

DOI: 10.3969/j.issn.1007-5461.2023.06.011

量子行走到经典行走的连续调控

陈斌^{1#}, 陈天豪^{2#}, 张融^{1*}

(1 南京邮电大学电子与光学工程学院, 江苏 南京 210023;
2 南京邮电大学贝尔英才学院, 江苏 南京 210023)

摘要: 为深入认识微观粒子的波粒二象性, 探索波态和粒子态之间的转变并制备多路径波态和粒子态的共存状态, 提出了通过引入量子控制实现量子行走中波态和粒子态之间的连续调控的理论方案, 并分别计算了量子行走的位置分布及方差随着辅助比特系数的变化情况。计算结果表明量子调控使得行走者不仅可以处于粒子和波的混合态, 还能处于相干叠加态。波态和粒子态之间的连续调控通过相干和混合方式的位置方差展示, 并且给出了混合态和相干态两种调控方式的差异。量子行走为深入研究微观粒子的波粒二象性提供了一个实用的平台。

关键词: 量子光学; 量子行走; 量子调控; 相干叠加

中图分类号: O431.2 文献标识码: A 文章编号: 1007-5461(2023)06-00917-07

Continuous regulation from quantum walk to classical walk

CHEN Bin^{1#}, CHEN Tianhao^{2#}, ZHANG Rong^{1*}

(1 College of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Posts and Telecommunication, Nanjing 210023, China;
2 Bell Honors School, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

Abstract: In order to deeply understand the wave particle duality of microscopic particles, explore the transitions between wave state and particle state, and prepare the coexistence states of multi-path wave state and particle state, a theoretical scheme to realize the continuous transition from wave- to particle-state in quantum walks by introducing quantum control is proposed. The variation of the position distribution and variance of quantum walks with auxiliary bit coefficients is calculated respectively. It is shown that quantum control can make the walker not only in the mixed state of wave and particle, but also in the coherent superposition state. The continuous morphing from wave state to particle state is displayed by the position variance in both the coherent way and the mixed way, and the difference between the mixed state control and the coherent state control is also demonstrated. Quantum walks provide a useful platform for in-depth study on the wave-particle duality of microscopic particles.

Key words: quantum optics; quantum walks; quantum control; coherent superposition

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金 (11705096)

作者简介: 陈斌 (1996 -), 江苏泰州人, 研究生, 主要从事量子通信和量子计算方面的研究。E-mail: chenb15321101@163.com;

陈天豪 (2000 -), 江苏南京人, 研究生, 主要从事量子信息方面的研究。E-mail: q19010310@njupt.edu.cn

导师简介: 张融 (1979 -), 女, 江苏姜堰人, 博士, 副教授, 硕士生导师, 主要从事量子通信和量子计算方面的研究。E-mail: zhangr_nj@163.com

收稿日期: 2022-01-22; 修改日期: 2022-03-14

*通信作者; #共同第一作者。

0 引言

经典随机行走在数学、物理、计算科学等领域有着广泛的应用,是随机过程、算法设计理论的基础^[1]。量子行走是经典随机行走在量子世界的对应产物,其动力学演化是幺正的^[2]。与基于经典随机行走的算法相比,基于量子行走的算法的效率与性能都有很大提升^[3-9],因此量子行走已经成为量子计算的重要分支。量子行走的实验实现也取得了很大进展,已有文献报导了其在核磁共振、囚禁离子、原子以及光子系统中的实现^[10-13]。

量子行走的位置分布以及扩散速度等性质与经典随机行走有很大不同,比如量子行走扩散速率相比较经典行走呈平方增长。显著的差别来源于微观粒子的基本属性波粒二象性,微观粒子可以处于波和粒子的量子相干叠加态。近期大量的理论和实验结果表明,微观粒子具有波粒二象性,即:微观粒子同时表现出两种完全不同的属性,人们通过量子控制操作,可以将微观粒子制备处于波的状态(有相干性)、粒子态(无相干性)以及波和粒子的中间状态^[14-16]。基于量子行走平台讨论从有量子相干性的波的状态到无相干性的粒子的状态的过渡。通过消相干或测量,实现量子行走(有相干)到经典随机行走(无相干)的调控,这类调控使两种不同性质的行走处于混合状态^[17-20]。研究发现通过引入量子调控不仅能够制备两种行走的混合态,还能得到相干叠加态,即同时实现有(无)多路径的两种状态的相干叠加。

