

DOI: 10.3969/j.issn.1007-5461.2023.04.012

一维强相互作用的玻色-费米混合气体 关联特性研究

李艳^{1,2}

(1 南昌师范学院物理与电子信息学院, 江西 南昌 330032;
2 湖南文理学院数理学院, 湖南 常德 415000)

摘要: 详细分析了一维强相互作用的玻色-费米混合气体的空间关联特性, 重点讨论了在绝对零度和有限低温下处于 Tonks-Girardeau 原子气区域的玻色-费米混合量子气体的两体空间关联函数, 并将复杂难算的多体波函数的空间关联函数转化为容易计算的矩阵行列式。研究表明, 绝对零度下对于固定数目的玻色子(费米子), 费米子(玻色子)的数目对玻色子(费米子)空间关联函数图样影响不大; 而有限温度下, 费米子(玻色子)的数目对玻色子(费米子)空间关联函数影响较大, 且随着温度的提升, 另一种粒子的数目对关联结果的影响也更显著。此外, 当总粒子数目一定时, 无论是在绝对零度还是有限低温下, 相同数目的玻色子和费米子的关联结果一致。

关键词: 量子光学; 量子关联; 玻色-费米混合气体; Tonks-Girardeau 原子气区域

中图分类号: O469

文献标识码: A

文章编号: 1007-5461(2023)04-00528-13

Correlation properties of Bose-Fermi mixture with one-dimensional strong interaction

LI Yan^{1,2}

(1 School of Physics and Electronic Information, Nanchang Normal University, Nanchang 330032, China;
2 School of Physics and Mathematics, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China)

Abstract: The spatial two-body correlations of Bose-Fermi mixture with equal masses of bosons and fermions in Tonks-Girardeau regime under periodic boundary conditions are theoretically investigated. Combining the exact solution of the quantum many-body system, the analytical formula of the spatial correlation functions for Bose-Fermi mixture at both absolute zero temperature and finite low temperatures are derived using some calculating techniques. The results show that, for a fixed number of bosons (fermions) at absolute zero temperature, the number of fermions (bosons) has little effect on the spatial correlation function of bosons (fermions). By contrast, at finite temperature, the number of fermions (bosons) has a greater effect on the spatial correlation function of bosons (fermions), and with the increase of temperature, the influence of the other particles number on the correlation results will be

基金项目: 湖南省自然科学基金(2019JJ50400), 江西省教育厅科研基金(GJJ181086), 南昌师范学院博士科研启动基金(NSBSJJ2018031)

作者简介: 李艳(1984-), 女, 江苏宿迁人, 博士, 副教授, 主要从事量子多体物理学、冷原子物理学、量子信息物理学方面的研究。

E-mail: liyan_2001@126.com

收稿日期: 2021-05-25; 修改日期: 2021-09-08

more significant. In addition, when the total particle number is fixed, the correlation results of the same number of bosons and fermions are consistent whether at absolute zero temperature or at a finite temperature.

Key words: quantum optics; quantum correlation; Bose-Fermi mixture; Tonks-Girardeau regime

0 引言

描述无相互作用的简并量子气体密度涨落的高阶关联函数包含了系统的量子统计特性、量子相干性、相结构以及量子系统初始状态等重要信息。这一关联函数最早被 Hanbury Brown 和 Twiss 用于测量双脉冲星两子星之间的距离^[1]。光子高阶关联函数的定义和应用是量子光学领域一项开创性工作。该量子关联技术也被广泛应用于天文学, 高能物理, 原子物理、量子信息物理学和凝聚态物理等学科领域^[2-7]。

近年来, 量子光学中的高阶关联分析方法也被广泛应用于冷原子分子的实验和理论研究中。在冷原子量子系统研究中, 人们对于无相互作用的量子简并系统的关联特性进行了广泛研究, 一些重要的研究如下: 处于热平衡态的无相互作用超冷原子的高阶关联研究^[8,9], 原子激光的量子统计性质研究^[10], 费米子和玻色子高阶关联函数的对比实验研究^[11], 费米子对的高阶关联研究^[12]等。量子高阶关联函数还可以用于描述量子系统的相, 如实空间的两体关联函数可以用来区分理想玻色气体和准凝聚体^[13]。量子高阶关联函数也可以很好地描述非平衡态动力学特征, 如当系统受到一个微扰之后, 其两体关联函数揭示了其动力学演化过程的光锥效应^[14]。量子高阶关联函数还被用于光晶格中玻色子、费米子以及任意子的量子行为的研究^[15]。量子关联特性也被用于刻画量子系统拓扑化^[16]、晶体有序化^[17]、量子混沌系统^[18]的行为特点, 以及量子 and 经典系统的各态遍历性^[19]。高阶关联函数这一有力工具在冷原子领域的应用为认识微观粒子的量子统计、干涉特性开辟了新的方向。

然而, 对于有相互作用的量子系统关联特性研究还比较少见。在光学领域, 从辐射源到探测器的传播过程中系统的非线性相互作用得到了研究^[20], 然而作为光源的具有粒子间相互作用的光子流体^[21]还尚未被探测。在冷原子领域, 关联函数被用于刻画具有弱相互作用的玻色子气体在玻色爱因斯坦凝聚相变点附近的相干性质^[22], 在这一区域热运动的能量超过了相互作用能量。在相反的情形下, 当系统的相互作用占主导地位时, 人们也通过对关联函数的研究, 观察到系统量子统计性质与粒子间相互作用之间的交互影响^[23]。

本文将着重研究一维具有无限大排斥相互作用即处于 Tonks-Girardeau(T-G)原子气区域的玻色-费米混合气体的空间两体关联函数特性。分别探讨处于绝对零度以及有限低温下的玻色和费米粒子的空间关联函数。研究揭示了在绝对零度和有限低温下处于 T-G 原子气区域的玻色-费米混合气体的空间关联函数图样对量子系统粒子数目以及量子统计特性的依赖关系。

