

DOI: 10.3969/j.issn.1007-5461.2023.06.014

# 空间纠缠协助下对低纠缠 GHZ 态的确定性纠缠纯化

朱孟正\*, 苏梦远, 公丕锋, 张金锋

(淮师范大学物理与电子信息学院, 安徽 淮北 235000)

**摘要:** 基于偏振分束器和半波片线性光学元件, 把在偏振自由度中出现的比特翻转和相位翻转错误转移到空间自由度中, 从而实现针对极化低纠缠 GHZ 态的确定性纠缠纯化。利用线性光学和超纠缠的方法, 该确定性纠缠纯化方案实施过程中无需知晓待纯化的低纠缠 GHZ 态的任何参数, 无需将偏振自由度中相位翻转错误转化成比特翻转再进行纯化, 也无需引入非线性效应, 仅需一个纯化步骤, 即可确定性地纠正偏振混合态中出现的比特翻转和相位翻转错误, 极大地增强了该方案的实验可行性。

**关键词:** 量子光学; 纠缠纯化; 量子通信; 超纠缠

中图分类号: O431.2; 文献标识码: A 文章编号: 1007-5461(2023)06-00943-09

## Deterministic entanglement purification for decohered GHZ state assisted by spatial entanglement

ZHU Mengzheng\*, SU Mengyuan, GONG Pifeng, ZHANG Jinfeng

(School of Physics & Electronic Information, Huaibei Normal University, Huaibei 235000, China)

**Abstract:** A deterministic entanglement purification protocol (EPP) for polarization decohered Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) state is presented based on linear optical elements such as polarization beam splitter and half-wave plate. The proposed EPP makes use of spatial entanglement as an additional resource to purify polarization entanglement, and its essence is to transfer the bit-flip and phase-flip errors from polarization degree of freedom (DOF) to spatial one using the methods of linear optics and hyper-entanglement. The entanglement purification scheme can be implemented without knowing any parameters of the low-entanglement GHZ state to be purified, without converting phase flip errors to bit flips for purification, introducing the nonlinear effects. According to the proposed EPP, just in a purification step, both the bit-flip and phase-flip errors in the polarization mixed states can be deterministically corrected by using additional entanglement DOF in spatial mode, which greatly enhances the experimental feasibility of this scheme.

**Key words:** quantum optics; entanglement purification; quantum communications; hyper-entanglement

基金项目: 国家自然科学基金 (51973078), 安徽省自然科学基金 (1808085MA08)

作者简介: 朱孟正 (1978 -), 安徽无为, 博士, 教授, 主要从事量子信息方面的研究。E-mail: mzzhu@139.com

收稿日期: 2022-01-15; 修改日期: 2022-03-29

\*通信作者。

## 0 引言

量子纠缠<sup>[1]</sup>对于量子通信而言是一种必要资源,如量子密钥分发<sup>[2]</sup>、量子隐形传态<sup>[3]</sup>和量子密集编码<sup>[4]</sup>。上述任何一种远距离高保真量子通信方案的实施,预知远距离纠缠粒子对最大纠缠状态是至关重要的。当纠缠粒子被彼此相互远离传送时,由于量子系统与环境之间的耦合,粒子之间的纠缠不可避免地会因环境噪声发生退相干而退化<sup>[5]</sup>。因此,需要量子纠缠浓缩<sup>[6]</sup>和量子纠缠纯化<sup>[7]</sup>方案的实施,通过本地操作和经典通信以完成从许多共享纠缠但纠缠度较低的粒子对中提取纠缠度相对较高的粒子对。从大量的初始纠缠度较低的纯态获得最大纠缠态的过程被视为纠缠浓缩<sup>[8]</sup>,而对于更一般的初始共享态为混合态的情况,该过程被视为纠缠纯化或蒸馏<sup>[9]</sup>。

超纠缠(多自由度的同时纠缠)提供了一种增加量子通道容量、提高长距离量子信息处理性能的有效方法。在2002年 Simon 和 Pan<sup>[10]</sup>提出一种量子纠缠纯化方案,利用空间纠缠作为额外的量子资源来纯化极化纠缠。随后许多量子纠缠纯化方案<sup>[11-14]</sup>均利用了超纠缠中的空间纠缠作为额外量子资源来开展工作。超纠缠也可用于增加量子密钥分发的容量<sup>[15]</sup>,以及为完全的贝尔态分辨方案提供协助<sup>[16-18]</sup>。