本文主要讨论将辅助比特与硬币-行走者体系相互作用后,通过对辅助比特的不同操作,实现行走处于量子(有相干)状态、经典(无相干)状态以及中间状态,中间状态包含混合态和叠加态两种不同形式;通过微观粒子位置分布以及方差刻画不同类型的行走的性质,并定量描述混合态和叠加态的区别。本文所提出的理论方案可以在具体物理系统中实现,每次行走换一枚二维的新"硬币"操作等效为一个高维状态的硬币操作。目前在光学系统中,光的轨道角动量就是一个很好操控的高维的系统^[21,22]。并且辅助比特与光子系统的相互作用也是能够实现的,比如通过电子和光的相互作用^[23]。

1 不同类型的行走模型

标准量子行走包括硬币和行走者,硬币态用基矢 $\{|R\rangle, |L\rangle\}$ 表示,行走者将根据硬币状态 $|R\rangle, |L\rangle$ 决定向右或向左走,量子硬币可以处于两个不同基矢态的叠加状态。行走者的位置状态用分立的坐标 $\{|x\rangle\} (x \in Z)$ 描述。量子行走的一步演化过程包括抛硬币和根据硬币态行走两个步骤,用幺正演化算符 U^Q 表示为

$$U^Q = \hat{S}(\hat{H} \otimes I), \quad (1)$$

式中:上角标 Q 代表量子行走,因为此时行走者处于有相干性的波的状态; I 是作用在行走者上的单位算符, \hat{S} 是条件行走算符,表示行走者根据硬币状态 $|L\rangle (|R\rangle)$ 向左(右)行走一步,具体表示为

$$\begin{cases} \hat{S}|R\rangle|x\rangle = |R\rangle|x+1\rangle \\ \hat{S}|L\rangle|x\rangle = |L\rangle|x-1\rangle \end{cases}. \quad (2)$$

抛硬币操作作用 Hadamard 操作表示为

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

重复幺正演化操作 U^Q 构成一维链上标准量子行走。

如果行走者每次抛掷新的硬币, 量子干涉将会被完全擦除^[24, 25], 初态对行走性质没有影响, 行走者处于没有相干性的粒子态。 t 步行走后共使用 t 枚硬币, 所有硬币都与行走者关联, 每一步都对硬币进行测量可以准确地得到行走者所处的位置。 幺正演化过程是 $U^P = U_t^P \cdots U_3^P \cdot U_2^P \cdot U_1^P$, 每一步的幺正演化算符是

$$U_t^P = \hat{S}_t (\hat{H}_t \otimes I), \tag{4}$$

式中: 上角标 P 代表粒子态, 下角标 t 表示第 t 步行走, \hat{S}_t 是条件行走操作, \hat{H}_t 是第 t 个新的硬币操作, 根据第 t 步的硬币行走

$$\hat{S}_t |R\rangle_i |x\rangle = |R\rangle_i |x+1\rangle, \hat{S}_t |L\rangle_i |x\rangle = |L\rangle_i |x-1\rangle, \tag{5}$$

经过不同的硬币初态演化后, 对行走者位置进行测量而得到经典高斯分布。 图 1 为 50 步以后无多位置相干的量子行走的位置分布, 其呈现粒子出现在原点的几率最大、 而远离原点处的几率呈指数衰减的分布规律。 图中横坐标 x 表示行走者的位置, 纵坐标 $p(x)$ 表示行走者在位置 x 处的几率。

