如, 通信比特与数据比特的交互、远距离纠缠分发以及系统和硬件部署等问题<sup>[40, 46, 50, 72]</sup>。此处以是否对有量子算法进行实验为依据, 将研究过程分解为以下四个阶段: 1) 量子隐形传态实验, 2) 同空间分布式量子计算, 3) 跨空间分布式量子计算, 4) 量子计算机组建大型量子网络。其中, 同空间和跨空间分别对应于分布式量子计算的局部和非局部实现, 例如, 在一个稀释制冷机内部或在多个稀释制冷机之间实现超导芯片的分布式量子计算, 跨空间分布式量子计算需要独立的信道环境。

1998年, 罗马大学的 Boschi 等<sup>[73]</sup>采用 Popescu<sup>[74]</sup>提出的方法, 改用一个光子纠缠对, 将待传输的未知量子态直接编码到其中一个光子的偏振自由度上, 实现了量子隐形传态的所有非局部功能; 1997年, 因斯布鲁克大学的 Bouwmeester 等<sup>[75]</sup>采用两个光子纠缠对进行实验, 其中, 一个光子纠缠对用于实现 EPR 功能, 另一个光子纠缠对用于生成待传输的未知态及其指示信息, 当计数确认为贝尔态 $|\beta_{11}\rangle$ 时, 即可确定未知量子态已被传输到接收端; 1998年, 洛斯阿拉莫斯国家实验室的 Nielsen 等<sup>[76]</sup>利用液态核磁共振(NMR)演示了原子距离上的量子隐形传态, 该实验包含最后阶段的经典受控操作, 实现了量子隐形传态的所有功能。

2001年, 因斯布鲁克大学的 Duan 等<sup>[77]</sup>实现了量子中继器和长距离、高保真度量量子通信, 结合了光子的远距离传输和原子的长时间信息存储优势, 光子与原子的纠缠通过光电探测器光子干涉实现; 早期使用光子进行的量子隐形传态是概率性的; 2004年, 因斯布鲁克大学的 Riebe 等<sup>[78]</sup>在一对被囚禁的钙离子之间实现了确定性量子态传输, 保真度为 75%; 同时, 美国国家标准与技术研究院的 Barrett 等<sup>[79]</sup>实现了囚禁铍离子的确定性量子隐形传态, 平均保真度为 78%; 2013年, 东京大学的 Takeda 等<sup>[80]</sup>使用离散变量光子量子比特的连续变量隐形传态技术<sup>[81]</sup>, 实验实现了光子量子比特确定性、无条件的量子隐形传态; 2018年, 苏黎世联邦理工

学院的 Kurpiers 等<sup>[82]</sup>基于全微波腔辅助拉曼过程将超导量子比特与光子进行纠缠,实现了基于微波光子的确定性量子态传输;2020年,布里斯托大学的 Llewellyn 等<sup>[83]</sup>首次在硅光子芯片上演示了芯片间的量子隐形传态和真正的多方纠缠;2017年,中国科学技术大学的 Yin 等<sup>[84]</sup>开发了超亮星载双光子纠缠源,并提出高精度获取、指向和跟踪技术,利用"墨子号"卫星实现了纠缠分发从 100 km 到 1200 km 的巨大提升;2022年,该课题组又开发了一种高稳定干涉仪,利用"墨子号"卫星与地面站之间共享的纠缠,实现了超 1200 km 的量子态转移演示<sup>[85]</sup>。

作为第二种传输方式,量子隐形传态实验研究也很广泛。2004年,中国科学技术大学的 Huang 等<sup>[86]</sup>使用光量子比特实现了 CNOT 门的传输,平均传输保真度为 0.84;2006年,密西根大学的 Duan 等<sup>[87]</sup>通过光频率量子比特干涉,实现远距离囚禁原子间的概率性门传输;2010年,中国科学技术大学的 Gao 等<sup>[88]</sup>对 CNOT 门和控制相位门的传输进行了光学实验,前者使用高保真度六光子干涉仪,后者使用四光子超纠缠;2018年,耶鲁大学的 Chou 等<sup>[89]</sup>使用电磁谐振腔数据比特、超导通信比特及实时自适应控制技术,完成了对 CNOT 门的确定性量子隐形传态实验;2019年,美国国家标准与技术研究院的 Wan 等<sup>[90]</sup>使用镁离子纠缠对实现了两个铍离子之间的确定性 CNOT 门传输;2023年,南方科技大学的 Qiu 等<sup>[91]</sup>实现了两个远距离超导芯片间的确定性量子态和门传输,其信道长度为 64 m,远程纠缠通过飞行微波光子实现。

量子隐形传态的实验研究已经非常丰富,并逐步走向成熟,正在步入同空间分布式量子计算阶段。IBM 计划于 2024 年推出第一个采用量子通信链路进行比特拓展的超导量子系统,比特数可以达到 1386 个,由三个 Flamingo 处理器组成<sup>[92]</sup>,可为同空间分布式量子计算研究提供平台支撑。

跨空间分布式量子计算的研究也已经开始。2023年,中国科学技术大学的 Liu 等<sup>[93]</sup>使用光学系统首次完成了相距 7 km 节点之间的 Deutsch-Jozsa 算法和 QPE 算法的分布式量子计算演示。不过,最具潜力的超导和离子阱平台的跨空间实验实现相对困难,可能还需要一定的时间。作为分布式量子计算的支撑,量子网络的构建受到美国<sup>[94,95]</sup>、欧盟<sup>[96,97]</sup>的重视,中国也计划在 2025 年建成基于安全中继的城际量子网络<sup>[98]</sup>。将量子计算机接入量子网络、实现量子算力整合,是分布式量子计算的终极目标。

该方向的研究非常广泛,本小节进行了初步介绍,读者可进一步参阅相关文献 [99-110]。

### 2.3 应用算法

使用量子计算解决经典计算很难解决甚至不能解决的问题,除了高质量的量子硬件外,还需要有精心设计的量子算法来支撑。虽然还没有真实的基于量子隐形传态技术的分布式量子计算系统可用,但对分布式量子计算生态系统、模型等<sup>[50,111-113]</sup>的研究业已开始。图 8 展示了文献 [50] 给出的分布式量子计算生态系统框架结构,该框架分为五层,算法与硬件通过中间虚拟的大型集成式量子芯片进行交互。

当前,专门为分布式量子计算设计的算法不多,主要是对单片算法进行直接改造,或者通过编译将这种"分布式"特点隐藏起来,用户不需要关心底层硬件的分布式细节。1997年,贝尔实验室的 Grover<sup>[114]</sup>设计了一个估计数据均值的量子算法,在将其转换为分布式算法后,使用  $\eta$  个 EPR 对实现了算法  $O(\eta)$  倍的加速;1998年,荷兰国家数学与计算机科学研究中心的 Buhrman 等<sup>[115]</sup>对量子查询类算法(其量子线路的输入一般用一个具有特定函数功能的黑盒子来表示,如 Grover 算法<sup>[2]</sup>、Deutsch-Jozsa 算法<sup>[116]</sup>等)进行了分布式研究,可以充分发挥量子计算的并行计算能力;2004年,Yimsiriwattana 等<sup>[71]</sup>使用提出的缠猫和解猫方案研究了分布式 Shor 算法,该算法需要  $O(\log^2 N)$  的通信复杂度,其中  $N$  为要分解的整数;2006年,日本庆应义塾大学的 Van Meter 等<sup>[117,118]</sup>进行了分布式进位加法器的研究,结果表明比特传输比门传输具有更好的效果,他们还利用分布式算



术运算研究了分布式 Shor 算法; 2017 年, 南京邮电大学的 Sheng 等<sup>[119]</sup>提出了一种分布式安全量子机器学习算法, 利用远端小型光量子计算机对二维矢量进行分类, 可拓展到高维矢量; 2021 年, 英国 Riverlane 公司的 DiAdamo 等<sup>[120]</sup>对分布式 VQE 和 QPE 算法进行了研究, 图 9 是他们给出的一个运行分布式重映射算法的示意图, 该线路包含 3 个数据比特和 2 个通信比特, 其中,  $\theta_i$  表示变分参数。

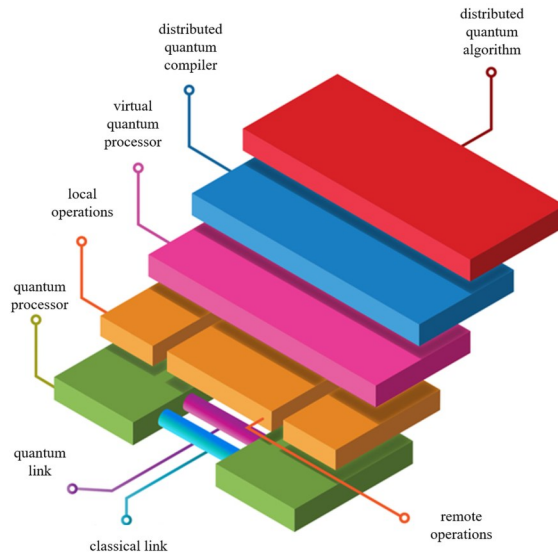


图 8 分布式量子计算生态系统架构<sup>[50]</sup>

Fig. 8 High-level system abstraction of the distributed quantum computing ecosystem<sup>[50]</sup>