1 理论模型

一维玻色-费米混合气体可以由如下哈密顿量描述

$$H = \int_0^L dx \left(\frac{\hbar^2}{2m_b} \partial_x \Psi_b^\dagger \partial_x \Psi_b + \frac{\hbar^2}{2m_f} \partial_x \Psi_f^\dagger \partial_x \Psi_f \right) + \int_0^L dx \left(\frac{1}{2} g_{bb} \Psi_b^\dagger \Psi_b^\dagger \Psi_b \Psi_b + g_{bf} \Psi_b^\dagger \Psi_f^\dagger \Psi_f \Psi_b \right), \quad (1)$$

式中: Ψ_b 和 Ψ_f 分别是玻色和费米算符, m_b 和 m_f 分别是玻色和费米子的质量, 而 g_{bb} 和 g_{bf} 分别为玻色子之间以

及玻色费米子之间的相互作用强度。当 $m_i = m_b = m$ 以及 $g_{bb} = g_{bf} = g > 0$ 时, 该模型严格可解^[24]。在后面研究中, 将考虑粒子间的相互作用强度 $g \rightarrow \infty$, 即量子系统处 T-G 原子气区域, 且考虑该量子系统具有周期性边界条件, 详细研究这一量子系统在绝对零度和有限低温下的关联特性。

在绝对零度下, 处于 T-G 原子气区域总粒子数为 N 、玻色子数目为 M 的玻色-费米混合气体的多体波函数正比于轨道自由度以及自旋自由度两个 Slater 行列式的乘积^[25], 即

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \sim \det[e^{ik_i x_j}] \det\left[e^{i\frac{2\pi}{N}\kappa_j y_j}\right],$$

这里波函数“轨道”自由度部分 $\det[e^{ik_i x_j}]$ 以及“自旋”自由度部分 $\det\left[e^{i\frac{2\pi}{N}\kappa_j y_j}\right]$ 中的波矢量分别为

$$\begin{aligned} \kappa_i &= \left\{ -(M-1)/2 + N/2, \dots, N/2, \dots, (M-1)/2 + N/2 \right\}, \\ k_i &= \left\{ -\pi(N-1)/L, \dots, -\pi/L, \pi/L, \dots, \pi(N-1)/L \right\}. \end{aligned}$$

x_1, \dots, x_M 为玻色子的坐标, 而 x_{M+1}, \dots, x_N 为 $N-M$ 个费米子的坐标。将所有粒子的坐标 x_i 按由小到大的序列排列, 即 $0 \leq x_{Q_1} \leq x_{Q_2} \leq \dots \leq x_{Q_N} \leq L$, y_i 为坐标 x_i 在序列中出现的位次序, 即 $y_i = Q^{-1}(i)$ 。为了后续表述的方便设 $z_i = x_{Q_i}$, 绝对零度下处于 T-G 区域的玻色-费米混合气体的多体波函数为^[23]

$$\Psi(z_1, z_2, \dots, z_N; \hat{y}) = \frac{1}{\sqrt{(N-M)! M! L^N N^M}} \det[e^{ik_i z_j}] \det\left[e^{i\frac{2\pi}{N}\kappa_j y_j}\right] (-1)^y. \quad (2)$$

而在有限低温下 $E_f/\gamma \ll T \ll E_f$ [这里 $\gamma = mg/\hbar^2 n$, $E_f = (\pi\hbar)^2/2m$, 而在 T-G 原子气区域 $\gamma \gg 1$], 系统将处于自旋无序状态^[26,27], 忽略波函数轨道自由度激发, 只考虑自旋自由度激发。自旋自由度激发态的数目与系统玻色子数目对应, 自旋波矢量 κ 的选择范围将扩大至 $\hat{K} = \{\kappa_i \in \{1, \dots, N\}, \kappa_i < \kappa_j \text{ for } i < j\}$ ^[25], 自旋激发态的单粒子能量为

$$\varepsilon(\kappa) = \frac{4E_f}{3\gamma} \left(\cos \frac{2\pi\kappa}{N} - 1 \right). \quad (3)$$

最低的能级对应 $\kappa = N/2$, 随着激发态数目的增加, 自旋波矢量 $\kappa = N/2$ 附近的量子态也将被占据。体系最小能量态对应的波函数“轨道”部分的波矢 k 将变为

$$\left\{ \frac{2\pi}{L}(-N/2 + D/N), \frac{2\pi}{L}(-N/2 + 1 + D/N), \dots, \frac{2\pi}{L}(N/2 - 1 + D/N) \right\},$$

式中 $D = \sum_{i=1}^M \kappa_i \bmod N$ 由系统的边界条件限定给出。

2 绝对零度下处于 T-G 原子气区域的玻色-费米混合气体的关联函数

处于位置 x_1 和 x_2 两个玻色子的空间两体关联函数定义为

$$G^b(x_1, x_2) = M(M-1) \int \psi^*(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \psi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) dx_3 \cdots dx_N, \quad (4)$$

这个关联函数反应了位置 x_1 和 x_2 均可探测到玻色子的联合概率分布。利用上节中的多体波函数, 首先研究绝对零度下处于 T-G 原子气区域的玻色-费米混合气体的空间关联函数特点。如果直接按照(2)和(4)式计算, 需要对 $N-2$ 个粒子的坐标在不同区间 $[0, x_1)$, (x_1, x_2) 或 $(x_2, L]$ 做积分, 且这样的积分运算要做 $(N!)^2$ 次, 显

然这样的计算是非常复杂和耗时的。利用该量子体系波函数的高度对称特点和行列式的计算规律, 本文将复杂难算的多体波函数的空间关联函数转化为若干容易计算的矩阵行列式, 在此基础上对玻色-费米混合气体的玻色-玻色、费米-费米两体空间关联函数进行了详细的计算和分析。

将绝对零度下的多体波函数代入(4)式可得

$$G^b(x_1, x_2) = \sum_{\vec{y}} \int \frac{1}{(N-M)!(M-2)!L^N N^M} \det[e^{ik_j z_j}] \det[e^{i\frac{2\pi}{N}k_j y_j}] \det[e^{-ik_j z_j}] \times \det[e^{-i\frac{2\pi}{N}k_j y_j}] dx_3 \cdots dx_N .$$

