

DOI: 10.3969/j.issn.1007-5461.2023.06.005

# 基于FPGA的微波相干源线性检测和特性表征

王硕<sup>1</sup>, 潘佳政<sup>2</sup>, 魏兴雨<sup>1</sup>, 江俊良<sup>1</sup>, 张凯旋<sup>1</sup>, 李子硕<sup>1</sup>, 郭婷婷<sup>1</sup>,  
许问渠<sup>1</sup>, 左权<sup>1</sup>, 周天石<sup>1</sup>, 盛怡凡<sup>1</sup>, 孙国柱<sup>1,2\*</sup>, 吴培亨<sup>1,2</sup>

(1 南京大学电子科学与工程学院超导电子学研究所, 江苏 南京 210023;

2 紫金山实验室, 江苏 南京 211111)

**摘要:** 微波光子的检测和表征对于量子信息具有重要意义。通常使用Hanbury Brown-Twiss (HBT) 干涉仪对光子源性质进行检测和表征, 然而, 由于微波光子信噪比较低, 在对其进行检测和表征过程中常常需要多次计算才能移除噪声影响。本工作基于现场可编程门阵列 (FPGA), 提出一种快速、可扩展的测量方案用于分析微波光子源性质, 可更快速地实现该计算过程。利用该方案对频率为3 MHz的相干源进行了模拟测量, 分析了二阶相关函数所具有的特性, 发现测量结果与理论具有良好的一致性。该系统的实现对未来进行单光子源检测具有重要意义。

**关键词:** 量子信息处理; 微波光子源; 相干源; 相关函数; 现场可编程门阵列

中图分类号: O455

文献标识码: A

文章编号: 1007-5461(2023)06-00850-08

## FPGA-based linear detection and characterization of microwave coherent source

WANG Shuo<sup>1</sup>, PAN Jiazheng<sup>2</sup>, WEI Xingyu<sup>1</sup>, JIANG Junliang<sup>1</sup>, ZHANG Kaixuan<sup>1</sup>,  
LI Zishuo<sup>1</sup>, GUO Tingting<sup>1</sup>, XU Wenqu<sup>1</sup>, ZUO Quan<sup>1</sup>, ZHOU Tianshi<sup>1</sup>,  
SHENG Yifan<sup>1</sup>, SUN Guozhu<sup>1,2\*</sup>, WU Peiheng<sup>1,2</sup>

(1 Research Institute of Superconductor Electronics, School of Electronic Science and Engineering, Nanjing University,  
Nanjing 210023, China;

2 Purple Mountain Laboratories, Nanjing 211111, China)

**Abstract:** Detection and characterization of microwave photon sources is a key step in quantum information. For the optical photons, Hanbury Brown-Twiss interferometer can be used to measure the correlation of them. However, for microwave photons, as the signal-to-noise ratio of them is much lower than that of optical photons, multiple-calculation process is necessary for the elimination of noise influence. Here a new, fast and scalable measurement scheme is demonstrated to characterize a microwave photon source, in which real-time processing and full parallelism are realized by using field

**基金项目:** 国家重点研发计划 (2016YFA0301801), 南京大学登峰计划, 江苏高校优势学科建设工程项目

**作者简介:** 王硕 (1997-), 安徽淮南人, 研究生, 主要从事微波光子线性检测和特性表征方面的研究。E-mail: mg1923007@smail.nju.edu.cn

**导师简介:** 孙国柱 (1977-), 浙江诸暨人, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事超导电子学、超导量子信息处理方面的研究。

E-mail: gzsun@nju.edu.cn

**收稿日期:** 2021-12-24; **修改日期:** 2022-02-28

\*通信作者。

programmable gate array (FPGA). And the second-order correlation function of a coherent source with 3 MHz is investigated using the proposed scheme. The good agreement between the output of FPGA and that of the theoretical calculation indicates that, the scheme is promising for application in quantum information processing such as the characterization of microwave single-photon sources.