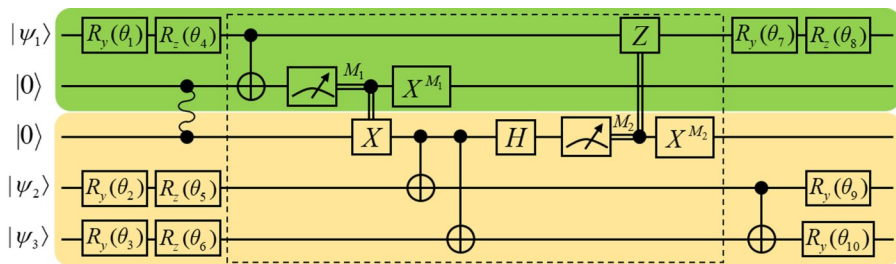


图 9 分布式 3 比特变分线路<sup>[120]</sup>

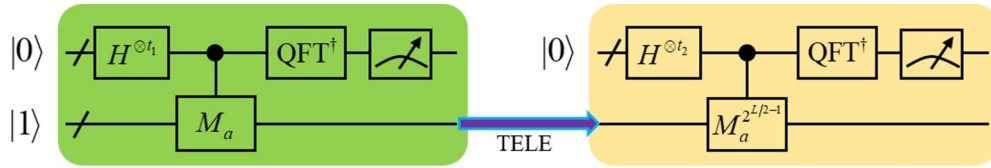
Fig. 9 Distributed three-qubit variational circuit<sup>[120]</sup>

2023 年, 中山大学的 Xiao 等<sup>[121]</sup>将 Shor 算法分解到两台量子计算机上进行求解, 并通过量子隐形传态保证前后求解数据的对应关系, 如图 10 所示; 随后, 他们进一步将该问题的求解拓展到多台量子计算机上, 并采用经典程序提高每台量子计算机输出结果的准确度<sup>[122]</sup>。此外, 该课题组还对其他量子算法的分布式进行了广泛的研究, 包括 Grover 算法、Deutsch-Jozsa 算法、Bernstein-Vazirani 算法和 Simon 算法等<sup>[123-126]</sup>, 有些算法未使用量子隐形传态, 此处一并给出。

近几年, 对量子拥挤模型 (Quantum congest model) 的研究逐渐增多<sup>[127-131]</sup>, 该模型讨论的是, 在多个节点间通信带宽受限的一般情况下, 量子计算能否取得加速等量子优势的问题。量子拥挤模型的应用非常广泛, 包括领导人选举问题、图优化问题、并行查询问题等。现有的研究表明, 在通信带宽有限的情况下, 量子拥挤模型能够利用量子通信的优势获得加速。

由于基于量子隐形传态的分布式量子计算的实用化还有很长的路要走, 目前人们对这类应用算法的研

究热情并不高。不过,跨空间分布式量子计算实验演示已经获得成功<sup>[93]</sup>,同空间分布式量子计算平台也即将被搭建起来<sup>[92]</sup>,未来几年这类应用算法的研究将会受到更多的关注。



QFT: quantum Fourier transform; TELE: teleportation

图 10 分布式 Shor 算法<sup>[121]</sup>

Fig. 10 Distributed Shor's algorithm<sup>[121]</sup>

## 2.4 编译优化

量子隐形传态技术为解决量子比特拓展问题提供了可行方案,但其硬件实现难度大,测量得到的经典信息的传输也需要占用大量时间。同时,构成分布式量子计算系统的量子计算机通常采用不同类型的物理芯片构建而成,且具有不同的比特拓扑结构和比特数。此外,不同量子计算机之间的通信链路数也不可能是无限的。在这样的现实情况下,直接运行某个量子算法可能会引入大量的芯片间通信复杂度,严重限制计算效率。因此,需要根据这些量子计算机的结构特点合理分配量子算法,降低芯片间通信复杂度,而这通常是一个 NP 难的问题。

2018 年,伊朗马什哈德菲尔多西大学的 Zomorodi-Moghadam 等<sup>[132]</sup>研究了最小化两个芯片之间比特传输次数数的方法,假设量子线路已经被平均地分配到两个芯片上,此时芯片间的 CNOT 门可以分配给任何一个芯片,通过穷尽所有的芯片间 CNOT 门配置即可获得最优解;2019 年,爱丁堡大学的 Andrés-Martínez 等<sup>[133]</sup>将量子线路转化为超图,并使用成熟的第三方求解器完成对超图的划分,以期最小化多芯片之间的通信量;2021 年,马什哈德菲尔多西大学的 Dadkhah 等<sup>[134]</sup>使用等效线路替换的方式简化原始量子线路,然后采用遗传算法降低芯片间通信量;同年,帕尔马大学的 Ferrari 等<sup>[135]</sup>从编译的角度出发,将比特传输和门传输应用于不同结构的量子线路,可降低芯片间通信量;石溪大学的 Sundaram 等<sup>[136]</sup>将量子线路的分布式操作分为两步,第一步使用普通平衡图划分技术将量子线路的比特划分给不同的芯片,第二步利用 CZ 门与缠猫操作的对易特性实现对芯片间通信的调度;2022 年, Dadkhah 等<sup>[137]</sup>通过最小化比特之间双门的距离对量子比特进行重排列,然后使用遗传算法和改进的禁忌搜索算法对量子线路进行划分;同年, Sundaram 等<sup>[138]</sup>首先将量子线路划分为几个大的子线路,各子线路之间通过量子隐形传态技术进行通信,然后使用禁忌搜索算法和迭代贪心算法确定各个子线路内部进一步划分所使用的缠猫操作;2023 年, Ferrari 等<sup>[139]</sup>提出一个面向分布式量子计算的模块化量子编译框架,考虑了量子网络和量子计算机的特点和限制,通过获取每个量子计算机的配置信息对量子线路进行合理的划分,完成局部映射和远程调度等操作,如图 11 所示。

降低芯片间通信复杂度,不仅要降低比特传输和门传输的次数,也应该降低比特传输和门传输花费的时间,例如, Cuomo 等<sup>[67]</sup>于 2023 年提出的并行传输方法(见 2.2.1 节)可大幅降低传输时间。未来真实的分布式量子计算系统必然更加复杂,需要研究更加高效的编译优化方法。以上面向第一类分布式量子计算的编译优化方法实际上也适用于第二类分布式量子计算。

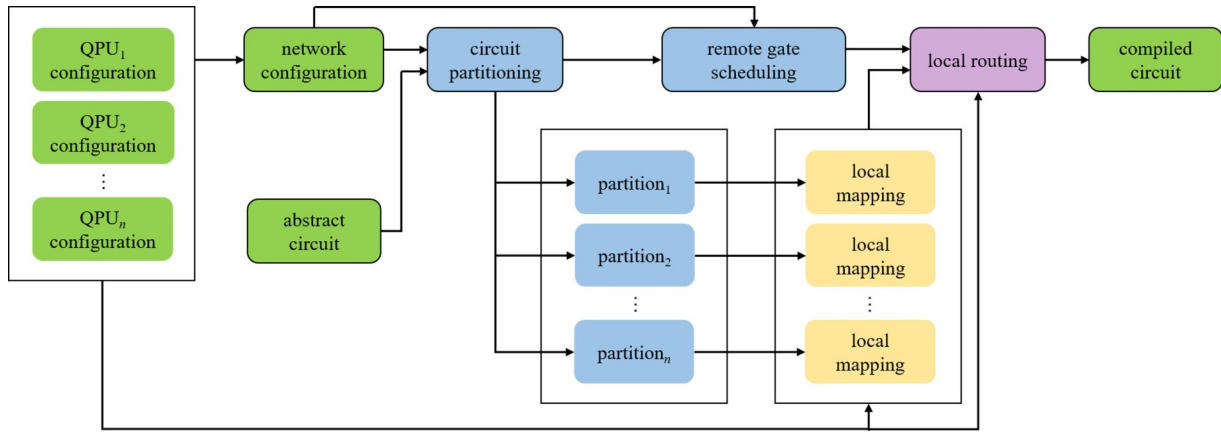


图 11 分布式量子计算架构模块化量子编译框架工作流程图<sup>[139]</sup>

Fig. 11 Workflow of the modular quantum compilation framework for DQC architectures<sup>[139]</sup>

### 3 基于量子线路拆分的分布式量子计算

#### 3.1 基本原理

第二类分布式量子计算主要基于量子线路拆分技术, 该技术可以将一个大规模的量子线路拆分成多个小规模子线路, 这些子线路在 NISQ 计算机上运行, 最后将各个子线路的输出通过经典后处理的方式组合起来, 得到与直接运行原始大规模线路相同的结果。该技术不仅可以缓解当前 NISQ 计算机比特数受限的问题, 小线路的运行也能更好地降低 NISQ 计算机引入的错误, 获得保真度更高的结果。量子线路拆分技术主要分为比特拆分方法 (Wire cutting) 和门拆分方法 (Gate cutting) 两类, 顾名思义, 前者通过切割量子比特实现对量子线路的拆分, 而后者则是切割两比特门, 分别与比特传输、门传输有异曲同工之妙。

比特拆分方法由麻省理工学院的 Peng 等<sup>[140]</sup>于 2020 年提出并证明, 其演示线路如图 12 所示, 图中红色的剪刀形状表示切割位置, 两个朝向不同的红色三角形分别表示某个可观测量与该可观测量的本征矢, 该方法的通信比特为图中的切割比特; 该线路被切割成两个分段, 通过不同的背景色来指示(下同)。比特拆分的有效性来源于任何  $2 \times 2$  维的矩阵  $A$  都可以被分解为

$$A = \frac{\text{Tr}(AI)I + \text{Tr}(AX)X + \text{Tr}(AY)Y + \text{Tr}(AZ)Z}{2}, \tag{7}$$

其中, 归一化的泡利矩阵  $\{I, X, Y, Z\}/\sqrt{2}$  构成正交归一化的矩阵基底。

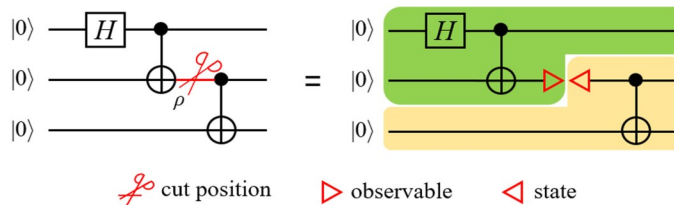


图 12 比特拆分示意图

Fig. 12 Illustrative circuit for wire cutting

根据以下谱分解关系

$$\begin{cases} I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \\ X = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| \\ Y = |+i\rangle\langle +i| - |-i\rangle\langle -i| \\ Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \end{cases}, \tag{8}$$