对于一组 x_1, \dots, x_N 按大小顺序排列, 假设 $x_1 = z_{d_1}, x_2 = z_{d_2}$, 即 $y_1 = d_1, y_2 = d_2$, 再考虑关联函数中对整个空间积分和各种排列次序求和的运算, 可按照如下方式计算关联函数

$$G^b(x_1, x_2) = \frac{1}{(N-M)!(M-2)!L^N N^M} \sum_{d_1, d_2} I(d_1, d_2; x_1, x_2) S^b(d_1, d_2) , \tag{5}$$

式中 $I(d_1, d_2; x_1, x_2)$ 是与波函数“轨道”部分相关的函数, 可表示为

$$I(d_1, d_2; x_1, x_2) = \int \det[e^{ik_j z_j}] \det[e^{-ik_j z_j}] dx_3 \cdots dx_N , \tag{6}$$

而 $S^b(d_1, d_2)$ 则是与波函数“自旋”部分相关的函数, 可表示为

$$S^b(d_1, d_2) = \sum_{\vec{y}} \det[e^{i\frac{2\pi}{N}k_j y_j}] \det[e^{-i\frac{2\pi}{N}k_j y_j}] . \tag{7}$$

下面分别计算 $I(d_1, d_2; x_1, x_2)$ 和 $S^b(d_1, d_2)$ 两个函数, 最后再分析绝对零度下该量子体系关联函数特性。

2.1 $I(d_1, d_2; x_1, x_2)$ 的计算

利用 Vandermonde 公式可以得到

$$\det[e^{ik_j z_j}] = e^{-i\pi(N-1)(z_1+z_2+\dots+z_N)} \det[e^{i2\pi(l-1)z_j}] = e^{-i\pi(N-1)(z_1+z_2+\dots+z_N)} \prod_{j_1 < j_2} (e^{i2\pi z_{j_2}} - e^{i2\pi z_{j_1}}),$$

这里 $l = \{1, \dots, N\}$ 。除去位于 x_1

和 x_2 两点处的粒子, 其他 $N-2$ 个粒子的坐标位置重新按大小顺序排列并设为 t_1, t_2, \dots, t_{N-2} , 排列顺序设为

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{d_1-1} \leq x_1 \leq t_{d_1} \leq \dots \leq t_{d_2-2} \leq x_2 \leq t_{d_2-1} \leq \dots \leq t_{N-2} \leq L ,$$

再将行列式 $\det[e^{ik_j z_j}]$ 结果代入(6)式, 并展开其中的行列式可得

$$I(d_1, d_2; x_1, x_2) = \frac{|e^{i2\pi x_1} - e^{i2\pi x_2}|^2}{(d_1-1)(d_2-d_1-1)(N-d_2)!} \int_{t_i \in T} \sum_{P \in S_{N-2}} \sum_{P' \in S_{N-2}} (-1)^P (-1)^{P'} \times \prod_{i=1}^{N-2} e^{i2\pi((P_i-1)-(P'_i-1))t_i} |e^{i2\pi t_i} - e^{i2\pi x_1}|^2 |e^{i2\pi t_i} - e^{i2\pi x_2}|^2 dt_i . \tag{8}$$

因不同 t_i 积分区间有所不同, 为方便下面的数学处理, 定义如下几个分段函数

$$f^1(x_1, x_2; t) = \begin{cases} |e^{i2\pi t} - e^{i2\pi x_1}|^2 |e^{i2\pi t} - e^{i2\pi x_2}|^2, & t < x_1 \\ 0, & t > x_1 \end{cases} ,$$

$$f^2(x_1, x_2; t) = \begin{cases} |e^{i2\pi t} - e^{i2\pi x_1}|^2 |e^{i2\pi t} - e^{i2\pi x_2}|^2, & x_1 < t < x_2 \\ 0, & t < x_1, t > x_2 \end{cases} ,$$

$$f^3(x_1, x_2; t) = \begin{cases} |e^{i2\pi t} - e^{i2\pi x_1}|^2 |e^{i2\pi t} - e^{i2\pi x_2}|^2, & t > x_2 \\ 0, & t < x_2 \end{cases} ,$$

于是 $I(d_1, d_2; x_1, x_2)$ 可以表达为

$$I(d_1, d_2; x_1, x_2) = \frac{|e^{i2\pi x_1} - e^{i2\pi x_2}|^2}{(d_1 - 1)(d_2 - d_1 - 1)(N - d_2)!} \sum_{P \in S_{N-2}} \sum_{Q \in S_{N-2}} (-1)^P (-1)^{P'} \times \\ \prod_{i=1}^{d_1-1} \int_0^1 e^{i2\pi(P_i - P'_i)t_i} f^1(x_1, x_2, t_i) dt_i \prod_{i=d_1}^{d_2-2} \int_0^1 e^{i2\pi(P_i - P'_i)t_i} f^2(x_1, x_2, t_i) dt_i \prod_{i=d_2-1}^{N-2} \int_0^1 e^{i2\pi(P_i - P'_i)t_i} f^3(x_1, x_2, t_i) dt_i, \quad (9)$$

上述公式中的求和以及积分运算依然难以计算, 按照参考文献[23]的处理方法, 引入相位 φ_1 和 φ_2 可将以上公式简化为 (在后面的计算中将反复使用这一计算技巧)

$$I(d_1, d_2; x_1, x_2) = \frac{|e^{i2\pi x_1} - e^{i2\pi x_2}|^2}{(N-2)!} \sum_P (-1)^P \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{2\pi} \frac{d\varphi_2}{2\pi} e^{-i(d_1-1)\varphi_1} e^{-i(d_2-d_1-1)\varphi_2} \times \\ \sum_{P' \in S_{N-2}} (-1)^{P'} \prod_{i=1}^{N-2} \int_0^1 e^{i2\pi(P_i - P'_i)c_i} [e^{i\varphi_1} f^1(x_1, x_2, c_i) + e^{i\varphi_2} f^2(x_1, x_2, c_i) + f^3(x_1, x_2, c_i)] dc_i. \quad (10)$$