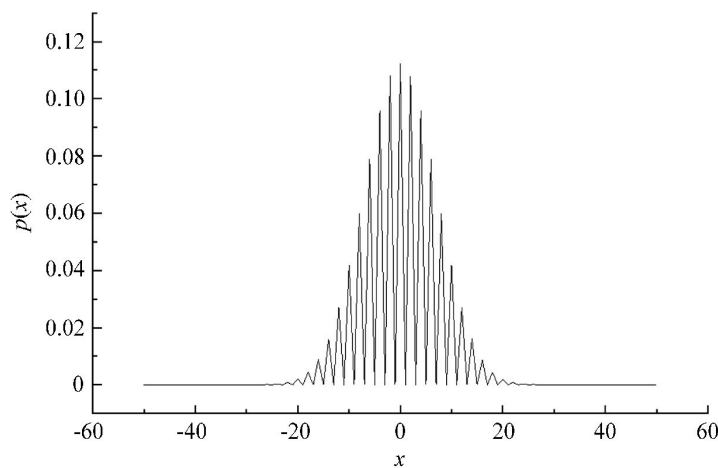


图 1 50 步以后无多位置相干的量子行走的位置分布

Fig. 1 Position distribution of quantum walks without multi-position coherence after 50 steps

另一方面, 如果每次使用同一枚硬币, 其他硬币状态保持不变, 此时的动力学过程为

$$U_t^Q = \hat{S}_1 (\hat{H}_1 \otimes I), \tag{6}$$

这种情况下硬币初始状态对位置分布产生影响, 图 2 (a)、(b) 分别展示了 $|R\rangle$ 、 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + i|L\rangle)$ 两种不同硬币初态的行走者位置分布, 由图可见行走者处于原点的几率很低而远离原点处的几率增大, 呈现非高斯分布。 选择硬币初态 $|R\rangle$ 导致的分布是非对称的 [如图 2 (a) 所示], 其与选择硬币初态 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + i|L\rangle)$ 导致的对称分布不同 [如图 2 (b) 所示]。

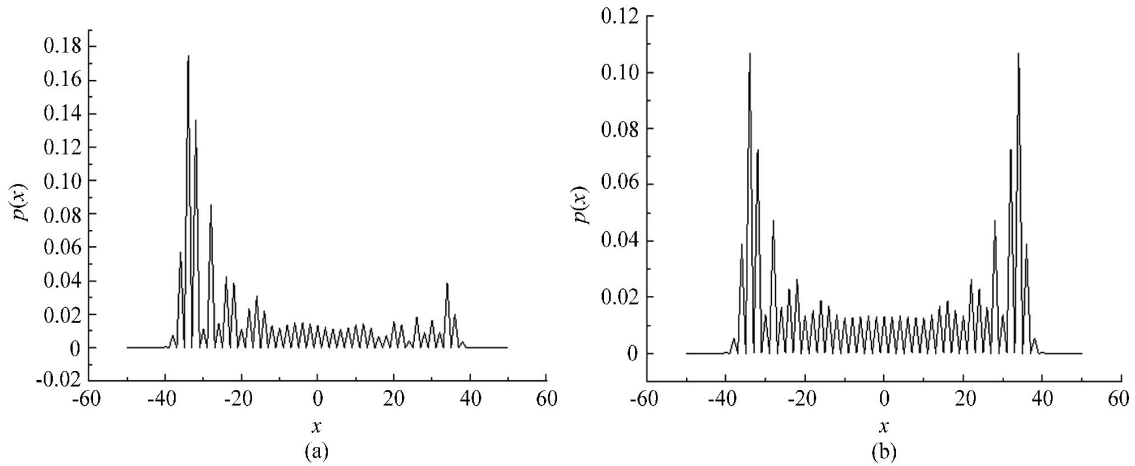


图2 多位置相干量子行走的位置分布。硬币初态为 (a) $|R\rangle$, (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + i|L\rangle)$

Fig. 2 Position distribution of quantum walks with multi-position coherence for the initial state of the coin

$$(a) |R\rangle, (b) \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + i|L\rangle)$$