其中:  $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2}$ ,  $|\pm i\rangle = (|0\rangle \pm i|1\rangle)/\sqrt{2}$ , 对于切割点处的量子态  $\rho$ , 可以将其分解为

$$\rho = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \text{Tr}(\rho I) |0\rangle\langle 0| + \text{Tr}(\rho I) |1\rangle\langle 1| \right] + \left[ \text{Tr}(\rho X) |+\rangle\langle +| - \text{Tr}(\rho X) |-\rangle\langle -| \right] + \left[ \text{Tr}(\rho Y) |+i\rangle\langle +i| - \text{Tr}(\rho Y) |-i\rangle\langle -i| \right] + \left[ \text{Tr}(\rho Z) |0\rangle\langle 0| - \text{Tr}(\rho Z) |1\rangle\langle 1| \right] \right\}, \quad (9)$$

也就是说, 量子态  $\rho$  可以被分解为可观测量(泡利矩阵)  $I$ 、 $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  本征矢的线性组合, 各本征矢的占比由量子态  $\rho$  在对应可观测量下的期望(迹)决定。完整的可观测量、本征矢和本征值的对应关系为

$$\begin{cases} O_1 = I, \rho_1 = |0\rangle\langle 0|, & 2c_1 = +1 \\ O_2 = I, \rho_2 = |1\rangle\langle 1|, & 2c_2 = +1 \\ O_3 = X, \rho_3 = |+\rangle\langle +|, & 2c_3 = +1 \\ O_4 = X, \rho_4 = |-\rangle\langle -|, & 2c_4 = -1 \\ O_5 = Y, \rho_5 = |+i\rangle\langle +i|, & 2c_5 = +1 \\ O_6 = Y, \rho_6 = |-i\rangle\langle -i|, & 2c_6 = -1 \\ O_7 = Z, \rho_7 = |0\rangle\langle 0|, & 2c_7 = +1 \\ O_8 = Z, \rho_8 = |1\rangle\langle 1|, & 2c_8 = -1 \end{cases} \quad (10)$$

最终, 在切割单个量子比特的情况下, 原始线路需要 8 种"测量-制备"信道的线性组合来实现 (9) 式对应的恒等映射  $\rho = \sum_{i=1}^8 c_i \text{Tr}(\rho O_i) \rho_i$ 。如图 13 所示, 每个"测量-制备"信道由对泡利可观测量  $O_i$  的测量和对相应本征矢  $\rho_i$  的制备组成。那么, 在线路中任何时间步的任何比特上插入一组完备的"测量-制备"信道都不会影响线路的输出, 就像单位算符  $I$  作用在该比特上一样。因此, 也可以认为这组完备的"测量-制备"信道是在给定量子态下对单位算符的分解。

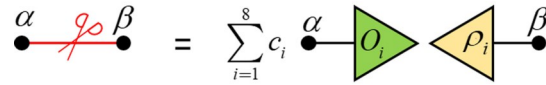


图 13 "测量-制备"信道<sup>[140]</sup>

Fig. 13 The "measure-and-prepare" channel<sup>[140]</sup>

比特拆分方法提出之初, 主要面向采样类的量子-经典混合算法, 如果总的切割比特数为  $k$  个, "测量-制备"信道数将会上升为  $8^k$  个。这将导致为了使目标可观测量的期望值达到  $\varepsilon$  的精度, 需要进行  $O(16^k/\varepsilon^2)$  次的采样实验, 每次实验随机执行  $8^k$  种信道中的一种。所以, 后续研究主要围绕降低信道数和增强并行计算能力两个方向展开, 人们还发现比特拆分方法在误差抑制方面具有非常好的性质。

如上所述, 比特拆分的"测量-制备"信道可以看作是在给定量子态下对单位算符的分解。那么, 是否存在其他算符也能够通过类似的方式进行分解呢? 门拆分就是采用类似的准概率模拟的方式将量子线路中的两比特门拆分成单比特门的方法, 由大阪大学的 Mitarai 和 Fujii<sup>[141]</sup>于 2021 年提出, 其演示线路如图 14 所示, 图中红色的剪刀形状表示切割位置, 两个红色矩形表示将 CNOT 门分解成单比特门的直积形式。门拆分并未切割比特, 用切割的两比特门进行通信, 该线路同样被切割成两个分段。

如图 15<sup>[141]</sup>所示, 对于给定的算符  $A_1$  和  $A_2$ , 如果它们同时满足么正和厄米特性, 则两比特算符  $e^{i\theta A_1 \otimes A_2}$  的准概率分解形式可以表示为

$$S(e^{i\theta A_1 \otimes A_2}) = \cos^2 \theta S(I \otimes I) + \sin^2 \theta S(A_1 \otimes A_2) + \frac{1}{8} \cos \theta \sin \theta \sum_{\alpha_1, \alpha_2 \in \{\pm 1\}^2} \alpha_1 \alpha_2 \left\{ S[(I + \alpha_1 A_1) \otimes (I + i\alpha_2 A_2)] + S[(I + i\alpha_1 A_1) \otimes (I + \alpha_2 A_2)] \right\}, \quad (11)$$



式中:  $S$  为超算符, 满足  $S(U)\rho = U\rho U^\dagger$ ,  $\alpha_i$  为算符  $A_i$  的本征值。当  $A_i = \{X, Y, Z\}$  时, 操作  $I \pm A_i$  和  $I \pm iA_i$  可分别与测量算符  $M_{A_i}$  和翻转算符  $e^{\pm iA_i, \pi/4}$  相对应, 那么, 两比特算符  $e^{i\theta A_1 \otimes A_2}$  就可以等价于直积操作  $I \otimes I$ 、 $A_1 \otimes A_2$ 、 $M_{A_1} \otimes e^{\pm iA_2, \pi/4}$  和  $e^{\pm iA_1, \pi/4} \otimes M_{A_2}$  的线性组合, 其中, 只有后两项与线路给定的量子态有关。通过后选择测量操作, 只需要 6 个直积操作而不是 10 个, 就可以完全模拟算符  $e^{i\theta A_1 \otimes A_2}$ 。因此, 相对于比特拆分方法<sup>[140]</sup>的  $16^k$  的采样复杂度, 最早的门拆分的采样复杂度只有  $9^k$ 。也就是说, 只需要将这 6 个直积操作的结果按照图 15 所示的线性组合形式组合起来, 就可以对目标可观测量的期望值进行估计。

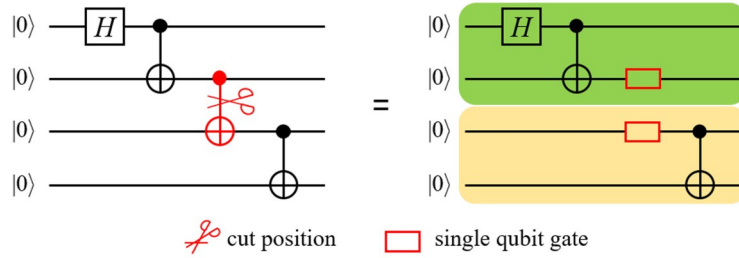


图 14 门拆分示意图

Fig. 14 Illustrative circuit for gate cutting

$$e^{i\theta A_1 \otimes A_2} = \cos^2 \theta \begin{matrix} I \\ I \end{matrix} + \sin^2 \theta \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} + \frac{1}{8} \cos \theta \sin \theta \sum_{\alpha_1, \alpha_2 \in \{\pm 1\}^2} \alpha_1 \alpha_2 \left( \begin{matrix} I + \alpha_1 A_1 \\ I + i\alpha_1 A_1 \end{matrix} + \begin{matrix} I + i\alpha_2 A_2 \\ I + \alpha_2 A_2 \end{matrix} \right)$$

图 15 两比特算符  $e^{i\theta A_1 \otimes A_2}$  的单比特门直积分解<sup>[141]</sup>

Fig. 15 Decomposition of two-qubit unitary  $e^{i\theta A_1 \otimes A_2}$  into a sequence of single-qubit gates<sup>[141]</sup>

基本的两比特门(如 CZ 门、CNOT 门)都可以通过两比特算符  $e^{i\theta A_1 \otimes A_2}$  合成得到。图 16<sup>[141]</sup>为 CZ 门分解成直积单比特门的示意图, 其与算符  $e^{i\theta A_1 \otimes A_2}$  的转换关系为  $CZ = e^{i\theta Z \otimes Z} e^{iZ \otimes I \pi/4} e^{-iZ \otimes Z \pi/4}$ 。

$$CZ = \frac{1}{2} \begin{matrix} e^{i\pi Z/4} \\ e^{i\pi Z/4} \end{matrix} + \frac{1}{2} \begin{matrix} e^{-i\pi Z/4} \\ e^{-i\pi Z/4} \end{matrix} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2 \in \{\pm 1\}^2} \alpha_1 \alpha_2 \left( \begin{matrix} (I + \alpha_1 Z)/2 \\ e^{i(\alpha_2 + 1)\pi Z/4} \end{matrix} + \begin{matrix} e^{i(\alpha_1 + 1)\pi Z/4} \\ (I + \alpha_2 Z)/2 \end{matrix} \right)$$

图 16 CZ 门的单比特门直积分解<sup>[141]</sup>

Fig. 16 Decomposition of CZ gate into a sequence of single-qubit gates<sup>[141]</sup>