**Key words:** quantum information processing; microwave photon source; coherent source; correlation function; field programmable gate array

## 0 引言

量子光学是物理学领域一个重要分支,它主要研究电磁辐射的量子力学现象<sup>[1]</sup>。在一个多世纪的量子光学研究中,电磁辐射和物质相互作用的量子性质得到了充分探索,在单个光子的产生、探测、应用等方面有了重要突破。同时,光子的频率范围也逐渐拓展到微波波段。在微波频域,基于超导电路的量子系统因其可以和微波电磁场产生强相互作用<sup>[2]</sup>,并且可以高效率地产生微波光子<sup>[3]</sup>,同时借助外部测量装置,可以实现对微波光子源的检测和表征<sup>[4]</sup>,因此基于超导量子电路的微波光子研究逐渐成为热点。

微波光子检测是微波量子光学很重要的一个方向,但是微波光子能量比光学频域光子低四到五个数量级,直接检测难度非常大,需要在其检测过程中加入放大器<sup>[5]</sup>。由于放大器工作在约4 K的环境下,而微波光子信号幅度非常小,信号经过放大器放大的同时,也引入了热噪声,该噪声对应的等效噪声温度大约为几个开尔文<sup>[6,7]</sup>,从而导致整体信噪比偏低,所以对微波光子的高效检测和表征是一项具有挑战性的工作。有效的微波光子检测一直是研究的难点,但其对于理论和应用研究又具有重要的意义。近年来,此方面已取得部分进展,例如,2011年,Bozyigit等<sup>[5]</sup>发现了微波单光子的反聚束效应;2013年,Lang等<sup>[8]</sup>发现了微波光子的HOM干涉。上述工作通过有效数据处理技术可提取微波光子统计信息,同时也为微波光子在量子通信和信息处理等领域的潜在应用奠定了基础。

本文提出了一种通过类似Hanbury Brown-Twiss (HBT)的干涉实验<sup>[9]</sup>对来自信号源的光子相关性进行测量的方案。在实验中,通过一个分束器将输入信号分为两束,改变分束信号之间的时间差,并使用现场可编程门阵列(FPGA)对信号进行多次测量平均,从噪声背景中有效提取信号,再计算两束信号的二阶相关函数,从而实现了信号源光子特性表征<sup>[4]</sup>。

## 1 理论分析

### 1.1 微波信号的相关函数

线性检测作为微波正交场测量的一种标准方案,近年来已被广泛应用于各种量子电路<sup>[4,10]</sup>。本研究使用HBT干涉仪器<sup>[11]</sup>,将信号源发射出来的微波信号通过分束器分成两束,使用线性检测器分别从中提取其关联特性,示意图如图1所示。

由于微波光子的能量较低,故需要加入放大器对信号进行观测,但同时也引入了较大噪声<sup>[6,7]</sup>,使得整体信噪比变低,所以对信号的计算需要降低噪声干扰。由于微波光子频率在GHz,因此还需要将放大的GHz信号进行频率下转换(FDC)至MHz,从而更利于采集<sup>[10]</sup>。通常将模式 $\hat{a}$ 的二阶相关函数表示为

$$G^{(2)}(\tau) = \int_0^T G^{(2)}(t, t+\tau) dt = \int_0^T \langle \hat{a}^\dagger(t) \hat{a}^\dagger(t+\tau) \hat{a}(t+\tau) \hat{a}(t) \rangle dt . \quad (1)$$