此外,文献[19]利用在自发参量转换中产生纠缠光子对,实验制备偏振、空间模和时间能量自由度的超纠缠态。最近, Hu 等<sup>[20]</sup>基于线性光学元件开展了实验性工作:在长距离量子通信中,利用超纠缠实现对极化纠缠的纠缠纯化,经过长距离纠缠分发后,在单个粒子的不同自由度之间进行确定性控制非门操作,并指出一对偏振空间模超纠缠通过多芯光纤在噪声环境下进行纠缠分发可超11千米。2014年,基于一个极化宇称测量、一个空间宇称测量和 $N-2$ 个单光子双量子比特测量,针对非局域 $N$ 个光子超纠缠 Greenberger-Horne-Zeilinger(GHZ)态在偏振和空间模的超纠缠的纯化方案被报道<sup>[21]</sup>,提到了如何建立偏振模和空间模的超纠缠 GHZ 态。考虑最初 $N$ 个光子处于非最大超纠缠态,这些光子在偏振模和空间模两个自由度上同时纠缠, Liu 等<sup>[22]</sup>在弱交叉克尔非线性的辅助下执行非破坏的宇称测量,获得 $N$ 个粒子极化最大纠缠的 GHZ 态。

本文提出的量子纠缠纯化方案无需引入弱交叉克尔非线性,仅需要借助少量的线性光学元件,通过消耗空间纠缠,各方可以从每一个低纠缠 GHZ 的混合态中获得高质量的极化纠缠 GHZ 态。在当前的量子纠缠纯化方案中,增加一种额外的量子资源即空间纠缠,可以同时校正极化混合态中的比特翻转和相位翻转错误,无需将相位翻转转化为比特翻转再进行纯化操作。

## 1 消耗空间纠缠实现量子纠缠纯化

基于线性光学元件,利用空间纠缠作为附加量子资源,提出了确定性的极化低纠缠 GHZ 态的量子纠缠纯化方案。任何长距离量子通信方案的实施都需要远程各方之间建立纠缠量子对,并使处于高纠缠态,然而不能通过各方之间的经典通信来实现,因此有必要给远程各方分发共享最大纠缠的粒子对。在纠缠分发的过程中,偏振自由度中的极化纠缠由于信道噪声而退化,实际上空间纠缠在此过程中也会受到影响,空间模之间的相位并不完全稳定<sup>[10]</sup>。然而,空间自由度中出现比特翻转错误的概率小,可以毫不费力地避免每一侧两个空间模式之间的串扰,例如将它们放在两条不同的光纤中<sup>[10]</sup>。故此,关于分发纠缠引起退相干的问题一般可以通过量子纠缠纯化或浓缩方法来解决,以达到长距离量子通信的目的。

在三个光子的情况下,偏振自由度的最大纠缠 GHZ 态为

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varphi_0^\pm\rangle_p \equiv (|HHH\rangle_{abc} \pm |VVV\rangle_{abc})/\sqrt{2} \\ |\varphi_1^\pm\rangle_p \equiv (|VHH\rangle_{abc} \pm |HVV\rangle_{abc})/\sqrt{2} \\ |\varphi_2^\pm\rangle_p \equiv (|HVH\rangle_{abc} \pm |VHV\rangle_{abc})/\sqrt{2} \\ |\varphi_3^\pm\rangle_p \equiv (|HHV\rangle_{abc} \pm |VVH\rangle_{abc})/\sqrt{2} \end{array} \right. , \quad (1)$$

以及空间模自由度的最大纠缠 GHZ 态为

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varphi_0^\pm\rangle_s \equiv (|a_1b_1c_1\rangle \pm |a_2b_2c_2\rangle)/\sqrt{2} \\ |\varphi_1^\pm\rangle_s \equiv (|a_2b_1c_1\rangle \pm |a_1b_2c_2\rangle)/\sqrt{2} \\ |\varphi_2^\pm\rangle_s \equiv (|a_1b_2c_1\rangle \pm |a_2b_1c_2\rangle)/\sqrt{2} \\ |\varphi_3^\pm\rangle_s \equiv (|a_1b_1c_2\rangle \pm |a_2b_2c_1\rangle)/\sqrt{2} \end{array} \right. . \quad (2)$$

为了实现某个特定的量子通信任务, 假设远程各方(Alice、Bob 和 Charlie)之间原定计划共享的超纠缠 GHZ 态是  $|\varphi_0^\pm\rangle_p |\varphi_0^\pm\rangle_s$ , 其中下标 s 和 p 分别代表空间模的和偏振模, (1)(2)式右侧的  $a b c$  分别对应 Alice、Bob 和 Charlie 方的光子或其空间模,  $H$  表示光的电矢量振动方向与入射面平行的线偏振分量,  $V$  表示其振动方向与入射面垂直的线偏振分量。如前所述, 空间自由度下的纠缠要比偏振情况下的更稳定, 因此空间模式中的纠缠被假设为在纠缠分发传输过程中是不变的<sup>[10]</sup>, 这里暂时假设只有极化纠缠受到环境噪声的影响, 经历消相干过程。在实际传输中, 信道噪声会使极化最大纠缠的纯态变成既含有比特翻转错误又含有相位翻转错误的混合态。通过纠缠分发, 远程各方(Alice、Bob 和 Charlie)之间共享的三光子混合态为