至此, 已经介绍了两类分布式量子计算的基本原理, 二者基本性质的比较如表 1 所示。

表 1 两类分布式量子计算方法对比

Table 1 Comparison between the two types of DQC methods

序号	类别	第一类分布式量子计算	第二类分布式量子计算
1	通信方式	量子通信	经典通信
2	实现技术	量子隐形传态技术	线路拆分技术
3	方法分类	比特传输、门传输	比特拆分、门拆分
4	系统纠缠度	芯片内纠缠、芯片间纠缠	芯片内纠缠、芯片间不纠缠
5	面向平台	容错量子计算机	NISQ 计算机、容错量子计算机

由表 1 可知, 这两类分布式量子计算各有特点。第一类虽然能够将所有的比特都纠缠起来, 并提供指数级的信息存储和处理能力, 但量子隐形传态技术的实现难度很高, 需要占用大量量子资源, 对大规模、全纠

缠线路的有效运行可能还有很长的路要走,主要面向容错量子计算时代;第二类不需要保持各个芯片之间的远程纠缠,在NISQ计算机上就可以实现,但其采样复杂度随切割比特(门)数指数增长,更适合含有局部弱耦合线路的分布式计算。因此,将二者结合起来,可以实现纠缠能力和采样复杂度的合理折中,推动分布式量子计算的研究和发展。

### 3.2 研究进展

量子线路拆分技术可有效拓展NISQ计算机算力,并拥有应用于未来容错量子计算的巨大潜力,得到了广泛的关注,相关研究逐步深入。2019年,美国实验天体物理联合研究所的Perlin等<sup>[142]</sup>对单层硬件高效Ansatz进行了比特拆分和模拟实验,并初步讨论了各子线路输出概率重组的指数复杂度;2020年,法国Atos公司量子实验室的Aryal等<sup>[143]</sup>在IBM超导芯片上进行了大量实验,与含噪模拟进行对比,给出了一致的结果,并观测到比特拆分方法在噪声抑制方面的能力;次年,Aryal等<sup>[144]</sup>进一步研究了不同噪声对量子线路拆分的影响,实验和模拟表明,随着分段数的增加,提升读取速度可显著提高成功概率,提高门保真度对少分段拆分具有更好的效果,而延长相干时间的作用逐渐下降;2022年,IBM阿尔马登研究中心的Eddins等<sup>[145]</sup>提出经典纠缠锻造(Entanglement forging)技术,通过施密特分解将 $2n$ 比特的量子模拟分解为两个 $n$ 比特量子模拟的线性组合,使芯片可处理问题的规模加倍;同年,美国Menten AI公司的Huembeli等<sup>[146]</sup>结合生成式神经网络模型和经典纠缠锻造技术,将两个寄存器之间的纠缠转化为一个寄存器内的时间相关性,通过近似施密特系数可高精度地近似多体系统的基态。

2023年,苏黎世联邦理工学院的Piveteau和Sutter<sup>[147]</sup>受门传输思想的启发,将经典通信引入到门拆分方法中,当需要同时切割 $k$ 个相同的克利福德门才能将某一部分切割下来时,在有辅助比特的情况下,采样复杂度可以从 $9^k$ 降到 $(2^{k+1}-1)^2$ ;同时,证明了在双向经典通信条件下线路拆分可以获得的最低复杂度为 $(2^{k+1}-1)^2$ ,与是否采用辅助比特无关。

同年,加拿大Xanadu公司的Lowe等<sup>[148]</sup>把恒等映射思想引入经典通信,将基于泡利算符的“测量-制备”信道替换为基于随机测量的“测量-制备”信道,当同时切割 $k$ 个比特,且不使用辅助比特时,采样复杂度降低到 $(2^{k+1}+1)^2$ 。图17为该线路拆分方法的示意图,通过随机选择两个 $z$ 值中的一个进行相应的操作。当 $z=0$ 时,为第二个分段初始化与随机克利福德线路 $U$ 有关的量子态 $U|y\rangle$ ;当 $z=1$ 时,随机地为第二个分段初始化基矢量态 $|y'\rangle$ 。由于随机克利福德线路的数量随切割比特数超指数增长<sup>[149]</sup>,而且每次测量都需要随机分配一个随机克利福德线路,导致子线路的种类数随切割比特数指数增长。

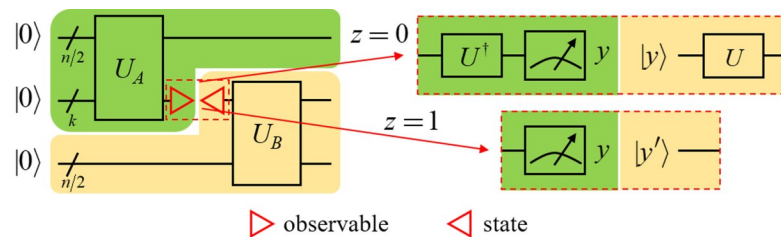


图17 基于随机克利福德线路的线路拆分方法示意图<sup>[148]</sup>

Fig. 17 Illustration of random Clifford circuit based circuit cutting method<sup>[148]</sup>

2023年,苏黎世IBM欧洲研究院的Brenner等<sup>[150]</sup>使用准概率模拟技术对量子线路拆分进行了研究,即将被切割的两比特门 $U$ 分解成局部操作 $F_i$ 的线性组合形式: $U = \sum_i \alpha_i F_i$ ,  $\alpha_i$ 为非零实数,然后随机地用 $F_i$ 替换 $U$

来执行线路, 以达到概率性模拟完整线路输出的目的, 复杂度随  $\sum_i |\alpha_i|$  的减小而降低; 此外, 他们还将线路拆分变换为准概率的门拆分形式, 研究并证明了在有无经典通信时的最优线路拆分复杂度分别为  $(2^{k+1}-1)^2$  和  $16^k$ , 与是否同时切割比特无关。

2023年, 凯斯西储大学的 Chen 等<sup>[151]</sup>通过寻找合适的切割位置, 将不提供有效信息的冗余信道去除, 线路拆分复杂度最高可以降低 33%; 同年, 庆应义塾大学的 Harada 等<sup>[152]</sup>通过去除随机克利福德线路集中的对易项, 在同时切割  $k$  个比特且没有辅助比特的情况下, 将所需随机克利福德线路数降低到  $2^{k+1}+1$  个, 得到了  $(2^{k+1}-1)^2$  的最优算法复杂度; IBM 沃森研究中心的 Pednault<sup>[153]</sup>证明了在数学上完备的随机克利福德线路集不是必须的, 只需要构建一个比它小很多的么正算符集即可(这与文献[152]的结果相似), 还给出了一个构建这种算符集的算法。以上对量子线路拆分技术研究的总结见表 2。

表 2 线路拆分技术复杂度统计

Table 2 Statistics on the complexity of the circuit cutting technique

序号	方法	类型	复杂度	经典通信	辅助比特	同时切割
1	[140]	比特拆分	$16^k$	无	无	无需
2	[141]	门拆分	$9^k$	无	无	无需
3	[147]	门拆分	$(2^{k+1}-1)^2$	有	有	需要
4	[148]	比特拆分	$(2^{k+1}+1)^2$	有	无	需要
5	[150]	比特拆分	$(2^{k+1}-1)^2$	有	有	无需
6	[152]	比特拆分	$(2^{k+1}-1)^2$	有	无	需要

除了面向采样问题进行的降低"测量-制备"信道数(也就是采样复杂度)的努力外, 也有增强该技术并行计算能力的研究。2021年, Perlin 等<sup>[154]</sup>进一步研究了"测量-制备"信道之间的相关性, 降低了信道数, 实现了各子线路的独立运行, 并使用最大似然层析对输出概率进行重组, 以降低噪声的影响; 同年, 普林斯顿大学的 Tang 等<sup>[155]</sup>将 (9) 式变形为

$$\rho = \frac{1}{2} \left\{ [\text{Tr}(\rho I) + \text{Tr}(\rho Z)] |0\rangle\langle 0| + [\text{Tr}(\rho I) - \text{Tr}(\rho Z)] |1\rangle\langle 1| + \text{Tr}(\rho X) [2|+\rangle\langle +| - |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|] + \text{Tr}(\rho Y) [2|+i\rangle\langle +i| - |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|] \right\}, \quad (12)$$

将"测量-制备"信道前后关系概率化, 实现了输出概率的完全重组, 并提出一个基于比特拆分方法的可拓展混合计算方案 CutQC, 整合了完整的线路拆分、运行和重组功能; 2022年, Tang 和 Martonosi<sup>[156]</sup>进一步提出量子态合并技术, 绕过对经典存储的指数依赖关系, 并采用计算图缩并的方式降低经典后处理复杂度; 同年, Chen 等<sup>[157]</sup>同样对输出概率重组问题进行了研究, 采用 Metropolis-Hastings 算法对输出结果进行概率采样, 降低概率完全重组的指数复杂度。

尽管引入了辅助比特和经典通信, 量子线路拆分技术的采样复杂度仍然随切割比特(门)数指数增长。当切割比特(门)数达到一定的程度时, 量子计算潜在的加速优势就会消失。因此, 找到适合量子线路拆分技术的应用场景是非常重要的。

### 3.3 应用算法

量子线路拆分技术刚提出不久, 对其应用的研究也在逐渐增多。2020年, Peng 等<sup>[140]</sup>在提出比特拆分方法的同时, 采用 VQE 算法对  $\text{BeH}_2$  的基态能量进行了估计, 他们通过拆分单个 CZ 门将 6 比特的硬件高效量子线路拆分成 12 个 3 比特的子线路, 并在 ibmq\_ourense 上进行了实验, 得到了与文献 [158] 类似精度的结果;