对  $G^{(2)}$  的表征, 可以通过测量分束器两个线性检测端口对应信号的相关性来实现<sup>[4]</sup>。

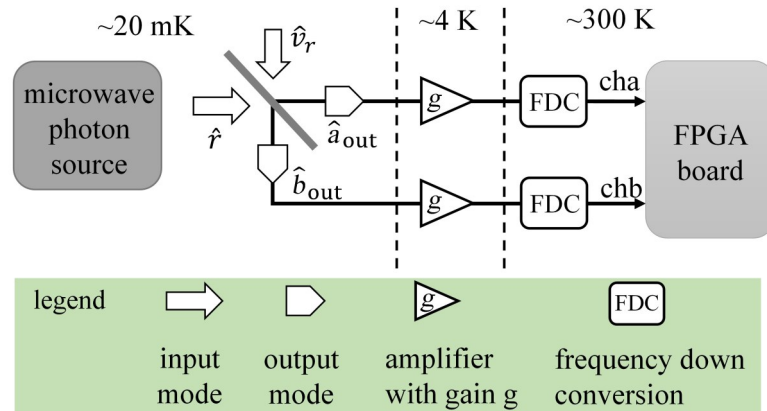


图1 微波光子线性检测链示意图

Fig. 1 Sketch of a microwave photon linear detection chain

## 1.2 二阶相关函数的正交场表示

为了使用正交场进行计算, 将微波信号表示为  $S(t)e^{i\omega_d t}$ , 其中微波信号频率为  $\omega_d$ , 微波场振幅定义为复振幅<sup>[10]</sup>, 表示为  $S(t) = I(t) + iQ(t)$ 。这里  $S(t)$ 、 $I(t)$  和  $Q(t)$  都以算符的形式描述为

$$\hat{S}(t) = \hat{I}(t) + i\hat{Q}(t) = \hat{r} , \quad (2)$$

$$\hat{I} = \frac{1}{2}(\hat{r} + \hat{r}^\dagger) , \quad (3)$$

$$\hat{Q} = \frac{-i}{2}(\hat{r} - \hat{r}^\dagger) , \quad (4)$$

式中:  $\hat{r}$  表示输入微波场光子的湮灭算符,  $\hat{r}^\dagger$  表示光子产生算符, 而且满足对易关系  $[\hat{r}, \hat{r}^\dagger] = 1$ 。由于海森堡不确定原理, 此时  $\hat{I}$  和  $\hat{Q}$  满足对易关系  $[\hat{I}, \hat{Q}] = \frac{i}{2}$ , 所以无法同时对其直接进行精确测量<sup>[10]</sup>。由于测量线路中加入了分束器和放大器, 在计算中还需要考虑其引入的噪声。下面讨论加入分束器之后输出场的变化。

分束器的加入会引入真空场模式  $\hat{v}_r$ , 由于真空场模式  $\hat{v}_r$  的存在, 分束器两个输出端口分别表示为

$$\hat{a}_{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r} + \hat{v}_r) , \quad (5)$$

$$\hat{b}_{\text{out}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r} - \hat{v}_r) . \quad (6)$$

这里将 HBT 干涉装置两端信号分别标为  $a, b$ 。通过分束器的两个输出端信号, 可以计算对应两个正交分量  $\hat{I}$  和  $\hat{Q}$ <sup>[10]</sup>, 分别表示为

$$\hat{I} = \frac{1}{2}(\hat{a}_{\text{out}} + \hat{a}_{\text{out}}^\dagger) , \quad (7)$$

$$\hat{Q} = \frac{-i}{2}(\hat{b}_{\text{out}} - \hat{b}_{\text{out}}^\dagger) . \quad (8)$$

此时由于增加了真空场模式  $\hat{v}_r$ , 两个正交分量满足  $[\hat{I}, \hat{Q}] = 0$ , 所以可以对两个正交分量  $\hat{I}$  和  $\hat{Q}$  同时进行精确测量<sup>[10]</sup>。因为  $\hat{S} = \hat{I} + i\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{r} + \hat{v}_r^\dagger)$  由  $\hat{I}$  和  $\hat{Q}$  构成, 且满足  $[\hat{r}, \hat{v}_r^\dagger] = 0$ , 所以  $\hat{S}$  同样满足对易关系  $[\hat{S}, \hat{S}^\dagger] = 0$ <sup>[4]</sup>。