$$\rho = (F_0^+ |\varphi_0^+\rangle_p \langle \varphi_0^+| + F_0^- |\varphi_0^-\rangle_p \langle \varphi_0^-| + F_1^+ |\varphi_1^+\rangle_p \langle \varphi_1^+| + F_1^- |\varphi_1^-\rangle_p \langle \varphi_1^-| + F_2^+ |\varphi_2^+\rangle_p \langle \varphi_2^+| + F_2^- |\varphi_2^-\rangle_p \langle \varphi_2^-| + F_3^+ |\varphi_3^+\rangle_p \langle \varphi_3^+| + F_3^- |\varphi_3^-\rangle_p \langle \varphi_3^-|) \otimes |\varphi_0^\pm\rangle_s \langle \varphi_0^\pm| , \quad (3)$$

这里, 对于极化纠缠部分,  $F_0^\pm$  是量子系统在噪声信道上传输后的保真度, 因偏振自由度中出现相位翻转错误, 导致初始极化纠缠态  $|\varphi_0^\pm\rangle_p$  变为  $|\varphi_0^\mp\rangle_p$  的概率为  $F_0^\mp$ 。若出现比特翻转错误会造成极化纠缠态  $|\varphi_0^\pm\rangle_p$  变为  $|\varphi_1^\pm\rangle_p$ 、 $|\varphi_2^\pm\rangle_p$  或  $|\varphi_3^\pm\rangle_p$  的概率分别为  $F_1^\pm$ 、 $F_2^\pm$  或  $F_3^\pm$ 。倘若既发生了比特翻转错误又发生了相位翻转错误, 会致使初始极化纠缠态  $|\varphi_0^\pm\rangle_p$  变为  $|\varphi_1^\mp\rangle_p$ 、 $|\varphi_2^\mp\rangle_p$  或  $|\varphi_3^\mp\rangle_p$  的概率分别为  $F_1^\mp$ 、 $F_2^\mp$  或  $F_3^\mp$ 。因此, 当前提出量子纠缠纯化方案的整个任务是校正正在偏振自由度中的比特翻转错误和相位翻转错误。根据归一化的要求, 有

$$F_0^+ + F_0^- + F_1^+ + F_1^- + F_2^+ + F_2^- + F_3^+ + F_3^- = 1 . \quad (4)$$

本研究推荐的超纠缠辅助的三光子纠缠纯化方案原理如图 1 所示, 用于校正比特翻转和相位翻转误差。图 1 中  $R_{90}$  表示半波片, 其作用是将水平和垂直偏振均作  $90^\circ$  的旋转操作; PBS 表示偏振分束器, 其作用是将一束光线分为水平偏振和垂直偏振的两束正交偏振方向的线偏振光, 并将这两束正交偏振方向的线偏振光束至两个不同传播方向, 一般来说传播方向是相互垂直的, 使水平偏振光透射、垂直偏振光反射; 图 1 中心处字母 S 表示纠缠分发中心, 超纠缠态  $|\varphi_0^\pm\rangle_p |\varphi_0^\pm\rangle_s$  从中心 S 向远程三方发送, 图中三对虚线是光子通行的空间路径, 虚线部分也代指遥远路途, 当光子传送到 Alice、Bob 和 Charlie 各方时因信道噪声极化纠缠发生了

消纠缠, 演化为(3)式表示态, 需要纠缠纯化, 各方光子通过其持有的矩形阴影区域内的装置后, 光子到达方案图的最外围6个端口  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ , 最后对空间纠缠进行测量, 也就是选择一个适当端口组合, 从而实现极化纠缠态的纯化, 使远程三方共享极化最大纠缠 GHZ 态。接下来将着重详细阐述图 1 所示装置如何对极化低纠缠 GHZ 态进行纠缠纯化。由纠缠分发中心 S 传送给远程三方的光子, 从里往外光子首先通过放置在空间路径  $\tau_1$  ( $\tau = a, b, c$ ) 上的半波片  $R_{90}$ , 其极化态将发生比特翻转  $|H\rangle \rightleftharpoons |V\rangle$ , 相当于经历了泡利算符  $\sigma_x$  的操作; 随后, 每一个远程方(Alice、Bob 或 Charlie)的两种空间模式在偏振分束器 PBS 上交汇, 这里经 PBS 出射后的空间模式仍用与原始空间模式相同的编号表示, 见图 1; 经 PBS 交汇出射后, 在空间输出模  $\tau_2$  上通过半波片  $R_{90}$  的光子将被执行比特翻转变换, 即  $|H\rangle \rightleftharpoons |V\rangle$ 。为了更清晰地阐述量子纠缠纯化的每一个环节, 下面分四种情况逐一探讨当前方案对(3)式中的极化混合态每一成分的纠缠纯化。