这里利用 $\int_0^{2\pi} e^{in\varphi} d\varphi$ 只有当 $n=0$ 时才不等于零, 考虑积分运算 $\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{2\pi} \frac{d\varphi_2}{2\pi} e^{-i(d_1-1)\varphi_1} e^{-i(d_2-d_1-1)\varphi_2} \times [\dots]$, 因此 $[\dots]$ 展开项中只有 $e^{i\varphi_1} f^1(x_1, x_2, t_i)$ 连乘 d_1-1 次、 $e^{i\varphi_2} f^2(x_1, x_2, t_i)$ 连乘 d_2-d_1-1 次、 $f^3(x_1, x_2, t_i)$ 连乘 $N-2-d_2$ 次的结果积分后才不为零, (9) 式第二行展开式计算结果与 (10) 式相应连乘结果相同的重复度是 $\frac{(N-2)!}{(d_1-1)!(d_2-d_1-1)!(N-d_2)!}$, 因此 (10) 式与 (9) 式的计算结果完全相同。对于 (10) 式, 第二行的积分部分可以

写成矩阵形式, 再考虑所有排列 P 的求和, 于是得到

$$I(d_1, d_2; x_1, x_2) = |e^{i2\pi x_1} - e^{i2\pi x_2}|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{2\pi} \frac{d\varphi_2}{2\pi} e^{-i(d_1-1)\varphi_1} e^{-i(d_2-d_1-1)\varphi_2} \times \\ \det \begin{bmatrix} c_0(\varphi_1, \varphi_2) & c_1(\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & c_{N-3}(\varphi_1, \varphi_2) \\ c_{-1}(\varphi_1, \varphi_2) & c_0(\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & c_{N-4}(\varphi_1, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{-(N-3)}(\varphi_1, \varphi_2) & c_{-(N-4)}(\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & c_0(\varphi_1, \varphi_2) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其中

$$c_j(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 e^{i2\pi j t_i} [e^{i\varphi_1} f^1(x_1, x_2, t_i) + e^{i\varphi_2} f^2(x_1, x_2, t_i) + f^3(x_1, x_2, t_i)] dt_i.$$

2.2 $S^b(d_1, d_2)$ 的计算

计算除去 x_1 和 x_2 点对应的排序 d_1 和 d_2 , 其余 $M-2$ 个玻色子的位置次序按大小顺序排列并重新标记为 l_1, \dots, l_{M-2} , 于是将 $S^b(d_1, d_2)$ 表达式(7)中行列式展开并整理得到

$$S^b(d_1, d_2) = \sum_{\tilde{y}} \det \left[e^{i\frac{2\pi}{N} x_i y_j} \right] \det \left[e^{i\frac{2\pi}{N} x_i y_j} \right] = \sum_{\tilde{y}} \left| e^{i\frac{2\pi}{N} d_2} - e^{i\frac{2\pi}{N} d_1} \right|^2 \times \\ \det \left[e^{i\frac{2\pi}{N} (l-1) l_j} \right] \det \left[e^{-i\frac{2\pi}{N} (l-1) l_j} \right] \prod_{i=1}^{M-2} \left| e^{i\frac{2\pi}{N} l_i} - e^{i\frac{2\pi}{N} d_1} \right|^2 \left| e^{i\frac{2\pi}{N} l_i} - e^{i\frac{2\pi}{N} d_2} \right|^2, \quad (12)$$

假设 l_1, \dots, l_{M-2} 与 d_1, d_2 为如下排列顺序: $1 \leq l_1 < \dots < l_{r_1-1} < d_1 < l_{r_1} < \dots < l_{r_2-1} < d_2 < l_{r_2} < \dots < l_{M-2} \leq N$,

则有

$$S^b(d_1, d_2) = \frac{(N-M)(M-2)!}{(r_1-1)(r_2-r_1)(M-1-r_2)!} S^b(d_1, d_2; r_1, r_2) \quad (13)$$

式中

$$S^b(d_1, d_2; r_1, r_2) = \left| e^{i\frac{2\pi}{N}d_2} - e^{i\frac{2\pi}{N}d_1} \right|^2 \sum_{Q \subset S_{M-2}} \sum_{P \subset S_{M-2}} (-1)^Q \times \prod_{i=1}^{r_1-1} c^1(d_1, d_2, Q_{P_i}, P_i) \prod_{i=r_1}^{r_2-1} c^2(d_1, d_2, Q_{P_i}, P_i) \prod_{i=r_2}^{M-2} c^3(d_1, d_2, Q_{P_i}, P_i) \quad (14)$$

而其中

$$c^1(d_1, d_2, Q_{P_i}, P_i) = \sum_{t_i=1}^{d_1-1} e^{i\frac{2\pi}{N}((P_i-1)-(P'_i-1)t_i)} \left| e^{i\frac{2\pi}{N}t_i} - e^{i\frac{2\pi}{N}d_1} \right|^2 \left| e^{i\frac{2\pi}{N}t_i} - e^{i\frac{2\pi}{N}d_2} \right|^2,$$

$$c^2(d_1, d_2, Q_{P_i}, P_i) = \sum_{t_i=d_1+1}^{d_2-1} e^{i\frac{2\pi}{N}((P_i-1)-(P'_i-1)t_i)} \left| e^{i\frac{2\pi}{N}t_i} - e^{i\frac{2\pi}{N}d_1} \right|^2 \left| e^{i\frac{2\pi}{N}t_i} - e^{i\frac{2\pi}{N}d_2} \right|^2,$$

$$c^3(d_1, d_2, Q_{P_i}, P_i) = \sum_{t_i=d_2+1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}((P_i-1)-(P'_i-1)t_i)} \left| e^{i\frac{2\pi}{N}t_i} - e^{i\frac{2\pi}{N}d_1} \right|^2 \left| e^{i\frac{2\pi}{N}t_i} - e^{i\frac{2\pi}{N}d_2} \right|^2.$$