这意味着  $\hat{S}$  是正规且可对角化的,  $\hat{S}$  的特征值同样也是由  $\hat{I}$  和  $\hat{Q}$  在固定特征向量下的特征值构成。可以看出, 分束器将量子信号转化为经典信号进行计算, 且可以同时对其正交分量进行测量<sup>[10]</sup>。而对于  $S(t)$  的测量可以通过计算  $I(t)$  和  $Q(t)$  得到。由于  $\hat{S}(t)$  是对易的, 所以  $\hat{S}(t)$  的任意相关测量与  $S(t)$  的相关测量一样, 都与算符顺序无关<sup>[4]</sup>。所以

$$\langle (S^*)^m S^n \rangle = \langle (\hat{S}^\dagger)^m (\hat{S})^n \rangle = \langle (\hat{r}^\dagger + \hat{v}_r^\dagger)^m (\hat{r} + \hat{v}_r^\dagger)^n \rangle, \quad (9)$$

简化为仅包含  $\hat{r}$  的相关函数, 需要改变  $\hat{v}_r$  的顺序。由于所有真空模式期望值为 0, (9) 式可简化为

$$\langle (S^*)^m S^n \rangle = \langle (\hat{r})^n (\hat{r}^\dagger)^m \rangle, \quad (10)$$

其复数信号之间的二阶互相关表示为

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(t, t+\tau) &= \langle \hat{S}_a^\dagger(t) \hat{S}_a^\dagger(t+\tau) \hat{S}_b(t+\tau) \hat{S}_b(t) \rangle = \frac{1}{4} \langle \hat{r}^\dagger(t) \hat{r}^\dagger(t+\tau) \hat{r}(t+\tau) \hat{r}(t) \rangle = \\ &= \langle S_a^*(t) S_a^*(t+\tau) S_b(t+\tau) S_b(t) \rangle. \end{aligned} \quad (11)$$

由 (11) 式可得  $G^{(2)}(t, t+\tau) = 4\Gamma^{(2)}(t, t+\tau)$ , 即  $G^{(2)}$  和  $\Gamma^{(2)}$  之间存在正比关系。

由于增加了放大器, 假设其增益为  $g$ , 则经过线性放大后输出算符可表示为

$$\hat{r}_{\text{amp}} = \sqrt{g} \hat{r} + \sqrt{g-1} \hat{h}^\dagger, \quad (12)$$

其中  $\hat{h}$  为放大器带来的噪声模式<sup>[6,7]</sup>。这里假设噪声与输出场不相关, 所以满足  $[\hat{r}, \hat{h}] = [\hat{r}, \hat{h}^\dagger] = 0$  且  $\langle \hat{r}\hat{h} \rangle = \langle \hat{r}\hat{h}^\dagger \rangle = 0$ 。由此, 可以得到添加放大噪声之后输出场的二阶互相关表示为

$$\Gamma_{\text{amp}}^{(2)}(t, t+\tau) = \frac{g_a g_b}{4} G^{(2)}(t, t+\tau) + \langle \hat{h}_b^\dagger(t+\tau) \hat{h}_b^\dagger(t) \hat{h}_a(t) \hat{h}_a(t+\tau) \rangle + \frac{\sqrt{g_a g_b}}{2} N_{ab} G_c, \quad (13)$$

式中

$$G_c = \delta(\tau) [G^{(0)}(t, t+\tau) + G^{(0)}(t+\tau, t)] + \delta(0) [G^{(0)}(t+\tau, t+\tau) + G^{(0)}(t, t)], \quad (14)$$

式中:  $g_a$ 、 $g_b$  分别表示对应的两路信号放大增益,  $\delta(\tau) = [\hat{r}(t), \hat{r}^\dagger(t+\tau)]$ , (13) 式中  $G_c$  相当于一个常数系数, 其中  $N_{ab}$  作为噪声的互相关系数可以忽略为 0,  $G^{(0)}$  为一阶相关函数。(13) 式可以近似为

$$G^{(2)}(t, t+\tau) \propto \Gamma_{\text{amp}}^{(2)}(t, t+\tau) - H^{(2)}(t, t+\tau), \quad (15)$$