2 量子控制下的行走演化

通过将辅助比特与硬币-行走者关联引入量子控制, 整个系统的演化表示为

$$\hat{U}_i = |0\rangle\langle 0| \otimes U_i^Q + |1\rangle\langle 1| \otimes U_i^P. \quad (7)$$

当辅助比特处于 $|0\rangle$ 态, 行走者遵循量子行走演化 (有路径相干); 当辅助比特处于 $|1\rangle$ 态, 行走者遵循经典随机行走 (无相干)。辅助比特还可以处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 的任意叠加态, 此时, 行走者同时存在量子 and 经典两种不同的演化。

假设行走者初始处于原点 $|x=0\rangle$, 硬币处于 $\alpha|R\rangle + \beta|L\rangle$, 满足 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, 辅助比特处于任意叠加态 $\cos\theta|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\theta|1\rangle$, 此时, 整个系统初始态为

$$\Psi(0) = (\cos\theta|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\theta|1\rangle) \otimes (\alpha|R\rangle + \beta|L\rangle)^{\otimes r} \otimes |0\rangle. \quad (8)$$

根据 (7) 式, t 步演化后整个系统的状态是

$$\Psi(t) = \cos\theta|0\rangle|\Psi\rangle^Q + e^{i\varphi}\sin\theta|1\rangle|\Psi\rangle^P, \quad (9)$$

式中: $|\Psi\rangle^Q$ 是有多路径相干的状态, $|\Psi\rangle^P$ 是无路径相干的状态。 $|\Psi\rangle^P$ 由所有在位置 x 处的几率幅直接相加得到, 即

$$|\Psi\rangle^P = \frac{1}{2^{h/2}} \sum_x \left[(\alpha + \beta)^{N_L} (\alpha - \beta)^{N_R} \sum_{n=1}^h |\Psi_n\rangle |x\rangle \right], \quad (10)$$

式中: $N_L = \frac{t-x}{2}$, $N_R = \frac{t+x}{2}$ 分别表示向左、右行走的次数, $h = \frac{t!}{N_R!(t-N_R)!}$ 是所有导致行走者处于 x 处的路

径个数, $|x\rangle$ 是行走者的位置状态, $|\Psi_n\rangle$ 是相应位置 x 处所有可能的硬币状态。比如 $t=3$ 时, 对于 $x=3$, $|\Psi_1\rangle =$

$|RRR\rangle_{C_1, C_2, C_3}$ 的 $|\Psi\rangle^Q$ 的具体形式为

$$|\Psi\rangle^Q = \sum_x (g_R(x, t)|R\rangle + g_L(x, t)|L\rangle)_{C_1} \otimes (\alpha|R\rangle + \beta|L\rangle)^{\otimes C_2 \dots \otimes C_t} \otimes |x\rangle, \quad (11)$$

式中: C_1 、 C_2 、 C_t 代表第 1、2、 t 枚硬币, 即第 1 枚硬币的状态为 $(g_R(x, t)|R\rangle + g_L(x, t)|L\rangle)$, 另外 $t-1$ 枚硬币的状态为 $(\alpha|R\rangle + \beta|L\rangle)$, 且 $g_R(x, t) = \alpha p_L(x, t) + \beta q_L(x, t)$, $g_L(x, t) = \alpha p_R(x, t) + \beta q_R(x, t)$, 其中 $p_L(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^t}} \left[\sum_{m=1}^N (-1)^{N_L-m} \binom{N_R}{m-1} \right]$, $p_R(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^t}} \left[\sum_{m=1}^N (-1)^{N_L-m} \binom{N_R}{m} \right]$, $q_L(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^t}} \left[\sum_{m=1}^N (-1)^{N_L-m} \binom{N_R}{m-1} \frac{N_R-2m+2}{N_R} \right]$, $q_R(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2^t}} \left[\sum_{m=1}^N (-1)^{N_L-m} \binom{N_R}{m} \frac{N_R-2m}{N_R} \right]$.