再考虑各种其他排列的可能性, 对 r_1 和 r_2 的各种可能情况求和可得

$$S^b(d_1, d_2) = \sum_{r_1, r_2} \frac{(N-M)(M-2)!}{(r_1-1)(r_2-r_1)(M-1-r_2)!} S^b(d_1, d_2; r_1, r_2) \quad (15)$$

引入相位因子 φ_1 和 φ_2 , 可将 $S^b(d_1, d_2; r_1, r_2)$ 转化为

$$S^b(d_1, d_2; r_1, r_2) = (r_1-1)(r_2-r_1)(M-1-r_2)! \left| e^{i\frac{2\pi}{N}d_2} - e^{i\frac{2\pi}{N}d_1} \right|^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{2\pi} \frac{d\varphi_2}{2\pi} e^{-i(r_1-1)\varphi_1} \times e^{-i(r_2-r_1-1)\varphi_2} \times \det \begin{bmatrix} c(\varphi_1, \varphi_2, 1, 1) & c(\varphi_1, \varphi_2, 2, 1) & \cdots & c(\varphi_1, \varphi_2, M-2, 1) \\ c(\varphi_1, \varphi_2, 1, 2) & c(\varphi_1, \varphi_2, 2, 2) & \cdots & c(\varphi_1, \varphi_2, M-2, 2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c(\varphi_1, \varphi_2, 1, M-2) & c(\varphi_1, \varphi_2, 2, M-2) & \cdots & c(\varphi_1, \varphi_2, M-2, M-2) \end{bmatrix} \quad (15)$$

式中: $c(\varphi_1, \varphi_2, j, l) = e^{i\varphi_1} c^1(d_1, d_2, j, l) + e^{i\varphi_2} c^2(d_1, d_2, j, l) + c^3(d_1, d_2, j, l)$ 。将(15)式中的行列式按照 $e^{i\varphi_1}$ 和 $e^{i\varphi_2}$ 的幂级数展开得到 $\det [c(\varphi_1, \varphi_2, j, l)] = \sum_{m,n} f_{mn} e^{im\varphi_1} e^{in\varphi_2}$, 于是得到

$$S^b(d_1, d_2; r_1, r_2) = (r_1-1)(r_2-r_1-1)(M-2-r_1-r_2)! \left| e^{i\frac{2\pi}{N}d_2} - e^{i\frac{2\pi}{N}d_1} \right|^2 f_{(r_1-1)(r_2-r_1-1)} \quad (16)$$

再将结果代入(15)式可得

$$S^b(d_1, d_2) = (N-M)(M-2)! \left| e^{i\frac{2\pi}{N}d_2} - e^{i\frac{2\pi}{N}d_1} \right|^2 \sum_{r_1, r_2} f_{(r_1-1)(r_2-r_1-1)} \quad (17)$$

由于 $\sum_{r_1, r_2} f_{(r_1-1)(r_2-r_1-1)} = \det [c(0, 0, j, l)]$, 可以得到

$$S^b(d_1, d_2) = (N-M)(M-2)! \left| e^{i\frac{2\pi}{N}d_2} - e^{i\frac{2\pi}{N}d_1} \right|^2 \det [c(0, 0, j, l)] \quad (18)$$

2.3 关联函数结果分析

图(1)~(3)展示了不同参数条件下玻色-费米混合气体绝对零度下的玻色-玻色关联函数图样。玻色-玻色

关联图样呈现出对称的平台状结构, 平台上还具有波浪状的条纹结构, 且一侧平台上波峰数目与玻色子的数目有关为 $M-1$ 。由于系统的周期性边界条件和波函数的交换对称性导致最后的关联结果取决于两点之间的距离即 $G(x_1, x_2) \sim G(|x_1 - x_2|)$ 。两个平台中间的深沟状结构是由于当 $x_1 = x_2$ 时 $G(x_1, x_2) = 0$, 这是因为在 T-G 原子气区域粒子间强排斥相互作用将禁止两个粒子相互靠近所致。由于没有其他势阱束缚, 所有粒子在 $[0, L]$ 区间的分布是均匀的。关联图样中的平台状结构也证明: 除了两个粒子不能相互靠近以外, 两个粒子同时处于两个位置 x_1, x_2 的概率是相当的。对于均匀分布于 $[0, L]$ 区间的 M 个玻色子粒子, 再考虑周期性边界条件, 则在两个粒子相距 $L/M, 2L/M, \dots, (M-1)L/M$ 处同时探测到两个粒子的概率较大, 即为关联图样平台上的 $M-1$ 条条纹。而关联图样中间深沟的宽度与波函数的构成有关, 按(2)式在绝对零度下应直接取决于总粒子以及关联粒子的数目。

还可以从图 1~3 中观察到在绝对零度下处于 T-G 原子气区域的玻色费米混合气体中, 费米子数目对于系统玻色-玻色关联函数图样的影响。在图 1 中, 当玻色子数目固定为 $M=5$ 时, 随着总粒子数目从 $N=6$ 增加至 $N=30$, 玻色-玻色关联图样始终呈现出对称的平台状结构, 一侧平台上波动条纹数目也始终保持为 $M-1$ 。图 2 和图 3 分别展示了固定总粒子数目 N 和具有固定费米子数目 $N-M$ 两种情况下的玻色-玻色关联图样。关联图样始终呈现出对称且具有平移不变性的平台结构, 且一侧平台上波峰数目与玻色子的数目有关。只是当玻色子数目较多时, 平台上的波浪条纹结构已经不能分辨。随着玻色子数目的增多, 关联函数的平台区域不断扩大, 两个平台中间间隔也不断收窄。