式中  $H^{(2)}(t, t+\tau)$  表示带有噪声的真空态相关函数测量<sup>[3,4]</sup>。因此可以通过对正交场的互相关函数测量得到  $G^{(2)}(t, t+\tau)$ 。

### 1.3 FPGA 的框架构建和数字下变频

使用 AlazarTech 公司的 ATS9626 系列数据采集卡, 该采集卡内嵌一块 FPGA 为 Stratix III 系列的 EP3SE260H780C4N, 使用其中两个输入通道, 将输入信号通过模数转换采样为数字信号, 然后将数字信号进

行数字下变频<sup>[12]</sup>,再用于计算两路信号的 $\Gamma^{(2)}$ 。其中信号处理流程如图2所示。

微波信号表示为 $S(t)e^{i\omega_d t}$ ,经放大后,使用FPGA将信号电压经过模数转换(ADC)采样,表示为

$$V[t] = \text{Re}\left(\sqrt{g} S(t)e^{i\omega_d t}\right) = \frac{\sqrt{g}}{2}(S(t)e^{i\omega_d t} + S^*(t)e^{-i\omega_d t}), \quad (16)$$

式中 $V[t]$ 表示为离散化的数字信号<sup>[10]</sup>。需要注意的是,微波频率 $\omega_d$ 不能超过采样频率奈奎斯特频率,避免出现混叠<sup>[13]</sup>。在FPGA中,可以对两束信号并行采集,同时提高实时性处理过程,在采集过程中,还需要将采集到的数字信号添加符号(AS)转化为有符号数。下一步需要将该信号和数字控制振荡器(NCO)产生的同样频率的余弦和正弦信号混频,可以得到

$$S[t] = V[t]e^{-i\omega_d t} = \frac{\sqrt{g}}{2}S(t) + \frac{\sqrt{g}}{2}S^*(t)e^{-i2\omega_d t}. \quad (17)$$

混频之后信号需要进行数据调制(DM),将混频之后的数据位进行截取,限定位宽的同时保留足够的精度。然后再输入低通滤波器(FIR)<sup>[12]</sup>,经过低通滤波器后保留下来的便是具有幅度和相位信息的信号。其中与 $\cos(\omega_d t)$ 混频滤波后表示为 $I[t]$ ,与 $\sin(\omega_d t)$ 混频滤波后表示为 $Q[t]$ ,所以可得 $S_a[t] = I_a[t] + iQ_a[t]$ , $S_b[t] = I_b[t] + iQ_b[t]$ ,然后再计算

$$\Gamma^{(2)}(\tau) = \int \langle S_a^*(t)S_a^*(t+\tau)S_b(t+\tau)S_b(t) \rangle dt. \quad (18)$$