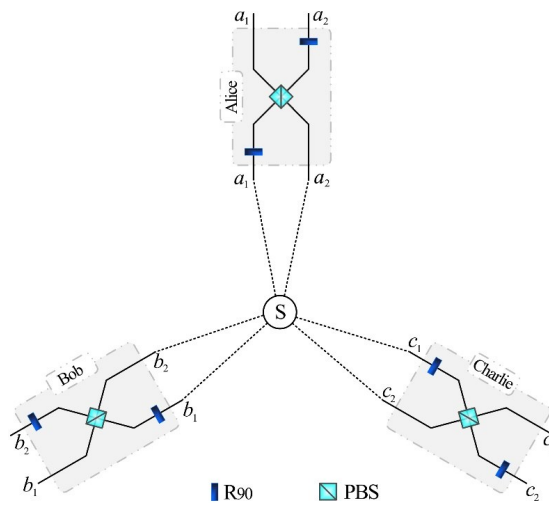


图 1 基于线性光学元件利用空间纠缠作为辅助资源, 实现对极化低纠缠 GHZ 态纠缠纯化的方案

Fig. 1 Schematic illustration of the EPP for the polarization decohered GHZ state using the spatial entanglement as an additional resource based on the linear optical elements

### 1.1 共享的极化纠缠态未遭受退相干影响和仅发生了相位翻转错误

首先考虑极化纠缠态不遭受退相干的情况, 其概率为  $F_0^+$ 。图 1 装置的作用是将输入态  $|\varphi_0^+\rangle_p |\varphi_0^+\rangle_s$  演变为  $|\varphi_0^+\rangle_p |\varphi_0^+\rangle_s$ , 此输入的量子态不会改变。在经过远程各方的半波片  $R_{90}$ 、偏振分束器 PBS 和半波片  $R_{90}$  等一系列作用之后, 远程三方可以在空间输出模  $a_1, b_1, c_1$  或  $a_2, b_2, c_2$  中获得偏振自由度上的最大纠缠 GHZ 态, 演化过程的每一个细节参见(5)式。

如果偏振自由度中量子态的相位翻转错误的发生概率为  $F_0^-$ , 则经装置作用后, 可使输入的量子态  $|\varphi_0^-\rangle_p |\varphi_0^+\rangle_s$  演变为  $|\varphi_0^+\rangle_p |\varphi_0^-\rangle_s$ , 值得注意的是: 原偏振自由度中量子态的相位翻转错误转移到空间自由度中, 从而自身的相位得到了校正。远程三方仍然可以在空间输出模  $a_1, b_1, c_1$  或空间输出模  $a_2, b_2, c_2$  中获得偏振自由度上的最大极化纠缠 GHZ 态, 详见(5)式。比较前述两种情况可见, 偏振自由度中出现相位翻转错误与否均不会影响到纠缠纯化的输出态和输出端口。通过对空间自由度中量子纠缠态的测量, 消除了偏振自由度中的相位翻转错误。类似于文献[11], 当前的纯化方案, 偏振自由度中的相位翻转错误可直接被纯化校正, 而无需转化为比特翻转错误后再进一步纯化处理, 与文献[10]中处理情况不同。对于输入量子态



$|\varphi_0^+\rangle_p |\varphi_0^+\rangle_s$  或者是  $|\varphi_0^-\rangle_p |\varphi_0^+\rangle_s$ , 详细演化过程为

$$\begin{aligned}
 & |\varphi_0^\pm\rangle_p |\varphi_0^\pm\rangle_s = (|HHH\rangle_{a_1b_1c_1} + |HHH\rangle_{a_2b_2c_2} \pm |VVV\rangle_{a_1b_1c_1} \pm |VVV\rangle_{a_2b_2c_2})/2 \xrightarrow{\tau_1} \\
 & (|VVV\rangle_{a_1b_1c_1} + |HHH\rangle_{a_2b_2c_2} \pm |HHH\rangle_{a_1b_1c_1} \pm |VVV\rangle_{a_2b_2c_2})/2 \xrightarrow{\text{PBS}} \\
 & (|VVV\rangle_{a_1b_1c_1} + |HHH\rangle_{a_1b_1c_1} \pm |HHH\rangle_{a_2b_2c_2} \pm |VVV\rangle_{a_2b_2c_2})/2 \xrightarrow{\tau_2} \\
 & (|VVV\rangle_{a_1b_1c_1} + |HHH\rangle_{a_1b_1c_1} \pm |VVV\rangle_{a_2b_2c_2} \pm |HHH\rangle_{a_2b_2c_2})/2 = \\
 & |\varphi_0^\pm\rangle_p |\varphi_0^\pm\rangle_s .
 \end{aligned} \tag{5}$$