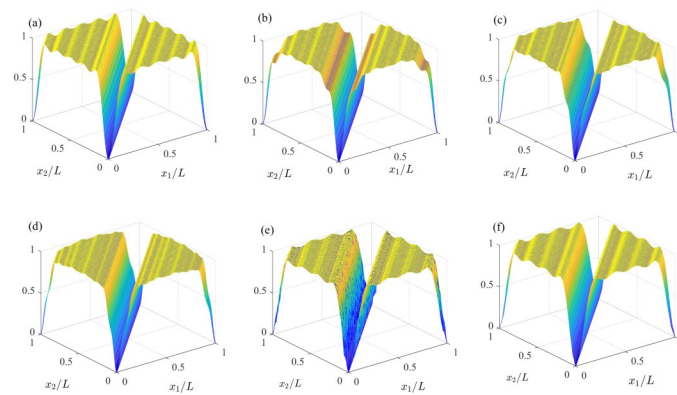


图1 玻色子数目固定为 $M=5$, 绝对零度下处于 T-G 原子气区域的玻色-费米混合气体在不同费米子数目情形下的玻色-玻色关联函数图样: (a) $N=6$; (b) $N=8$; (c) $N=10$; (d) $N=12$; (e) $N=20$; (f) $N=30$

Fig. 1 Zero-temperature Bose-Bose correlations of Bose-Fermi mixture with fixed 5 bosons ($M=5$) in T-G regime. In the numerical evaluations, N is taken as (a) $N=6$; (b) $N=8$; (c) $N=10$; (d) $N=12$; (e) $N=20$; (f) $N=30$

计算结果揭示了绝对零度下在 T-G 原子气区域的玻色-费米混合气体中, 对于固定玻色子数目的系统, 费米子的数目对玻色子空间关联函数图样影响不大。从数学计算角度分析, 根据(11)式关联函数轨道部分 $I(d_1, d_2; x_1, x_2)$ 的计算结果与总粒子数目 N 有关, 而与玻色子数目 M 无关; 而自旋部分 $S^b(d_1, d_2)$ 与总粒子数目 N 和玻色子数目 M 均有关。如图 2 所示, 固定总粒子数目的玻色-玻色关联函数的研究表明: 在绝对零度下玻色费米混合气体的多体波函数的自旋自由度部分对于关联函数的最终图样影响较大。

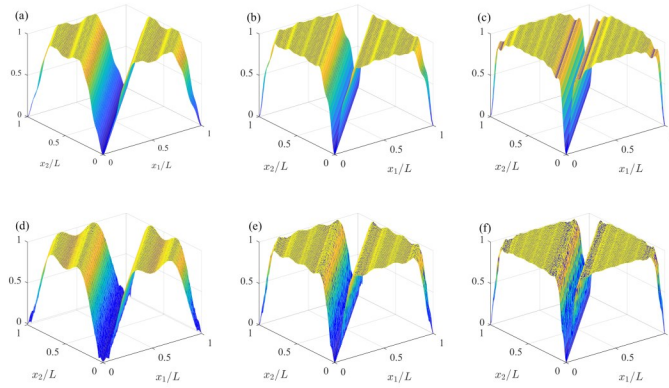


图2 总粒子数目固定为 $N=10$ [(a)~(c)]和 $N=20$ [(d)~(f)], 绝对零度下处于T-G原子气区域的玻色-费米混合气体在不同玻色子数目情形下的玻色-玻色关联函数图样。(a) $M=3$; (b) $M=5$; (c) $M=7$; (d) $M=3$; (e) $M=5$; (f) $M=7$

Fig. 2 Zero-temperature Bose-Bose correlations of Bose-Fermi mixture with fixed 10 particles [(a)-(c)] and 20 particles [(d)-(f)] in T-G regime. In the numerical evaluations, M is taken as (a) $M=3$; (b) $M=5$; (c) $M=7$; (d) $M=3$; (e) $M=5$; (f) $M=7$

按照玻色子同样的研究思路,可以得到费米-费米关联函数的表达式。结果表明在绝对零度情形下,费米子的关联函数与玻色子的计算结果在相同关联粒子和总粒子数目的情况下是一致的,即当总粒子数目 N 一定时, M 玻色子的关联结果和 M 个费米子的关联结果一致。在一维空间,粒子不能互相跨越交换位置,因此空间关联函数并不能体现费米子与玻色子统计行为上的差异。

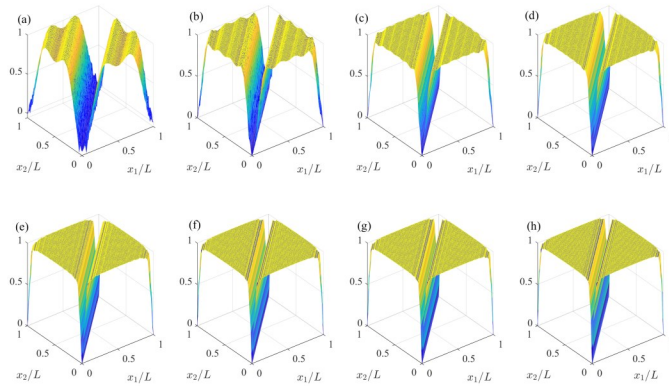


图3 费米子数目固定为 $N-M=15$, 绝对零度下处于T-G原子气区域的玻色-费米混合气体在不同玻色子数目情形下的玻色-玻色关联函数图样。(a) $M=3$; (b) $M=5$; (c) $M=7$; (d) $M=9$; (e) $M=11$; (f) $M=13$; (g) $M=15$; (h) $M=17$

Fig. 3 Zero-temperature Bose-Bose correlations of Bose-Fermi mixture with fixed 15 fermions ($N-M=15$) in T-G regime. In the numerical evaluations, N is taken as (a) $N=8$; (b) $N=10$; (c) $N=12$; (d) $N=14$; (e) $N=20$; (f) $N=30$