通过将实部和虚部分开计算、取模、积分累加,把每次延迟 $\tau$ 对应结果保存,最终输出到PC端进行观察。

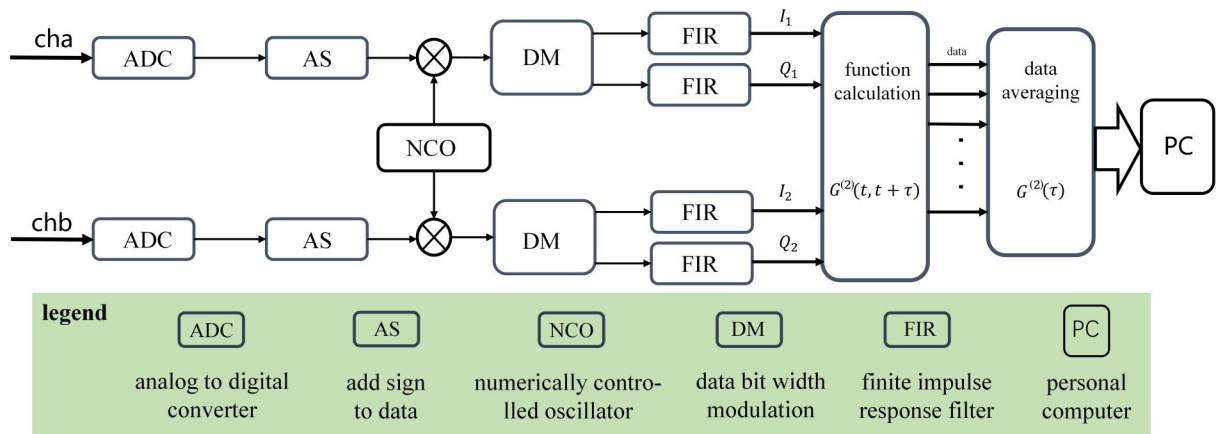


图2 FPGA信号探测链示意图

Fig. 2 Sketch of the signal processing chain in the FPGA

## 2 测量结果和讨论

通过上述分析可知,使用分束器对微波信号进行分束,再将信号分别进行混频滤波,使用信号之间的二阶互相关 $\Gamma^{(2)}$ 从而得到二阶相关函数 $G^{(2)}(\tau)$ 的方案是可行的,该方案可以实现对微波单光子源、热源和相干源的表征。

由于目前实验条件的约束,在实验中仅对相干源进行了测量。相干源是任意波形发生器产生的频率为

$\omega=3$  MHz 的波, 有连续波和脉冲波两种模式, 对应图像如图 3 所示。其中连续波形使用正弦函数  $S_c = \cos(2\pi\omega t + \varphi)$ , 脉冲波形包络对应函数为  $S_p = e^{-t^2/2c^2} \times \cos(2\pi\omega t + \varphi)$ ,  $c=1000$ 。产生的连续信号经过 ADC 采样, 频率为 100 MHz, 数据位宽为 16 Bits。得到数字信号后与频率同样为 3 MHz 的余弦和正弦信号混频, 该信号来自于数字控制振荡器。经过混频后的信号通过低通滤波器, 对应截止频率  $F_s = 0.1$  MHz, 阶数为 90。将低通滤波的信号分为实部  $I$  和虚部  $Q$ , 用于二阶相关函数计算。该计算模块主要通过 Verilog HDL 实现, 并且例化至数字下变频的顶层模块中。为了演示 FPGA 计算的正确性, 同样使用理论计算连续时序信号和脉冲信号的二阶相关函数, 计算公式为

$$G^{(2)}(\tau) \propto \int \langle S_{at}^*(t) S_{at}^*(t+\tau) S_{bt}(t+\tau) S_{bt}(t) \rangle dt \quad (19)$$

式中  $S_{at}(t)$  和  $S_{bt}(t)$  分别表示经过下变频后保留的两路理论信号的幅度信息。由于相干源信号来自任意波形发生器, 所以该信号相当于频率下变频之后的信号。而由于叠加的噪声弱, 故在计算中不用专门移除背景噪声的影响。