如果将辅助比特投影到叠加态 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 上, 可以得到 $|\Psi\rangle^P$ 和 $|\Psi\rangle^Q$ 的相干叠加态

$$|\Phi\rangle = \cos \theta |\Psi\rangle^Q + e^{i\phi} \sin \theta |\Psi\rangle^P; \quad (12)$$

另一方面, 如果对辅助比特进行求迹操作, 得到 $|\Psi\rangle^P$ 和 $|\Psi\rangle^Q$ 的混合态

$$\rho = \cos^2 \theta |\Psi\rangle^Q \langle \Psi|^Q + \sin^2 \theta |\Psi\rangle^P \langle \Psi|^P. \quad (13)$$

由 (12)、(13) 式, 改变系数 θ 和 ϕ , 能够以两种不同的方式实现量子行走到经典随机行走的连续调控, 可以通过位置分布和方差来描述两种不同方式的调控。

对 $|\Psi\rangle^Q$ 的不同位置求几率幅的平方而得到位置几率分布。在 $x=t$ 处的几率为

$$P_C(t, t) = \frac{1}{N} \left(\left| a g_R(t, t) \alpha^{t-1} + b \left(\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{2}} \right)^t \right|^2 + |a|^2 |g_R(t, t)|^2 |\alpha|^{2(t-1)} (2^{t-1} - 1) \right), \quad (14)$$

在 $x=-t$ 处的几率为

$$P_C(-t, t) = \frac{1}{N} \left(\left| a g_L(-t, t) \beta^{t-1} + b \left(\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{2}} \right)^t \right|^2 + |a|^2 |g_L(-t, t)|^2 |\alpha|^{2(t-1)} (2^{t-1} - 1) \right), \quad (15)$$

在 $x=-t+2, \dots, t-2$ 处的几率为

$$P_C(x, t) = \frac{1}{N} \left(\left[\begin{matrix} t-1 \\ N_R+1 \end{matrix} \right] \left| a g_R(x, t) \alpha^{N_R-1} \beta^{N_L} + \frac{1}{\sqrt{2}^t} b (\alpha + \beta)^{N_R} (\alpha - \beta)^{N_L} \right|^2 + \left[\begin{matrix} t-1 \\ N_L-1 \end{matrix} \right] \left| a g_L(x, t) \alpha^{N_R} \beta^{N_L-1} + \frac{1}{\sqrt{2}^t} b (\alpha + \beta)^{N_R} (\alpha - \beta)^{N_L} \right|^2 + |a|^2 |g_R(x, t)|^2 (1/2)^{t-1} \left(2^{t-1} - \left[\begin{matrix} t-1 \\ N_R-1 \end{matrix} \right] \right) + |a|^2 |g_L(x, t)|^2 (1/2)^{t-1} \left(2^{t-1} - \left[\begin{matrix} t-1 \\ N_R-1 \end{matrix} \right] \right) \right). \quad (16)$$

对于混合态 $|\Psi\rangle^P$, 将几率直接相加得到几率分布

$$P_{\text{mix}}(x, t) = |a|^2 (|g_L(x, t)|^2 + |g_R(x, t)|^2) + |b|^2 \frac{S}{2^t} |(\alpha + \beta)^{N_R} (\alpha - \beta)^{N_L}|^2, \quad (17)$$

由位置分布进一步计算位置方差 $v = \sum_x P(x, t) |x - x_m|^2$, 其中 $x_m = \sum_x P(x, t) X$ 。

首先讨论将辅助比特投影到 $|0\rangle$ 态上, 行走者遵循量子行走演化, 始终用同一枚硬币, 因此硬币初始状

态对分布有影响。另一方面,如果辅助比特投影到 $|1\rangle$ 态上,行走者的多路径相干性被每一步的新硬币完全擦除,遵循的是经典随机行走的演化,硬币初始状态对分布没有影响,行走者的位置几率呈高斯分布。