3 有限温度下处于T-G原子气区域玻色费米混合气体的关联函数

以上绝对零度下的关联函数只适用于温度处于区间 $T \ll E_f/\gamma \ll E_f$ 的情形。下面将着重研究处于温度 $E_f/\gamma \ll T \ll E_f$ 这一“自旋无序”的温度区间、T-G原子气区域的玻色-费米混合系统的关联函数特性。已有的研究表明处于这一温度区间的玻色-费米混合量子系统展现出诸多有趣的物理性质^[24,25]。

首先计算有限温度下的费米-费米关联函数

$$G^f(x_{N-1}, x_N; T) = \frac{(N-M)(N-M-1)}{Z} \sum_{\kappa_i \subset \bar{K}} e^{-\sum_i \varepsilon(\kappa_i)/T} \int \psi^*(\kappa_1, \dots, \kappa_M; x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) \times \\ \psi(\kappa_1, \dots, \kappa_M; x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) dx_1 \cdots dx_{N-2}, \quad (19)$$

式中的分母部分为系统的配分函数, 可引用相位因子 θ 转化如下方式计算

$$Z = \sum_{\kappa_i \subset \bar{K}} e^{-\sum_i \varepsilon(\kappa_i)/T} = \int_0^{2\pi} e^{-iM\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \prod_{\kappa=1}^N (1 + e^{i\theta} e^{-\varepsilon(\kappa)/T}), \quad (20)$$

于是可得

$$G^f(x_{N-1}, x_N; T) = \frac{1}{Z} \frac{1}{(N-M-2)!(M)!L^N N^M} \sum_{d_1, d_2} \sum_{\kappa_i \subset \bar{K}} I(x_{N-1}, x_N; \kappa_1, \dots, \kappa_M; d_1, d_2) \times \\ S^f(\kappa_1, \dots, \kappa_M; d_1, d_2), \quad (21)$$

式中

$$S^f(\kappa_1, \dots, \kappa_M; d_1, d_2) = \sum_j \det \left[e^{i\frac{2\pi}{N} \kappa_i y_j} \right] \det \left[e^{-i\frac{2\pi}{N} \kappa_i y_j} \right], \quad (22)$$

$$I(x_{N-1}, x_N; \kappa_1, \dots, \kappa_M; d_1, d_2) = I(x_{N-1}, x_N; d_1, d_2) \sum_{D=0}^N \delta \left(1 - \frac{\delta_N(D)}{2} \right) \delta_N \left(D - \sum_{i=1}^M \kappa_i \right), \quad (23)$$

式中

$$\delta_N(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \bmod N = 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (24)$$

再利用 $\delta_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N} px}$, 可得

$$G^f(x_{N-1}, x_N; T) = \frac{1}{Z} \frac{1}{(N-M-2)!(M)!L^N N^M} \sum_{d_1, d_2} I(x_{N-1}, x_N; d_1, d_2) \sum_{D=0}^N \left(1 - \frac{\delta_N(D)}{2} \right) \times \\ \sum_{p=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N} pD} S^f(d_1, d_2, p; T), \quad (25)$$

式中

$$S^f(d_1, d_2, p; T) = \sum_{\kappa_i \subset \bar{K}} e^{-\sum_i \left(i\frac{2\pi}{N} p\kappa_i + \varepsilon(\kappa_i)/T \right)} S^f(\kappa_1, \dots, \kappa_M; d_1, d_2), \quad (26)$$

采用与前面绝对零度下的关联函数类似的处理方法, 可以得到

$$S^f(\kappa_1, \dots, \kappa_M; d_1, d_2) = \sum_{r_1, r_2} \frac{(N-M-2)!M!}{(r_1-1)!(r_2-r_1)!(M+1-r_2)!} S^f(\kappa_1, \dots, \kappa_M; d_1, d_2; r_1, r_2), \quad (27)$$

而其中 $S^f(\kappa_1, \dots, \kappa_M; d_1, d_2; r_1, r_2)$ 可以通过引入相位因子变成矩阵行列式的形式

$$S^f(\kappa_1, \dots, \kappa_M; d_1, d_2; r_1, r_2) = (N-M-2)!M! \times \\ \det \begin{bmatrix} g^f(0, 0, \kappa_1, \kappa_1) & g^f(0, 0, \kappa_1, \kappa_2) & \cdots & g^f(0, 0, \kappa_1, \kappa_M) \\ g^f(0, 0, \kappa_2, \kappa_1) & g^f(0, 0, \kappa_2, \kappa_2) & \cdots & g^f(0, 0, \kappa_2, \kappa_M) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g^f(0, 0, \kappa_M, \kappa_1) & g^f(0, 0, \kappa_M, \kappa_2) & \cdots & g^f(0, 0, \kappa_M, \kappa_M) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

式中

$$g^f(\varphi_1, \varphi_2, \kappa_i, \kappa_j) = e^{i\varphi_1} \sum_{t=1}^{d_1-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(\kappa_i - \kappa_j)t} + e^{i\varphi_2} \sum_{t=d_1+1}^{d_2-1} e^{i\frac{2\pi}{N}(\kappa_{\rho'_t} - \kappa_{\rho_t})t} + \sum_{t=d_2+1}^N e^{i\frac{2\pi}{N}(\kappa_{\rho'_t} - \kappa_{\rho_t})t}.$$

将(28)式代入(26)式, 可以得到

$$S^f(d_1, d_2, p; T) = (N-M-2)!M! \sum_{\kappa_1=1}^N \sum_{\kappa_2=1}^N \cdots \sum_{\kappa_M=1}^N \det \begin{bmatrix} f(\kappa_1)g^f(0, 0, \kappa_1, \kappa_1) & f(\kappa_1)g^f(0, 0, \kappa_1, \kappa_2) & \cdots & f(\kappa_1)g^f(0, 0, \kappa_1, \kappa_M) \\ f(\kappa_2)g^f(0, 0, \kappa_2, \kappa_1) & f(\kappa_2)g^f(0, 0, \kappa_2, \kappa_2) & \cdots & f(\kappa_2)g^f(0, 0, \kappa_2, \kappa_M) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(\kappa_M)g^f(0, 0, \kappa_M, \kappa_1) & f(\kappa_M)g^f(0, 0, \kappa_M, \kappa_2) & \cdots & f(\kappa_M)g^f(0, 0, \kappa_M, \kappa_M) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