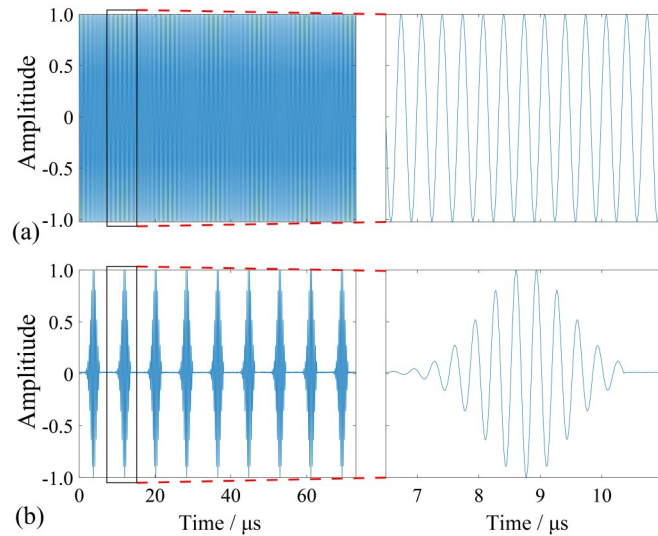


图 3 输入相干源信号示意图。(a) 连续信号时序图和区域时间放大信号包络; (b) 脉冲信号时序图和区域时间放大信号包络

Fig. 3 Input signal of the coherent source. (a) Continuous signal and the amplified wave in a certain region of time; (b) Pulse signal and the amplified wave in a certain region of time

根据计算得到的连续波形二阶相关函数经过归一化后如图 4 所示, 可以发现相干源的连续波形的二阶相关函数  $G^{(2)}(0) = G^{(2)}(\tau)(\tau \neq 0)$ , 且  $G^{(2)}(\tau)$  经过归一化之后为 1, 满足泊松分布, 由此说明任意波形发生器产生的连续波形信号源为相干源。

从图 4(b) 中可以发现脉冲波形的二阶相关函数在对应周期脉冲区域内, 有  $G^{(2)}(0) = G^{(2)}(\tau)(\tau = T_p)$ , 其中  $T_p$  表示特定周期。表明在对应固定周期时,  $G^{(2)}(\tau)$  归一化结果和  $\tau=0$  时均为 1, 与相干源的二阶相关函数对应时间统计结果一致, 同样满足泊松分布, 说明此时该任意波形发生器产生的脉冲信号源也是一个相干源。图 4(a)、(b) 中还给出了理论分析计算的结果, 由于在测量过程中混入了少量白噪声, 并且由于 FPGA 计算过程需要舍弃部分数据精度, 因而导致实际计算数据与理想条件下的理论计算有很小的偏差, 但是总体上实验结果和理论计算吻合良好, 从而证实了设计测量系统的可靠性。不仅如此, 系统在计算时间上相较于普通软

件也更加迅速,而且,该系统目前仅使用了 14% 的组合逻辑资源和 33% 的存储器资源,还有很大的提升空间。

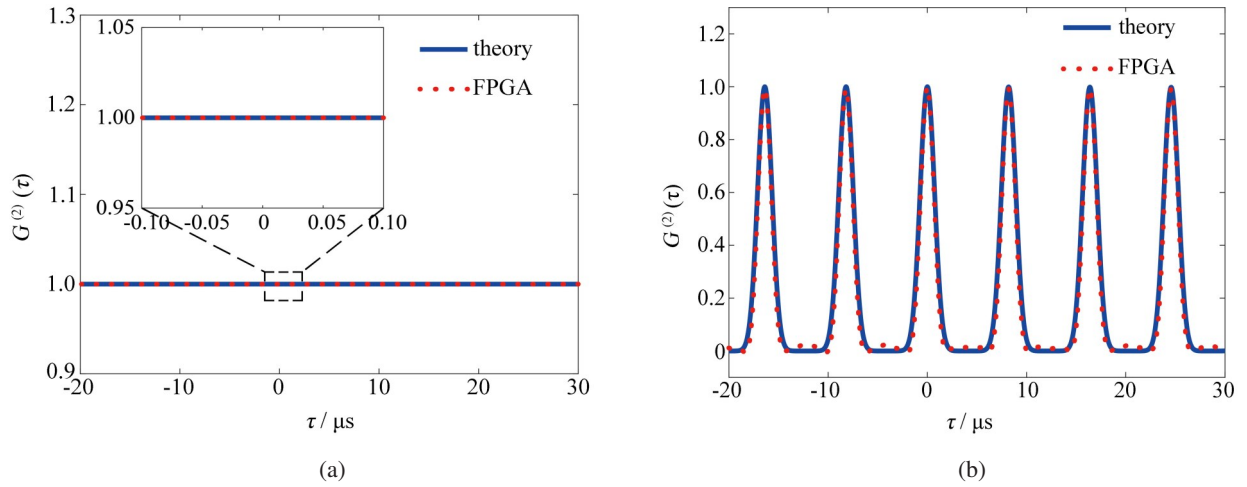


图4 对连续 (a) 和脉冲 (b) 信号进行二阶相关函数测量和理论计算结果

Fig. 4 Theoretical calculation results of second-order correlation function and the corresponding measurement results by using FPGA for the continuous (a) and pulse signal (b)