### 1.2 共享的极化纠缠态 Alice 方发生比特翻转、相位翻转错误

如果是远程三方初始共享的量子态是  $|\varphi_1^+\rangle_p |\varphi_0^+\rangle_s$  或  $|\varphi_1^-\rangle_p |\varphi_0^+\rangle_s$ , 或者换言之, 远程 Alice 方持有光量子的偏振自由度发生比特翻转错误对应的概率  $F_1^+$  或  $F_1^-$ , 则在经过偏振分束器 PBS 和前后两个半波片  $R_{90}$  的作用之后, 量子态  $|\varphi_1^\pm\rangle_p |\varphi_0^+\rangle_s$  演变为  $|\varphi_0^+\rangle_p |\varphi_1^\pm\rangle_s$ , 该结果可根据图 1 和类似(5)式推演得到。由此可见, 经过当前纯化方案, 偏振自由度中的相位翻转和比特翻转错误均被转移到空间自由度中, 而自身得到了校正, 远程三方仍然可以在空间输出模  $a_2$ 、 $b_1$ 、 $c_1$  或空间输出模  $a_1$ 、 $b_2$ 、 $c_2$  中能获得所期望的极化最大纠缠 GHZ 态。简而言之, 图 1 所示的纯化装置作用就是将空间模纠缠转化为偏振纠缠。

### 1.3 共享的极化纠缠态 Bob 方发生比特翻转、相位翻转错误

假设 Bob 方的光量子发生比特翻转错误, 此外若再叠加出现偏振自由度的相位翻转, 也就是说, 远程三方初始共享的量子态是  $|\varphi_2^\pm\rangle_p |\varphi_0^+\rangle_s$ 。通过装置作用, 量子态  $|\varphi_2^\pm\rangle_p |\varphi_0^+\rangle_s$  演变为  $|\varphi_0^+\rangle_p |\varphi_2^\pm\rangle_s$ 。对于 Alice、Bob 和 Charlie 来说, 可以在空间模  $a_1$ 、 $b_2$ 、 $c_1$  或  $a_2$ 、 $b_1$ 、 $c_2$  中获得所期望的偏振自由度最大纠缠 GHZ 态。

### 1.4 共享的极化纠缠态 Charlie 方发生比特翻转、相位翻转错误

若远程三方初始共享量子态  $|\varphi_3^\pm\rangle_p |\varphi_0^+\rangle_s$ , 即 Charlie 方的光量子发生比特翻转错误, 此外若再叠加出现偏振自由度的相位翻转情况, 纯化装置将量子态  $|\varphi_3^\pm\rangle_p |\varphi_0^+\rangle_s$  演变为  $|\varphi_0^+\rangle_p |\varphi_3^\pm\rangle_s$ 。对于 Alice、Bob 和 Charlie 来说, 可以在空间模  $a_1$ 、 $b_1$ 、 $c_2$  或  $a_2$ 、 $b_2$ 、 $c_1$  中获得所期望的偏振自由度极化最大纠缠 GHZ 态。

综上所述, 本研究的量子纠缠纯化方案本质就是将在偏振自由度中出现比特翻转错误和相位翻转错误系数转移到空间自由度中, 然后测量空间纠缠, 从而在偏振自由度中获得极化最大纠缠 GHZ 态。远程三方初始共享的如(3)式描述的低纠缠量子混合态整体, 图 1 装置使其由内到外, 经历  $\tau_1$  模上的半波片、偏振分束器 PBS、 $\tau_2$  模上的半波片等光学器件一系列演化作用, 演变为与(3)式所表达的相同混合态, 仅下标 s 和 p 的位置进行了互换。也就是说, (3)式描述的初始混合态经纠缠纯化装置变成了所期望的极化的最大纠缠 GHZ 态与空间模的混合态的直积态。至于空间模自由度下的量子混合态可以看作是由 8 种不同空间模式组合而成:  $a_1b_1c_1$ 、 $a_2b_2c_2$ 、 $a_2b_1c_1$ 、 $a_1b_2c_2$ 、 $a_1b_2c_1$ 、 $a_2b_1c_2$ 、 $a_1b_1c_2$  和  $a_2b_2c_1$ ; 因为每一远程方有两个输出端口, 即两个空间模, 所以空间模式的组合共有  $2^3$  种选择。通过选择这些不同空间模式中的任何一种, 即是对空间纠缠进行测量的纠缠塌缩, 便可以校正偏振自由度中的比特翻转和相位翻转错误, 并获得所期望的极化最大纠缠 GHZ 态。如果开始直接将混合态整体输送到如图 1 所示的纯化方案中, 经历一系列演化( $R_{90}$  半波片, 偏振分