如果将辅助比特投影到叠加态 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ 上,行走者处于量子 and 经典的相干叠加态,如(12)式所示。此时,改变硬币初态可以得到从量子到经典性质的连续调控,通过计算位置方差 v 体现行走者位置变化的活跃程度, v 越大也即扩散速度越快。考虑 $t=20$ 步,比较量子相干叠加和混合态调控方式,分别用实线和点线表示,发现这两种方式是不同的,并且选择合适的 θ ,相干态的位置方差比混合态大,也即扩散速度更大,如图3所示。

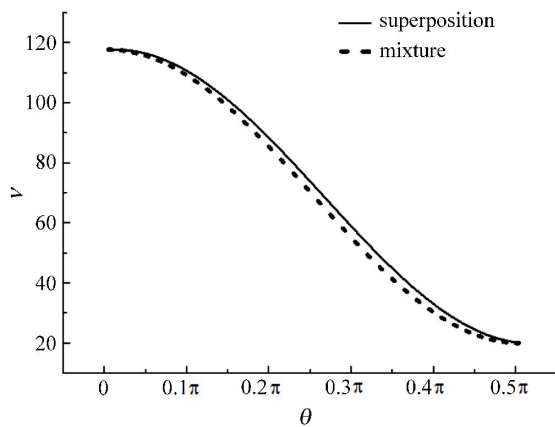


图3 量子行走中相干混合波态和粒子态的位置方差 v

Fig. 3 Position variance v of coherent and mixed wave-state and particle-state in quantum-walks

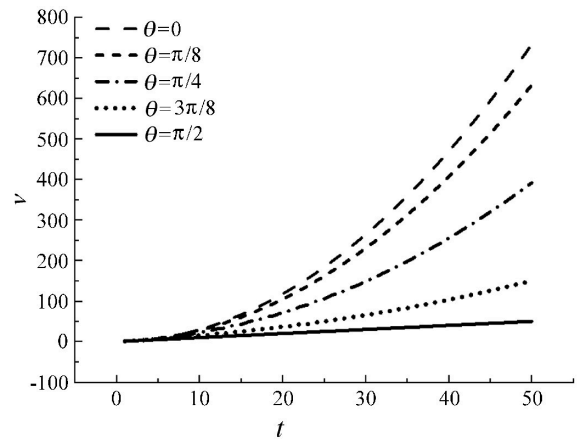


图4 位置方差 v 随步数 t 的变化情况

Fig. 4 Position variance v as a function of the step t

进一步讨论相干调控过程中初态参数 θ 对量子行走者位置方差 v 的影响。如图4所示,当 $\theta=0$,量子行走者位置方差 v 随步数 t 二次方增大,称为弹道扩散(Ballistic diffusion);而 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时,位置方差 v 随步数 t 一次方增大,称为一般扩散(Diffusive diffusion);当 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时,其扩散速度介于一次方和二次方之间,称为亚弹道扩散(Sub-ballistic diffusion)。

3 结 论

通过行走者的位置方差 v 展示了从波到粒子状态的连续调控,并具体给出相干和混合两种调控方式的差异,提出通过引入量子控制实现量子行走中波态和粒子态之间连续调控的理论方案。结果表明,量子调控可以使行走者处于粒子和波的混合态以及相干叠加态。通过改变硬币初态可以得到从量子到经典性质的连续调控,并且可以通过调整初态参数 θ 得到弹道扩散、亚弹道扩散以及一般扩散。该理论方案不仅能够实现有(无)量子相干性这两种状态的连续调控,还可以制备多路径的有相干(波)和没有相干(粒子)同时共存的状态。

参考文献:

- [1] Motwani R, Raghavan P. *Randomized Algorithms* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