### 3 结 论

在微波量子光学中,二阶相干函数的测量对于微波源的表征有举足轻重的作用。利用信号场正交分量将复杂的算符计算映射为通用数学计算,使用现有硬件条件,利用 HBT 实验思路和硬件描述语言,成功在 FPGA 开发板上构建了一个快速、高并行度的二阶相关函数测量系统,并对相干源进行了测量分析,实验结果和理论符合良好。同时,目前该系统所占用的硬件逻辑资源并不多,因此还有很大的提升空间,从而进一步增加速度和并行度。该系统是基于硬件描述语言开发的,更易于修改和扩展。因此,利用 FPGA 的通用性和易于开发性,该系统将有望在微波量子光学的研究例如微波单光子源的表征中,实现更大的通用性和功能性。

### 参考文献:

- [1] Fox M. *Quantum Optics: An Introduction* [M]. Oxford, UK: Oxford University Press, 2006: 3-24.
- [2] Clarke J, Wilhelm F K. Superconducting quantum bits [J]. *Nature*, 2008, 453(7198): 1031-1042.
- [3] Zhou Y, Peng Z H, Horiuchi Y, *et al.* Tunable microwave single-photon source based on transmon qubit with high efficiency [J]. *Physical Review Applied*, 2020, 13(3): 034007.
- [4] da Silva M P, Bozyigit D, Wallraff A, *et al.* Schemes for the observation of photon correlation functions in circuit QED with linear detectors [J]. *Physical Review A*, 2010, 82(4): 043804.
- [5] Bozyigit D, Lang C, Steffen L, *et al.* Antibunching of microwave-frequency photons observed in correlation measurements using linear detectors [J]. *Nature Physics*, 2011, 7(2): 154-158.
- [6] Caves C M. Quantum limits on noise in linear amplifiers [J]. *Physical Review D*, 1982, 26(8): 1817-1839.

- [7] Clerk A A, Devoret M H, Girvin S M, *et al.* Introduction to quantum noise, measurement, and amplification [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2010, 82(2): 1155-1208.
- [8] Lang C, Eichler C, Steffen L, *et al.* Correlations, indistinguishability and entanglement in Hong-Ou-Mandel experiments at microwave frequencies [J]. *Nature Physics*, 2013, 9(6): 345-348.
- [9] Hanbury Brown R, Twiss R Q. A test of a new type of stellar interferometer on Sirius [J]. *Nature*, 1956, 178(4541): 1046-1048.
- [10] Christian L. *Quantum Microwave Radiation and Its Interference Characterized by Correlation Function Measurements in Circuit Quantum Electrodynamics* [D]. Zurich, Switzerland: ETH Zurich, 2014.
- [11] Cong H L, Zhao Y N, Chen L, *et al.* Quantum properties of binomial state field interacting with the cascade three-level atom [J]. *Chinese Journal of Quantum Electronics*, 2020, 37(1): 76-82.  
丛红璐, 赵玉娜, 陈雷, 等. 与级联三能级原子相互作用的二项式态光场的量子特性 [J]. 量子电子学报, 2020, 37(1): 76-82.
- [12] Buracchini E. The software radio concept [J]. *IEEE Communications Magazine*, 2000, 38(9): 138-143.
- [13] Meyer-Baese U. *Digital Signal Processing with Field Programmable Gate Arrays* [M]. Berlin, Germany: Springer, 2001: 273-366.