束器 PBS, 再经过  $R_{90}$  半波片, 后对方案图最外围的输出端口作适当选择, 即测量空间纠缠)后逐步演变成所期望的极化最大纠缠 GHZ 态, 其中每一个环节的演化作用, 可模仿(5)式推演的方法表述清楚, 则公式太长, 所占篇幅过大, 不利于快速理解该方案运行机制; 若考虑(3)式表示的混合态整体经该方案演化, 结合到本方案以消耗空间纠缠为代价实现对偏振自由度的纠缠纯化, 即最后对空间纠缠进行测量, 实际上即是选择适当的一组输出端口, 逐一探讨空间纠缠测量的每一种塌缩结果与上述分情况分析的结论完全一致。另外, 上述四种情况也包含了类似情形, 如 Alice 和 Bob 方在偏振自由度中均发生比特翻转错误而 Charlie 未发生的情况, 从(1)式看出, 该情形对应 2.4 小节讨论的内容, 其他的情形均包含在上述四种情况中。

本研究的量子纠缠纯化方案是建立在假设空间模自由度中空间纠缠处于理想完美的情况下。在实际纠缠分发过程中, 空间纠缠会受到噪声的影响, 不过如前所述, 这种影响主要导致不同空间模式之间出现相对相位, 不会导致空间比特翻转<sup>[10]</sup>。文献[23]指出, 相对相位可归因于光纤长度色散, (3)式中所描述的空间纠缠态可能在传输后变为  $(|a_1b_1c_1\rangle + e^{i\Delta\phi}|a_2b_2c_2\rangle)/\sqrt{2}$ , 其中相对相位  $\Delta\phi = k\Delta l$ 。这里的  $k$  是光子的波矢量大小,  $\Delta l$  是两个空间模之间的路径长度差, 即  $\Delta l = l_{a_1b_1c_1} - l_{a_2b_2c_2}$ 。在空间模不完美的情况下, 极化纠缠态总是在纠缠纯化之后变为  $(e^{i\Delta\phi}|HHH\rangle_{abc} + |VVV\rangle_{abc})/\sqrt{2}$ 。以 Alice 方持有的光量子发生偏振自由度中比特翻转错误为例, 经图 1 所示装置作用, 空间纠缠不完美时的演化过程可表示为

$$\begin{aligned}
 & |\varphi_1^{\pm}\rangle_p \otimes (|a_1b_1c_1\rangle + e^{i\phi}|a_2b_2c_2\rangle)/\sqrt{2} = \\
 & (|VHH\rangle_{a_1b_1c_1} + e^{i\phi}|VHH\rangle_{a_2b_2c_2} \pm |HVV\rangle_{a_1b_1c_1} \pm e^{i\phi}|HVV\rangle_{a_2b_2c_2})/2 \xrightarrow[\tau_1]{R_{90}} \\
 & (|HVV\rangle_{a_1b_1c_1} + e^{i\phi}|VHH\rangle_{a_2b_2c_2} \pm |VHH\rangle_{a_1b_1c_1} \pm e^{i\phi}|HVV\rangle_{a_2b_2c_2})/2 \xrightarrow{\text{PBS}} \\
 & (|HVV\rangle_{a_2b_1c_1} + e^{i\phi}|VHH\rangle_{a_2b_1c_1} \pm |VHH\rangle_{a_1b_1c_2} \pm e^{i\phi}|HVV\rangle_{a_1b_1c_2})/2 \xrightarrow[\tau_2]{R_{90}} \\
 & (|VVV\rangle_{a_2b_1c_1} + e^{i\phi}|HHH\rangle_{a_2b_1c_1} \pm |VVV\rangle_{a_1b_1c_2} \pm e^{i\phi}|HHH\rangle_{a_1b_1c_2})/2 = \\
 & \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\phi}|HHH\rangle_{abc} + |VVV\rangle_{abc}) \otimes |\varphi_1^{\pm}\rangle_s .
 \end{aligned} \tag{6}$$

如果空间路径长度差是固定的, 通过相位补偿, 远程三方 Alice、Bob 和 Charlie 仍可以利用空间纠缠作为辅助的量子资源, 获得所期望的极化最大纠缠 GHZ 态。