2022年, Eddins等<sup>[145]</sup>使用他们提出的纠缠锻造技术, 通过将部分计算转移到经典后处理中, 使用5个量子比特实现了对不同几何形状水分子基态能量的估计; 2023年, 中国科学技术大学的Ying等<sup>[159]</sup>通过合并 $I$ 、 $Z$ 矩阵对应的"测量-制备"信道, 将"测量-制备"信道数降为6个, 完成在12比特超导芯片上最高33比特线性cluster线路的拆分与实验, 其中, 子线路最大比特数为4个, 促进了基于测量的量子计算技术的发展; 同年, Lowe等<sup>[148]</sup>使用他们提出的基于随机测量的线路拆分方法, 对量子近似优化算法(Quantum approximate optimization algorithm, QAOA)进行了研究, 对于62比特的最大切割问题, 当将其配置为3个聚类, 每个聚类包含20个比特, 且各聚类间最多只有1个比特纠缠时, 两层线路的性能反而不如单层线路; Xanadu公司的Guala等<sup>[160]</sup>使用量子线路拆分技术对大比特数张量网络变量子线路进行了模拟, 尤其是矩阵直积态(Matrix product state, MPS)和树张量网络(Tree tensor network, TTN), 展示了该方法在复杂图像处理任务中的应用, 以及在工业相关机器学习任务中的前景。图18为树张量网络形量子线路拆分的示意图, 该类型量子线路具有很友好的比特拆分特性, 双斜线表示算符 $U_C$ 不作用于该比特。

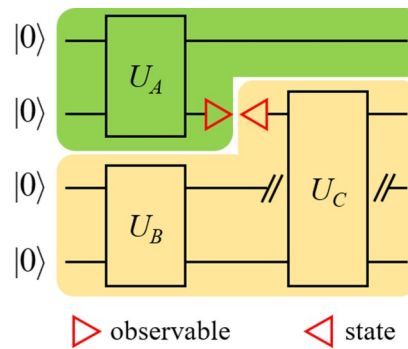
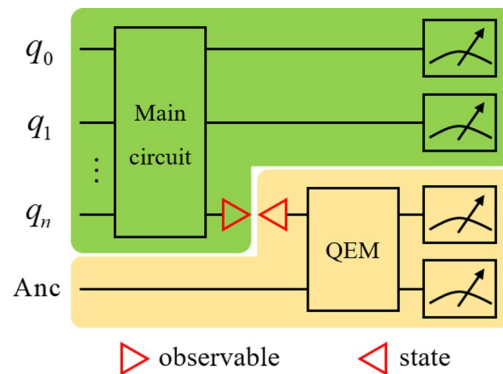


图18 树张量网络形量子线路拆分示意图<sup>[160]</sup>

Fig. 18 Sketch of wire cutting for a TTN-shaped quantum circuit<sup>[160]</sup>

2022年, 阿贡国家实验室的Liu等<sup>[161]</sup>将量子线路拆分技术应用于量子误差抑制(Quantum error mitigation, QEM), 对需要使用误差抑制线路的误差抑制技术, 将误差抑制线路从主线路拆下来, 并对误差抑制线路进行无噪声的经典模拟, 可显著提高输出保真度, 同时使用贝叶斯概率重组模型降低切割比特数引起的指数复杂度。图19为量子线路拆分技术与误差抑制技术结合的示意图, 主线路在量子计算机上执行, 而误差抑制线路在无噪声的经典模拟器上执行。



QEM: quantum error mitigation; Anc:ancilla

图19 量子误差抑制的线路切割框架<sup>[161]</sup>

Fig. 19 Circuit cutting framework for quantum error mitigation<sup>[161]</sup>



2022年,阿贡国家实验室的Chen等<sup>[162]</sup>对各分段进行经典阴影层析<sup>[163]</sup>,用于重构可观测量的期望值。线路拆分技术可以充分地发挥经典阴影在低比特数下的低采样复杂度优势,对作用于更多比特上的可观测量效果更好。

众所周知,经典计算可以高效模拟克利福德线路。利用这一基本事实,2023年,Inflection公司的Smith等<sup>[164]</sup>将量子线路中的克利福德子线路与非克利福德子线路拆分开来,使用经典计算对克利福德子线路进行模拟。在增加可模拟量子比特数的同时大大降低模拟时间,该方法对含有少量非克利福德门的准克利福德线路具有较好的效果。

可以看出,当前量子线路拆分技术的应用研究主要针对变分量子线路,且均对线路的局部弱耦合进行拆分,这可以在最大程度上保留量子计算潜在的加速优势。此外,与误差抑制和经典模拟的结合,也展示了该技术广泛的应用潜力。量子线路拆分技术的研究需要更加深入, $O(4^k)$ 的采样复杂度面向的是通用场景,对某些具体场景的研究可能会取得更好的效果,如文献<sup>[151]</sup>采用的方法。

### 3.4 编译优化

2022年,西孟加拉邦穆拉纳·阿布尔·卡拉姆·阿扎德理工大学的Chatterjee等<sup>[165]</sup>设计了量子编译器Qurzon,该编译器结合了量子线路拆分技术、最优量子位分配算法和一种调度算法,能够让量子算法更好地在真实NISQ芯片上运行;同年,加尔各答大学的Basu等<sup>[166]</sup>设计了基于机器学习的误差估计与抑制工具*i*-QER,该工具使用监督学习模型预测线路运行过程中存在的误差,当该误差高于设定的阈值时,会根据误差对线路的影响将该线路拆分成两个更小的子线路,迭代式地预测各子线路的误差,直到预测的误差低于阈值,则停止拆分。

量子线路拆分技术刚被提出时,编译优化方面的研究已经开始。由于量子线路拆分技术是目前为数不多的可有效拓展NISQ计算机算力的方法,可以预见,未来几年必然会有更多该技术编译优化方面的研究出现。两种类型的分布式量子计算的编译优化方法存在共通之处,请参阅2.4节。

## 4 结 论

介绍了分布式量子计算的分类、原理以及主要进展。由于量子计算机的设计与制造难度远高于经典计算机,同时为了获得相对于经典计算机的潜在的指数加速能力,对基于量子隐形传态技术的分布式量子计算的研究在量子计算机概念提出后不久就已经受到研究者的关注,成为量子计算机拓展比特数的一种主要的解决方案。而最近几年,随着NISQ计算机的成功研制和商业化,大量仅通过经典通信实现分布式量子计算的研究涌现,包括量子线路拆分在内的技术可以使人们更好地使用NISQ计算机进行实验并探索量子计算的发展前景。本领域的研究仍处于早期阶段,存在诸多问题仍未解决,需要持续研究、不断突破。硬件方面,比特退相干、通信比特与数据比特的交互、远距离纠缠分发等问题仍然存在很大的提升空间;算法方面,面向分布式计算的量子算法设计需要提上日程,还需要寻找更加合适的应用场景;分布式量子计算系统的研究刚刚开始,需要解决大量量子计算机的网络接入问题,以及动态调控和任务分配问题等等,是一个非常复杂的系统工程。因此,本文对分布式量子计算的阐述更加侧重理论原理和方法,同时包含一些初步的研究成果。

随着NISQ计算机比特数和精度的逐步提升,以及量子误差抑制技术的逐渐成熟,未来几年第二类分布式量子计算方法有望在经典优化、量子化学和量子机器学习等问题上找到并验证具有加速优势的应用,加

快推动量子计算应用落地, 实现量子优越性。同时, 量子隐形传态硬件实现的精度和距离也在逐步提升, 实现方式趋于多样化, 也让人们看到了分布式容错量子计算的巨大可能。两种类型的分布式量子计算存在互补优势, 二者的结合无疑可以有效降低分布式量子计算的实现难度; 而量超融合为它们提供了一种高效的结合方法, 同时可实现量子计算与经典计算的高效协同, 推动分布式量子计算更快发展。

### 参考文献:

- [1] Shor P W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring [C]. *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, Santa Fe, NM, USA. IEEE, 1994: 124-134.
- [2] Grover L K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack [J]. *Physical Review Letters*, 1997, 79(2): 325-328.
- [3] Harrow A W, Hassidim A, Lloyd S. Quantum algorithm for linear systems of equations [J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103(15): 150502.
- [4] Lambert N, Chen Y N, Cheng Y C, *et al.* Quantum biology [J]. *Nature Physics*, 2013, 9(1): 10-18.
- [5] Nielsen M A, Chuang I L. *Quantum Computation and Quantum Information* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- [6] Biamonte J, Wittek P, Pancotti N, *et al.* Quantum machine learning [J]. *Nature*, 2017, 549(7671): 195-202.
- [7] Preskill J. Quantum computing in the NISQ era and beyond [J]. *Quantum*, 2018, 2: 79.
- [8] Daley A J, Bloch I, Kokail C, *et al.* Practical quantum advantage in quantum simulation [J]. *Nature*, 2022, 607(7920): 667-676.
- [9] Babbush R, Huggins W J, Berry D W, *et al.* Quantum simulation of exact electron dynamics can be more efficient than classical mean-field methods [J]. *Nature Communications*, 2023, 14(1): 4058.
- [10] Herman D, Googin C, Liu X Y, *et al.* Quantum computing for finance [J]. *Nature Reviews Physics*, 2023, 5(8): 450-465.
- [11] Kivlichan I D, Gidney C, Berry D W, *et al.* Improved fault-tolerant quantum simulation of condensed-phase correlated electrons via trotterization [J]. *Quantum*, 2020, 4: 296.
- [12] Elfving V E, Broer B W, Webber M, *et al.* How will quantum computers provide an industrially relevant computational advantage in quantum chemistry? [OL]. 2020, arXiv: 2009.12472, <https://arxiv.org/abs/2009.12472>.
- [13] Lee J, Berry D W, Gidney C, *et al.* Even more efficient quantum computations of chemistry through tensor hypercontraction [J]. *PRX Quantum*, 2021, 2(3): 030305.
- [14] Gidney C, Ekerå M. How to factor 2048 bit RSA integers in 8 hours using 20 million noisy qubits [J]. *Quantum*, 2021, 5: 433.
- [15] Ivanov A V, Sünderhauf C, Holzmann N, *et al.* Quantum computation for periodic solids in second quantization [J]. *Physical Review Research*, 2023, 5(1): 013200.
- [16] Bruzewicz C D, Chiaverini J, McConnell R, *et al.* Trapped-ion quantum computing: Progress and challenges [J]. *Applied Physics Reviews*, 2019, 6(2): 021314.
- [17] Wang P F, Luan C Y, Qiao M, *et al.* Single ion qubit with estimated coherence time exceeding one hour [J]. *Nature Communications*, 2021, 12(1): 233.
- [18] Pelofske E, Bärttschi A, Eidenbenz S. Quantum volume in practice: What users can expect from NISQ devices [J]. *IEEE Transactions on Quantum Engineering*, 2022, 3: 1-19.
- [19] Arute F, Arya K, Babbush R, *et al.* Quantum supremacy using a programmable superconducting processor [J]. *Nature*, 2019, 574(7779): 505-510.