- [2] Aharonov Y, Davidovich L, Zagury N. Quantum random walks [J]. *Physical Review A*, 1993, 48(2): 1687-1690.
- [3] Guillotin-Plantard N, Schott R. *Dynamic Random Walks: Theory and Applications* [M]. Amsterdam, Holland: Elsevier, 2006.
- [4] Childs A M. Universal computation by quantum walk [J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(18): 180501.
- [5] Venegas-Andraca S E. Quantum walks: A comprehensive review [J]. *Quantum Information Processing*, 2012, 11(5): 1015-1106.
- [6] Ambainis A. Quantum walks and their algorithmic applications [J]. *International Journal of Quantum Information*, 2003, 1(4): 507-518.
- [7] Childs A M, Cleve R, Deotto E, et al. Exponential algorithmic speedup by a quantum walk [C]. *Proceedings of the Thirty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, San Diego, CA, USA, 2003: 59-68.
- [8] Shenvi N, Kempe J, Whaley K B. Quantum random-walk search algorithm [J]. *Physical Review A*, 2003, 67(5): 052307.
- [9] Chakraborty S, Novo L, Ambainis A, et al. Spatial search by quantum walk is optimal for almost all graphs [J]. *Physical Review Letters*, 2016, 116(10): 100501.
- [10] Lu D W. *Implementing Quantum Simulation Tasks Using Nuclear Magnetic Resonance* [D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2012.
鲁大为. 利用核磁共振量子计算实验实现量子模拟 [D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2012.
- [11] Karski M, Förster L, Choi J M, et al. Quantum walk in position space with single optically trapped atoms [J]. *Science*, 2009, 325(5937): 174-177.
- [12] Schmitz H, Matjeschk R, Schneider C, et al. Quantum walk of a trapped ion in phase space [J]. *Physical Review Letters*, 2009, 103(9): 090504.
- [13] Sansoni L, Sciarrino F, Vallone G, et al. Two-particle bosonic-Fermionic quantum walk via integrated photonics [J]. *Physical Review Letters*, 2012, 108: 010502.
- [14] Ionicioiu R, Terno D R. Proposal for a quantum delayed-choice experiment [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 107(23): 230406.
- [15] Peruzzo A, Shadbolt P, Brunner N, et al. A quantum delayed-choice experiment [J]. *Science*, 2012, 338(6107): 634-637.
- [16] Tang J S, Li Y L, Xu X Y, et al. Realization of quantum Wheeler's delayed-choice experiment [J]. *Nature Photonics*, 2012, 6(9): 600-604.
- [17] Xue P, Sanders B C. Controlling and reversing the transition from classical diffusive to quantum ballistic transport in a quantum walk by driving the coin [J]. *Physical Review A*, 2013, 87(2): 022334.
- [18] Brun T A, Carteret H A, Ambainis A. Quantum to classical transition for random walks [J]. *Physical Review Letters*, 2003, 91(13): 130602.
- [19] Kendon V, Sanders B C. Complementarity and quantum walks [J]. *Physical Review A*, 2005, 71(2): 022307.
- [20] Schreiber A, Cassemiro K N, Potoček V, et al. Decoherence and disorder in quantum walks: From ballistic spread to localization [J]. *Physical Review Letters*, 2011, 106(18): 180403.
- [21] Goyal S K, Roux F S, Forbes A, et al. Implementing quantum walks using orbital angular momentum of classical light [J]. *Physical Review Letters*, 2013, 110(26): 263602.
- [22] Ru S H, Wang X, Wang Y L, et al. Quantum manipulation and application of photon orbital angular momentum [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2022, 39(1): 96-109.
茹世浩, 王 啸, 王云龙, 等. 光子轨道角动量的量子操控与应用 [J]. 量子电子学报, 2022, 39(1): 96-109.
- [23] Di Giulio V, Kociak M, de Abajo F J G. Probing quantum optical excitations with fast electrons [J]. *Optica*, 2019, 6(12): 1524-1534.
- [24] Brun T A, Carteret H A, Ambainis A. Quantum walks driven by many coins [J]. *Physical Review A*, 2003, 67(5): 052317.
- [25] Brun T A, Carteret H A, Ambainis A. Quantum to classical transition for random walks [J]. *Physical Review Letters*, 2003, 91