对低纠缠混合态的纠缠纯化方案已有大量研究, 但本研究提出的纠缠纯化方案具有一定的优势和特点。在文献[24]关于极化 GHZ 态的纠缠纯化协议中, 需要两组完全相同的低纠缠对; 对于检测和纠正比特翻转错误, 需要用到基于交叉克尔非线性的宇称测量, 进一步实现纠缠纯化; 然而, 为了纠正相位翻转错误, 需要将其转换为比特翻转错误; 为了提高纠缠纯化效率, 引入了循环纯化程序, 这必然会增加实验难度和复杂度。在文献[21, 22]中, 以空间纠缠作为辅助纠缠, 基于超纠缠实现极化低纠缠 GHZ 态的纯化方案, 其中一个方案<sup>[21]</sup>需用到极化宇称测量、空间宇称测量和  $N-2$  个单光子双量子比特测量, 实现纠缠纯化得到高质量的极化纠缠 GHZ 态; 另一个方案<sup>[22]</sup>引入辅助光子和交叉克尔非线性执行非破坏宇称测量, 分步执行纠缠纯化, 获得极化最大纠缠 GHZ 态。Zhou 等<sup>[25]</sup>提出了基于线性光学元件对极化低纠缠 GHZ 的纯化方案可以推广到多光子情形; 对有些情况该方案不能进行纯化, 要求具有远程两方事先额外共享两光子纠缠 Bell 态的条件, 相对比较严苛, 因远程量子通信中建立双方之间最大纠缠 Bell 态, 本身就需要纠缠纯化才能实现。Luo 等<sup>[26]</sup>提出了基于偏振和时间两个自由度中的超纠缠实现对极化低纠缠 GHZ 的纯化方案, 时间自由度中的纠缠作为纯

化过程中的辅助资源被消耗;若两个自由度中均出现比特翻转错误和相位翻转错误,则需要先校正比特翻转错误,然后用两个相同的极化低纠缠 GHZ 态将相位翻转转化成比特翻转错误,再对比特翻转错误校正,获得一个极化最大纠缠 GHZ 态,不是一步就可以同时完成比特翻转和相位翻转的校正;此外,因有些情况不能进行纯化,不能做到确定性的纯化。Yan 等<sup>[27]</sup>在 2021 年提出了另一个在线性光学中基于 Bell 态测量的可行性高的纠缠纯化方案,从多个相同的低纠缠对中获取一个远程两粒子极化最大纠缠态,每一方均需要用极化最大纠缠 GHZ 态作为辅助量子资源,该方案仅用到线性光学器件,实验可行性较高,纯化是基于 Bell 态测量结果,而其 Bell 态测量仅对四个 Bell 态中的两个有效,这势必会影响到纯化成功概率,就如其自身指出的那样,该方案的挑战在于获取多光子最大纠缠 GHZ 态。在超纠缠辅助对极化低纠缠 Bell 态纠缠纯化方案<sup>[10]</sup>中,可以通过消耗空间纠缠彻底纠正偏振自由度中的比特翻转错误,但是偏振自由度中相位翻转错误不能在建议的纯化协议中直接获得校正,需要额外步骤将相位翻转错误转化为比特翻转,再进行纯化处理。文献[23]提出了一种基于超纠缠辅助的纠缠纯化方案,同时引入了空间模纠缠和频率模纠缠作为两个额外的量子资源来分别纠正比特翻转错误和相位翻转错误,此外,方案中还需要利用交叉克尔非线性。

## 2 结 论

基于线性光学元件并以空间纠缠作为辅助的量子资源,本研究提出的量子纠缠纯化方案用于纯化极化低纠缠的 GHZ 混合态。对提出的纠缠纯化方案进行了详细阐述和推演,清晰地表达了其工作原理,并简要介绍和分析了对低纠缠混合态纠缠纯化的若干现有方案,通过分析比较,可以看出本方案有如下优点:当前提出的量子纠缠纯化方案简单而高效,可确定性地实现量子纠缠纯化;与之前常见的纠缠纯化方案需要两组低纠缠的混合态不同,当前方案仅使用一组低纠缠混合态;需要一个空间模纠缠作为辅助的量子资源,仅需一步即可同时校正偏振自由度中极化混合态的比特翻转错误和相位翻转错误,不存在将相位翻转错误转化成比特翻转错误再进行纠缠纯化的环节,无需引入非线性效应,也无需额外引入单光子源、Bell 态或 GHZ 态作为辅助源,而且只需要用到线性光学中常见的偏振分束器和半波片等器件,极大增加了该方案的实验可行性。

## 参考文献:

- [1] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, *et al.* Quantum entanglement [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2009, 81(2): 865-942.
- [2] Ekert A K. Quantum cryptography based on Bell's theorem [J]. *Physical Review Letters*, 1991, 67(6): 661-663.
- [3] Shao Z L, Long Y X. Bidirectional and asymmetric quantum controlled teleportation by using a genuine seven-qubit entangled state [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2020, 37(1): 34-42.  
邵忠良, 龙银香. 基于真七粒子纠缠态实现受控双向非对称量子隐形传态 [J]. 量子电子学报, 2020, 37(1): 34-42.
- [4] Bennett C H, Wiesner S J. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states [J]. *Physical Review Letters*, 1992, 69(20): 2881-2884.
- [5] Zhu M Z, Zhao C R, Gong P F, *et al.* Optimizing real state cloning based on rotation of coordinate system [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2020, 37(3): 337-341.  
朱孟正, 赵春然, 公丕锋, 等. 基于坐标系旋转实现对实数态克隆的优化 [J]. 量子电子学报, 2020, 37(3): 337-341.