- [20] Huang H L, Wu D C, Fan D J, *et al.* Superconducting quantum computing: A review [J]. *Science China Information Sciences*, 2020, 63(8): 180501.
- [21] Zhong H S, Wang H, Deng Y H, *et al.* Quantum computational advantage using photons [J]. *Science*, 2020, 370(6523): 1460-1463.
- [22] Zhang X, Li H O, Cao G, *et al.* Semiconductor quantum computation [J]. *National Science Review*, 2019, 6(1): 32-54.
- [23] Philips S G J, Mądzik M T, Amitonov S V, *et al.* Universal control of a six-qubit quantum processor in silicon [J]. *Nature*, 2022, 609(7929): 919-924.
- [24] Wu Y, Liu W Q, Geng J P, *et al.* Observation of parity-time symmetry breaking in a single-spin system [J]. *Science*, 2019, 364(6443): 878-880.
- [25] Kaufman A M, Ni K K. Quantum science with optical tweezer arrays of ultracold atoms and molecules [J]. *Nature Physics*, 2021, 17(12): 1324-1333.
- [26] Li J, Luo Z H, Xin T, *et al.* Experimental implementation of efficient quantum pseudorandomness on a 12-spin system [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(3): 030502.
- [27] van Meter R, Devitt S J. Local and distributed quantum computation [OL]. 2016, arXiv: 1605.06951, <https://arxiv.org/abs/1605.06951>.
- [28] Li X W, Fu X, Yan F, *et al.* Current status and future development of quantum computation [J]. *Strategic Study of CAE*, 2022, 24(4):133-144.  
李 晓 巍, 付 祥, 燕 飞, 等. 量子计算研究现状与未来发展 [J]. *中国工程科学*, 2022, 24(4): 133-144.
- [29] Ballance C J, Harty T P, Linke N M, *et al.* High-fidelity quantum logic gates using trapped-ion hyperfine qubits [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 117(6): 060504.
- [30] Egan L, Debroy D M, Noel C, *et al.* Fault-tolerant control of an error-corrected qubit [J]. *Nature*, 2021, 598(7880): 281-286.
- [31] Barends R, Kelly J, Megrant A, *et al.* Superconducting quantum circuits at the surface code threshold for fault tolerance [J]. *Nature*, 2014, 508(7497): 500-503.
- [32] Google Quantum AI. Suppressing quantum errors by scaling a surface code logical qubit [J]. *Nature*, 2023, 614(7949): 676-681.
- [33] IonQ Forte: The first software-configurable quantum computer [OL]. <https://ionq.com/resources/ionq-forte-first-configurable-quantum-computer>.
- [34] Quantinuum. System model H2: Accelerating your path to fault-tolerant quantum computing [OL]. <https://www.quantinuum.com/hardware/h2>.
- [35] IBM quantum. IBM unveils 400 qubit-plus quantum processor and next-generation IBM Quantum System Two [OL]. 2022, <https://newsroom.ibm.com/2022-11-09-IBM-Unveils-400-Qubit-Plus-Quantum-Processor-and-Next-Generation-IBM-Quantum-System-Two>.
- [36] BAQIS Quafu Group. Quafu-RL: The cloud quantum computers based quantum reinforcement learning [OL]. 2023, arXiv: 2305.17966, <https://arxiv.org/abs/2305.17966>.
- [37] Smith K N, Ravi G S, Baker J M, *et al.* Scaling superconducting quantum computers with chiplet architectures [OL]. 2022, arXiv: 2210.10921, <https://arxiv.org/abs/2210.10921>.
- [38] Malinowski M, Allcock D T C, Ballance C J. How to wire a 1000-qubit trapped ion quantum computer [OL]. 2023, arXiv: 2305.12773, <https://arxiv.org/abs/2305.12773>.
- [39] Yezep J. Type-II quantum computers [J]. *International Journal of Modern Physics C*, 2001, 12(9): 1273-1284.
- [40] Caleffi M, Amoretti M, Ferrari D, *et al.* Distributed quantum computing: A survey [OL]. 2022, arXiv: 2212.10609, <https://arxiv.org/abs/2212.10609>.

- [41] de Leon N P, Itoh K M, Kim D, *et al.* Materials challenges and opportunities for quantum computing hardware [J]. *Science*, 2021, 372(6539): eabb2823.
- [42] Gill S S, Kumar A, Singh H, *et al.* Quantum computing: A taxonomy, systematic review and future directions [J]. *Software: Practice and Experience*, 2022, 52(1): 66-114.
- [43] Awan U, Hannola L, Tandon A, *et al.* Quantum computing challenges in the software industry. A fuzzy AHP-based approach [J]. *Information and Software Technology*, 2022, 147: 106896.
- [44] Kimble H J. The quantum internet [J]. *Nature*, 2008, 453(7198): 1023-1030.
- [45] Wehner S, Elkouss D, Hanson R. Quantum internet: A vision for the road ahead [J]. *Science*, 2018, 362(6412): eaam9288.
- [46] Cacciapuoti A S, Caleffi M, Tafuri F, *et al.* Quantum Internet: Networking challenges in distributed quantum computing [J]. *IEEE Network*, 2019, 34(1): 137-143.
- [47] Van Meter R, Satoh R, Benchasattabuse N, *et al.* A Quantum Internet architecture [C]. *2022 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)*, Broomfield, CO, USA, IEEE, 2022: 341-352.
- [48] Avis G, Rozpedek F, Wehner S. Analysis of multipartite entanglement distribution using a central quantum-network node [J]. *Physical Review A*, 2023, 107(1): 012609.
- [49] Cleve R, Buhrman H. Substituting quantum entanglement for communication [J]. *Physical Review A*, 1997, 56(2): 1201-1204.
- [50] Cuomo D, Caleffi M, Cacciapuoti A S. Towards a distributed quantum computing ecosystem [J]. *IET Quantum Communication*, 2020, 1(1): 3-8.
- [51] Van Meter R, Ladd T D, Fowler A G, *et al.* Distributed quantum computation architecture using semiconductor nanophotonics [J]. *International Journal of Quantum Information*, 2010, 8(01n02): 295-323.
- [52] Ruefenacht M, Taketani B G, Lähteenmäki P, *et al.* Bringing quantum acceleration to supercomputers [OL]. 2022, [https://meetiqm.com/uploads/documents/IQM\\_HPC-QC-Integration-Whitepaper.pdf](https://meetiqm.com/uploads/documents/IQM_HPC-QC-Integration-Whitepaper.pdf).
- [53] Elsharkawy A, To X T M, Seitz P, *et al.* Integration of quantum accelerators with high performance computing: A review of quantum programming tools [OL]. 2023, arXiv: 2309.06167, <https://arxiv.org/abs/2309.06167>.
- [54] Bravyi S, Smith G, Smolin J A. Trading classical and quantum computational resources [J]. *Physical Review X*, 2016, 6(2): 021043.
- [55] Li K, Qiu D W, Li L Z, *et al.* Application of distributed semi-quantum computing model in phase estimation [J]. *Information Processing Letters*, 2017, 120: 23-29.
- [56] Fujii K, Mizuta K, Ueda H, *et al.* Deep variational quantum eigensolver: A divide-and-conquer method for solving a larger problem with smaller size quantum computers [J]. *PRX Quantum*, 2022, 3(1): 010346.
- [57] Dunjko V, Ge Y M, Cirac J I. Computational speedups using small quantum devices [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121(25): 250501.
- [58] Ge Y M, Dunjko V. A hybrid algorithm framework for small quantum computers with application to finding Hamiltonian cycles [J]. *Journal of Mathematical Physics*, 2020, 61(1): 012201.
- [59] Li J D, Alam M, Ghosh S. Large-scale quantum approximate optimization via divide-and-conquer [J]. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2022, 42(6): 1852-1860.
- [60] Hua F, Jin Y, Chen Y, *et al.* Exploiting qubit reuse through mid-circuit measurement and reset [OL]. 2022, arXiv: 2211.01925, <https://arxiv.org/abs/2211.01925>.
- [61] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, *et al.* Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels [J]. *Physical Review Letters*, 1993, 70(13): 1895-1899.



- [62] Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? [J]. *Physical Review*, 1935, 47(10): 777-780.
- [63] Wootters W K, Zurek W H. A single quantum cannot be cloned [J]. *Nature*, 1982, 299(5886): 802-803.
- [64] Gottesman D, Chuang I L. Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations [J]. *Nature*, 1999, 402(6760): 390-393.
- [65] Jiang L, Taylor J M, Sørensen A S, *et al.* Distributed quantum computation based on small quantum registers [J]. *Physical Review A*, 2007, 76(6): 062323.
- [66] Żukowski M, Zeilinger A, Horne M A, *et al.* "Event-ready-detectors" Bell experiment via entanglement swapping [J]. *Physical Review Letters*, 1993, 71(26): 4287-4290.
- [67] Cuomo D, Caleffi M, Krsulich K, *et al.* Optimized compiler for distributed quantum computing [J]. *ACM Transactions on Quantum Computing*, 2023, 4(2): 1-29.
- [68] Zhou X L, Leung D W, Chuang I L. Methodology for quantum logic gate construction [J]. *Physical Review A*, 2000, 62(5): 052316.
- [69] Eisert J, Jacobs K, Papadopoulos P, *et al.* Optimal local implementation of nonlocal quantum gates [J]. *Physical Review A*, 2000, 62(5): 052317.
- [70] Yimsiriwattana A, Lomonaco Jr S J. Generalized GHZ states and distributed quantum computing [OL]. 2004, arXiv:quant-ph/0402148, <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0402148>.
- [71] Yimsiriwattana A, Lomonaco Jr S J. Distributed quantum computing: A distributed Shor algorithm [C]. *Quantum Information and Computation II, SPIE*, 2004, 5436: 360-372.
- [72] Sadhu A, Somayajula M A, Horodecki K, *et al.* Practical limitations on robustness and scalability of quantum Internet [OL]. 2023, arXiv: 2308.12739, <https://arxiv.org/abs/2308.12739>.
- [73] Boschi D, Branca S, De Martini F, *et al.* Experimental realization of teleporting an unknown pure quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels [J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(6): 1121-1125.
- [74] Popescu S. An optical method for teleportation [OL]. 1995, arXiv: quant-ph/9501020, <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9501020>.
- [75] Bouwmeester D, Pan J W, Mattle K, *et al.* Experimental quantum teleportation [J]. *Nature*, 1997, 390(6660): 575-579.
- [76] Nielsen M A, Knill E, Laflamme R. Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance [J]. *Nature*, 1998, 396(6706): 52-55.
- [77] Duan L M, Lukin M D, Cirac J I, *et al.* Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics [J]. *Nature*, 2001, 414(6862): 413-418.
- [78] Riebe M, Häffner H, Roos C F, *et al.* Deterministic quantum teleportation with atoms [J]. *Nature*, 2004, 429(6993): 734-737.
- [79] Barrett M D, Chiaverini J, Schaetz T, *et al.* Deterministic quantum teleportation of atomic qubits [J]. *Nature*, 2004, 429(6993): 737-739.
- [80] Takeda S, Mizuta T, Fuwa M, *et al.* Deterministic quantum teleportation of photonic quantum bits by a hybrid technique [J]. *Nature*, 2013, 500(7462): 315-318.
- [81] Braunstein S L, Kimble H J. Teleportation of continuous quantum variables [J]. *Physical Review Letters*, 1998, 80(4): 869-872.
- [82] Kurpiers P, Magnard P, Walter T, *et al.* Deterministic quantum state transfer and remote entanglement using microwave photons [J]. *Nature*, 2018, 558(7709): 264-267.
- [83] Llewellyn D, Ding Y H, Faruque I I, *et al.* Chip-to-chip quantum teleportation and multi-photon entanglement in silicon [J]. *Nature Physics*, 2020, 16(2): 148-153.

- [84] Yin J, Cao Y, Li Y H, *et al.* Satellite-based entanglement distribution over 1200 kilometers [J]. *Science*, 2017, 356(6343): 1140-1144.
- [85] Li B, Cao Y, Li Y H, *et al.* Quantum state transfer over 1200 km assisted by prior distributed entanglement [J]. *Physical Review Letters*, 2022, 128(17): 170501.
- [86] Huang Y F, Ren X F, Zhang Y S, *et al.* Experimental teleportation of a quantum controlled-NOT gate [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93(24): 240501.
- [87] Duan L M, Madsen M J, Moehring D L, *et al.* Probabilistic quantum gates between remote atoms through interference of optical frequency qubits [J]. *Physical Review A*, 2006, 73(6): 062324.
- [88] Gao W B, Goebel A M, Lu C Y, *et al.* Teleportation-based realization of an optical quantum two-qubit entangling gate [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2010, 107(49): 20869-20874.
- [89] Chou K S, Blumoff J Z, Wang C S, *et al.* Deterministic teleportation of a quantum gate between two logical qubits [J]. *Nature*, 2018, 561(7723): 368-373.
- [90] Wan Y, Kienzler D, Erickson S D, *et al.* Quantum gate teleportation between separated qubits in a trapped-ion processor [J]. *Science*, 2019, 364(6443): 875-878.
- [91] Qiu J, Liu Y, Niu J, *et al.* Deterministic quantum teleportation between distant superconducting chips [OL]. 2023, arXiv: 2302.08756, <https://arxiv.org/abs/2302.08756>.
- [92] The IBM Quantum Development Roadmap. The road to advantage [OL]. <https://www.ibm.com/quantum/roadmap>.
- [93] Liu X, Hu X M, Zhu T X, *et al.* Distributed quantum computing over 7.0 km [OL]. 2023, arXiv:2307.15634, <https://arxiv.org/abs/2307.15634>.
- [94] Q-NEXT. We bring together national experts and facilities to solve cutting-edge challenges in quantum information science [OL]. <https://q-next.org>.
- [95] HQAN. Propelling quantum information into a new era [OL]. <https://hqan.illinois.edu>.
- [96] Quantum Internet Alliance [OL]. <https://quantum-internet.team>.
- [97] European Commission. The European quantum communication infrastructure (EuroQCI) initiative [OL]. <https://digital-strategy.ec.europa.eu/en/policies/european-quantum-communication-infrastructure-euroqci>.
- [98] Amara Graps. How much money has China already invested into quantum technology? - Part 2 [OL]. <https://quantumcomputingreport.com/how-much-money-has-china-already-invested-into-quantum-technology>.
- [99] Stobińska M, Alber G, Leuchs G. Perfect excitation of a matter qubit by a single photon in free space [J]. *Europhysics Letters*, 2009, 86(1): 14007.
- [100] Wang Y M, Minář J, Sheridan L, *et al.* Efficient excitation of a two-level atom by a single photon in a propagating mode [J]. *Physical Review A*, 2011, 83(6): 063842.
- [101] Hucul D, Inlek I V, Vittorini G, *et al.* Modular entanglement of atomic qubits using photons and phonons [J]. *Nature Physics*, 2015, 11(1): 37-42.
- [102] Luo Y H, Zhong H S, Erhard M, *et al.* Quantum teleportation in high dimensions [J]. *Physical Review Letters*, 2019, 123(7): 070505.
- [103] Zhong Y P, Chang H S, Bienfait A, *et al.* Deterministic multi-qubit entanglement in a quantum network [J]. *Nature*, 2021, 590(7847): 571-575.
- [104] Zhao H, Feng J X, Sun J K, *et al.* Real time deterministic quantum teleportation over 10 km of single optical fiber channel [J]. *Optics Express*, 2022, 30(3): 3770-3782.

- [105] Daiss S, Langenfeld S, Welte S, *et al.* A quantum-logic gate between distant quantum-network modules [J]. *Science*, 2021, 371(6529): 614-617.
- [106] Krutyanskiy V, Galli M, Krcmarsky V, *et al.* Entanglement of trapped-ion qubits separated by 230 meters [J]. *Physical Review Letters*, 2023, 130(5): 050803.
- [107] Sahu R, Qiu L, Hease W, *et al.* Entangling microwaves with light [J]. *Science*, 2023, 380(6646): 718-721.
- [108] Hu X M, Guo Y, Liu B H, *et al.* Progress in quantum teleportation [J]. *Nature Reviews Physics*, 2023, 5(6): 339-353.
- [109] Luo W, Cao L, Shi Y Z, *et al.* Recent progress in quantum photonic chips for quantum communication and internet [J]. *Light: Science & Applications*, 2023, 12(1): 175.
- [110] Zhao J, Jeng H, Conlon L O, *et al.* Enhancing quantum teleportation efficacy with noiseless linear amplification [J]. *Nature Communications*, 2023, 14(1): 4745.
- [111] Gyongyosi L, Imre S. Scalable distributed gate-model quantum computers [J]. *Scientific Reports*, 2021, 11: 5172.
- [112] Häner T, Steiger D S, Hoefler T, *et al.* Distributed quantum computing with QMPI [C]. *Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis*, St. Louis, Missouri, New York: ACM, 2021: 1-13.
- [113] Davarzani Z, Zomorodi M, Houshmand M. A hierarchical approach for building distributed quantum systems [J]. *Scientific Reports*, 2022, 12(1): 15421.
- [114] Grover L K. Quantum telecomputation [OL]. 1997, arXiv: quant-ph/9704012, <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9704012>.
- [115] Buhrman H, Cleve R, Wigderson A. Quantum vs. classical communication and computation [C]. *Proceedings of the Thirtieth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Dallas, Texas, USA. New York: ACM, 1998: 63-68.
- [116] Deutsch D, Jozsa R. Rapid solution of problems by quantum computation [J]. *Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 1992, 439(1907): 553-558.
- [117] Van Meter R. Architecture of a quantum multicomputer optimized for Shor's factoring algorithm [OL]. 2006, arXiv: quant-ph/0607065, <https://arxiv.org/abs/quant-ph/0607065>.
- [118] Van Meter R, Nemoto K, Munro W J, *et al.* Distributed arithmetic on a quantum multicomputer [C]. *33rd International Symposium on Computer Architecture (ISCA'06)*, Boston, MA, USA. IEEE, 2006: 354-365.
- [119] Sheng Y B, Zhou L. Distributed secure quantum machine learning [J]. *Science Bulletin*, 2017, 62(14): 1025-1029.
- [120] DiAdamo S, Ghibaudi M, Cruise J. Distributed quantum computing and network control for accelerated VQE [J]. *IEEE Transactions on Quantum Engineering*, 2021, 2: 1-21.
- [121] Xiao L G, Qiu D W, Luo L, *et al.* Distributed Shor's algorithm [J]. *Quantum Information and Computation*, 2023, 23(1&2): 27-44.
- [122] Xiao L, Qiu D, Luo L, *et al.* Distributed quantum-classical hybrid Shor's algorithm [OL]. 2023, arXiv: 2304.12100, <https://arxiv.org/abs/2304.12100>.
- [123] Qiu D, Luo L, Xiao L. Distributed Grover's algorithm [OL]. 2022, arXiv: 2204.10487, <https://arxiv.org/abs/2204.10487>.
- [124] Li H, Qiu D, Luo L. Distributed exact quantum algorithms for Deutsch-Jozsa problem [OL]. 2023, arXiv: 2303.10663, <https://arxiv.org/abs/2303.10663>.
- [125] Zhou X, Qiu D, Luo L. Distributed exact quantum algorithms for Bernstein-Vazirani and search problems [OL]. 2023, arXiv: 2303.10670, <https://arxiv.org/abs/2303.10670>.
- [126] Li H, Qiu D, Luo L, *et al.* Exact distributed quantum algorithm for generalized Simon's problem [OL]. 2023, arXiv: 2307.14315, <https://arxiv.org/abs/2307.14315>.