- [6] Cao C, Wang T J, Wang C. Recent development on quantum entanglement purification and concentration [J]. *Progress in Physics*, 2017, 37(1): 13-21.  
曹聪, 王铁军, 王川. 量子纠缠纯化与浓缩研究进展 [J]. *物理学进展*, 2017, 37(1): 13-21.
- [7] Bennett C H, Divincenzo D P, Smolin J A, *et al.* Mixed state entanglement and quantum error correction [J]. *Physical Review A*, 1996, 54(5): 3824-3851.
- [8] Wang X, Hu Z N. Efficient entanglement concentration scheme for partially entangled photon pairs [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2019, 36(2): 182-187.  
王雄, 胡占宁. 部分纠缠光子对的有效纠缠浓缩方案 [J]. *量子电子学报*, 2019, 36(2): 182-187.
- [9] Long G L, Deng F G, Zeng J Y. *Recent Progress in Quantum Mechanics (Fifth volume)* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2011: 254-325.  
龙桂鲁, 邓富国, 曾谨言. 量子力学新进展 (第5辑) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2011: 254-325.
- [10] Simon C, Pan J W. Polarization entanglement purification using spatial entanglement [J]. *Physical Review Letters*, 2002, 89(25): 257901.
- [11] Li X H. Deterministic polarization-entanglement purification using spatial entanglement [J]. *Physical Review A*, 2010, 82(4): 044304.
- [12] Sheng Y B, Deng F G. One-step deterministic polarization-entanglement purification using spatial entanglement [J]. *Physical Review A*, 2010, 82(4): 044305.
- [13] Sheng Y B, Deng F G, Zhou H Y. Efficient polarization-entanglement purification based on parametric down-conversion sources with cross-Kerr nonlinearity [J]. *Physical Review A*, 2008, 77(4): 042308.
- [14] Xiao L, Wang C, Zhang W, *et al.* Efficient strategy for sharing entanglement via noisy channels with doubly entangled photon pairs [J]. *Physical Review A*, 2008, 77(4): 042315.
- [15] Wang C, Xiao L, Wang W Y, *et al.* Quantum key distribution using polarization and frequency hyperentangled photons [J]. *Journal of the Optical Society of America B*, 2009, 26(11): 2072-2076.
- [16] Walborn S P, Pádua S, Monken C H. Hyperentanglement-assisted Bell-state analysis [J]. *Physical Review A*, 2003, 68(4): 042313.
- [17] Barbieri M, Vallone G, Mataloni P, *et al.* Complete and deterministic discrimination of polarization Bell states assisted by momentum entanglement [J]. *Physical Review A*, 2007, 75(4): 042317.
- [18] Schuck C, Huber G, Kurtsiefer C, *et al.* Complete deterministic linear optics Bell state analysis [J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(19): 190501.
- [19] Barreiro J T, Langford N K, Peters N A, *et al.* Generation of hyperentangled photon pairs [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(26): 260501.
- [20] Hu X M, Huang C X, Sheng Y B, *et al.* Long-distance entanglement purification for quantum communication [J]. *Physical Review Letters*, 2021, 126(1): 010503.
- [21] Li X H, Ghose S. Hyperconcentration for multipartite entanglement via linear optics [J]. *Laser Physics Letters*, 2014, 11(12): 125201.
- [22] Liu H J, Xia Y, Song J. Efficient hyperentanglement concentration for N-particle Greenberger-Horne-Zeilinger state assisted by weak cross-Kerr nonlinearity [J]. *Quantum Information Processing*, 2016, 15(5): 2033-2052.
- [23] Sheng Y B, Deng F G. Deterministic entanglement purification and complete nonlocal Bell-state analysis with hyperentanglement [J]. *Physical Review A*, 2010, 81(3): 032307.



- 
- [24] Deng F G. Efficient multipartite entanglement purification with the entanglement link from a subspace [J]. *Physical Review A*, 2011, 84(5): 052312.
- [25] Zhou L, Liu Z K, Xu Z X, *et al.* Economical multi-photon polarization entanglement purification with Bell state [J]. *Quantum Information Processing*, 2021, 20(8): 257.
- [26] Luo C C, Zhou L, Zhong W, *et al.* Multipartite entanglement purification using time-bin entanglement [J]. *Laser Physics Letters*, 2021, 18(6): 065205.
- [27] Yan P S, Zhou L, Zhong W, *et al.* Measurement-based entanglement purification for entangled coherent states [J]. *Frontiers of Physics*, 2021, 17(2): 21501.