- [127] Tani S, Kobayashi H, Matsumoto K. Exact quantum algorithms for the leader election problem [OL]. 2007, arXiv: 0712.4213, <https://arxiv.org/abs/0712.4213>.
- [128] Elkin M, Klauck H, Nanongkai D, *et al.* Can quantum communication speed up distributed computation? [C]. *Proceedings of the 2014 ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, Paris, France. New York: ACM, 2014: 166-175.
- [129] Izumi T, Le Gall F. Quantum distributed algorithm for the all-pairs shortest path problem in the CONGEST-CLIQUE model [C]. *Proceedings of the 2019 ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, Toronto ON, Canada. New York: ACM, 2019: 84-93.
- [130] van Apeldoorn J, de Vos T. A framework for distributed quantum queries in the CONGEST model [C]. *Proceedings of the 2022 ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, Salerno, Italy. New York: ACM, 2022: 109-119.
- [131] Wu X D, Yao P H. Quantum complexity of weighted diameter and radius in CONGEST networks [C]. *Proceedings of the 2022 ACM Symposium on Principles of Distributed Computing*, Salerno, Italy. New York: ACM, 2022: 120-130.
- [132] Zomorodi-Moghadam M, Houshmand M, Houshmand M. Optimizing teleportation cost in distributed quantum circuits [J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2018, 57(3): 848-861.
- [133] Andrés-Martínez P, Heunen C. Automated distribution of quantum circuits via hypergraph partitioning [J]. *Physical Review A*, 2019, 100(3): 032308.
- [134] Dadkhah D, Zomorodi M, Hosseini S E. A new approach for optimization of distributed quantum circuits [J]. *International Journal of Theoretical Physics*, 2021, 60(9): 3271-3285.
- [135] Ferrari D, Cacciapuoti A S, Amoretti M, *et al.* Compiler design for distributed quantum computing [J]. *IEEE Transactions on Quantum Engineering*, 2021, 2: 1-20.
- [136] Sundaram R G, Gupta H, Ramakrishnan C R. Efficient distribution of quantum circuits [C]. *35th International Symposium on Distributed Computing (DISC 2021)*. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum für Informatik, 2021.
- [137] Dadkhah D, Zomorodi M, Hosseini S E, *et al.* Reordering and partitioning of distributed quantum circuits [J]. *IEEE Access*, 2022, 10: 70329-70341.
- [138] Sundaram R G, Gupta H, Ramakrishnan C R. Distribution of quantum circuits over general quantum networks [C]. *2022 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)*, Broomfield, CO, USA, IEEE, 2022: 415-425.
- [139] Ferrari D, Carretta S, Amoretti M. A modular quantum compilation framework for distributed quantum computing [OL]. 2023, arXiv: 2305.02969, <https://arxiv.org/abs/2305.02969>.
- [140] Peng T Y, Harrow A W, Ozols M, *et al.* Simulating large quantum circuits on a small quantum computer [J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(15): 150504.
- [141] Mitarai K, Fujii K. Constructing a virtual two-qubit gate by sampling single-qubit operations [J]. *New Journal of Physics*, 2021, 23(2): 023021.
- [142] Perlin M A, Tomesh T, Pearlman B, *et al.* Parallelizing simulations of large quantum circuits [OL]. 2019, [https://sc19.supercomputing.org/proceedings/tech\\_poster/tech\\_poster\\_pages/rpost217.html](https://sc19.supercomputing.org/proceedings/tech_poster/tech_poster_pages/rpost217.html).
- [143] Ayrat T, Le Régent F M, Saleem Z, *et al.* Quantum divide and compute: Hardware demonstrations and noisy simulations [C]. *2020 IEEE Computer Society Annual Symposium on VLSI (ISVLSI)*, Limassol, Cyprus, IEEE, 2020: 138-140.
- [144] Ayrat T, Le Régent F M, Saleem Z, *et al.* Quantum divide and compute: Exploring the effect of different noise sources [J]. *SN Computer Science*, 2021, 2(3): 132.
- [145] Eddins A, Motta M, Gujarati T P, *et al.* Doubling the size of quantum simulators by entanglement forging [J]. *PRX Quantum*, 2022, 3(1): 010309.
- [146] Huembeli P, Carleo G, Mezzacapo A. Entanglement forging with generative neural network models [OL]. 2022, arXiv: 2205.00933, <https://arxiv.org/abs/2205.00933>.



- [147] Piveteau C, Sutter D. Circuit knitting with classical communication [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2023, 99: 1.
- [148] Lowe A, Medvidović M, Hayes A, *et al.* Fast quantum circuit cutting with randomized measurements [J]. *Quantum*, 2023, 7: 934.
- [149] Van Den Berg E. A simple method for sampling random Clifford operators [C]. *2021 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)*, Broomfield, CO, USA. IEEE, 2021: 54-59.
- [150] Brenner L, Piveteau C, Sutter D. Optimal wire cutting with classical communication [OL]. 2023, arXiv: 2302.03366, <https://arxiv.org/abs/2302.03366>.
- [151] Chen D T, Hansen E H, Li X, *et al.* Efficient quantum circuit cutting by neglecting basis elements [OL]. 2023, arXiv: 2304.04093, <https://arxiv.org/abs/2304.04093>.
- [152] Harada H, Wada K, Yamamoto N. Optimal parallel wire cutting without ancilla qubits [OL]. 2023, arXiv: 2303.07340, <https://arxiv.org/abs/2303.07340>.
- [153] Pednault E. An alternative approach to optimal wire cutting without ancilla qubits [OL]. 2023, arXiv: 2303.08287, <https://arxiv.org/abs/2303.08287>.
- [154] Perlin M A, Saleem Z H, Suchara M, *et al.* Quantum circuit cutting with maximum-likelihood tomography [J]. *NPJ Quantum Information*, 2021, 7: 64.
- [155] Tang W, Tomesh T, Suchara M, *et al.* CutQC: Using small quantum computers for large quantum circuit evaluations [C]. *Proceedings of the 26th ACM International Conference on Architectural Support for Programming Languages and Operating Systems, Virtual*, USA. New York: ACM, 2021: 473-486.
- [156] Tang W, Martonosi M. ScaleQC: A scalable framework for hybrid computation on quantum and classical processors [OL]. 2022, arXiv: 2207.00933, <https://arxiv.org/abs/2207.00933>.
- [157] Chen D, Baheri B, Chaudhary V, *et al.* Approximate quantum circuit reconstruction [C]. *2022 IEEE International Conference on Quantum Computing and Engineering (QCE)*, Broomfield, CO, USA. IEEE, 2022: 509-515.
- [158] Kandala A, Mezzacapo A, Temme K, *et al.* Hardware-efficient variational quantum eigensolver for small molecules and quantum magnets [J]. *Nature*, 2017, 549(7671): 242-246.
- [159] Ying C, Cheng B, Zhao Y W, *et al.* Experimental simulation of larger quantum circuits with fewer superconducting qubits [J]. *Physical Review Letters*, 2023, 130(11): 110601.
- [160] Guala D, Zhang S M, Cruz E, *et al.* Practical overview of image classification with tensor-network quantum circuits [J]. *Scientific Reports*, 2023, 13: 4427.
- [161] Liu J, Gonzales A, Saleem Z H. Classical simulators as quantum error mitigators via circuit cutting [OL]. 2022, arXiv: 2212.07335, <https://arxiv.org/abs/2212.07335>.
- [162] Chen D T, Saleem Z H, Perlin M A. Quantum divide and conquer for classical shadows [OL]. 2022, arXiv: 2212.00761, <https://arxiv.org/abs/2212.00761>.
- [163] Huang H Y, Kueng R, Preskill J. Predicting many properties of a quantum system from very few measurements [J]. *Nature Physics*, 2020, 16(10): 1050-1057.
- [164] Smith K N, Perlin M A, Gokhale P, *et al.* Clifford-based circuit cutting for quantum simulation [C]. *Proceedings of the 50th Annual International Symposium on Computer Architecture*, Orlando, FL, USA. New York: ACM, 2023: 1-13.
- [165] Chatterjee T, Das A, Mohtashim S I, *et al.* Qurzon: A prototype for a divide and conquer-based quantum compiler for distributed quantum systems [J]. *SN Computer Science*, 2022, 3(4): 323.
- [166] Basu S, Saha A, Chakrabarti A, *et al.* i-QER: An intelligent approach towards quantum error reduction [J]. *ACM Transactions on Quantum Computing*, 2022, 3(4): 1-18.