式中 $f(\kappa_i) = e^{-\sum_{j=1}^i \frac{2\pi}{N} p\kappa_j + \epsilon(\kappa_i)/T}$ 。再次引入相位因子 θ , 可将上式转换为

$$S^f(d_1, d_2, p; T) = (N-M-2)!M! \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i(N-M)\theta} \times \det \begin{bmatrix} e^{i\theta} + f(1)g^f(0, 0, 1, 1) & f(1)g^f(0, 0, 1, 2) & \cdots & f(1)g^f(0, 0, 1, N) \\ f(2)g^f(0, 0, 2, 1) & e^{i\theta} + f(2)g^f(0, 0, 2, 2) & \cdots & f(2)g^f(0, 0, 2, N) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(N)g^f(0, 0, N, 1) & f(N)g^f(0, 0, N, 2) & \cdots & e^{i\theta} + f(N)g^f(0, 0, N, N) \end{bmatrix}. \quad (30)$$

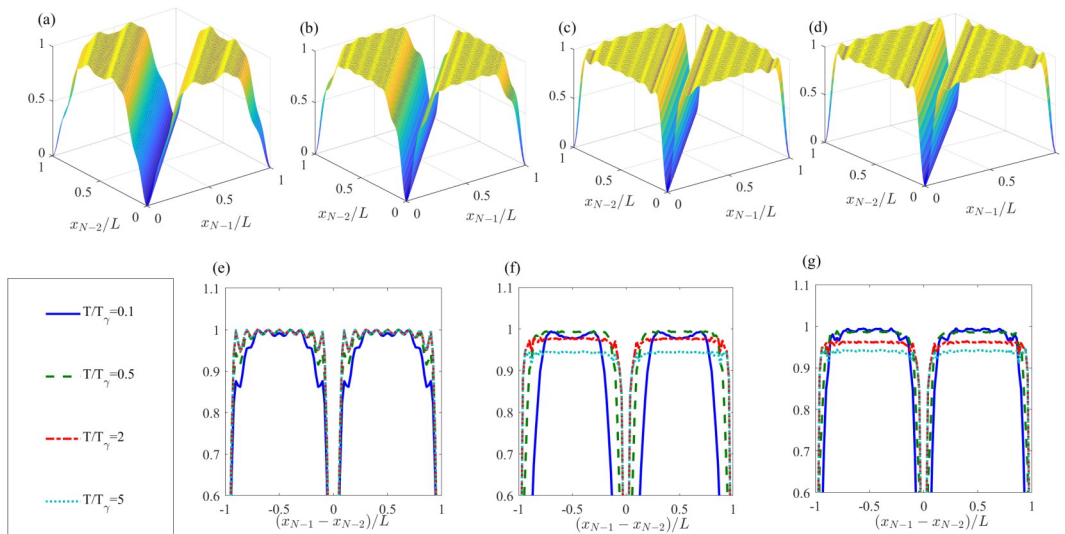


图 4 有限低温下处于 T-G 原子气区域的玻色-费米混合原子气体在不同粒子数目情形下的费米-费米关联函数 $G^f(x_{N-1}, x_N; T)$ 图样。图(a)~(d)为当 $N=10, M=7$ 时量子体系在温度 T 分别为 $0.1T_\gamma, 0.5T_\gamma, 2T_\gamma, 5T_\gamma$ ($T_\gamma=4E_f/3\gamma$) 四种情况下的关联函数的三维图样。图(e)、(f)为关联函数沿斜对角的取值 $G^f(x_{N-1}-x_N; T)$, 除温度外其他参数取值如下:

(e) $N=10, M=3$; (f) $N=20, M=17$; (g) $N=20, M=13$

Fig. 4 Finite-temperature Fermi-Fermi correlation $G^f(x_{N-1}, x_N; T)$ of Bose-Fermi mixture in T-G regime. The four plots in the top row [(a)-(d)] give the fermi-fermi correlations for $N=10, M=7$ with temperatures T taken as $0.1T_\gamma, 0.5T_\gamma, 2T_\gamma, 5T_\gamma$ ($T_\gamma=4E_f/3\gamma$) respectively. The three plots [(e), (f)] in the bottom row display the finite temperature fermi-fermi correlations along the diagonal line $G^f(x_{N-1}-x_N; T)$ for various temperature and (e) $N=10, M=7$; (f) $N=20, M=17$; (g) $N=20, M=13$

利用(23)式和(30)式, 图 4 给出了不同粒子数目情形下的玻色-费米混合气体在不同温度下的关联函数图样。在有限低温下, 系统的量子关联函数始终还是呈现出对称分布的平台结构, 但平台上波动条纹的数目将

不再仅仅只与关联粒子数目有关,平台上的波动条纹数目随着温度的增加逐渐增多。这表明在有限温度下,玻色子的数目对费米子空间关联函数图样影响较大,随着温度提升,玻色子数目对费米子关联结果的影响也将越显著。根据公式(25),对于 N 固定的情况下关联函数波函数轨道部分贡献的 $I(x_{N-1}, x_N; d_1, d_2)$ 相同,温度导致的变化还是主要来自波函数自旋部分的变化。在绝对零度下自旋波矢量 κ 只占据最低的 M 个能态,而随着温度的提升参与到关联函数中自旋波矢量 κ 的数目增多,导致关联函数图样中波动条纹数目的增加。根据公式(30),随着温度的提升, $f(\kappa_i)$ 的差异将变小,当 $f(\kappa_i)$ 的取值趋于一致时,根据行列式的计算规律可以得到

$$S^f(d_1, d_2, p; T) \rightarrow (N-M-2)!M!(N-2)^M \left[1 + C_N^{M-1} \sum_{k=1}^N \frac{|e^{ikd_1} + e^{ikd_2}|^2}{(N-2)^2} + C_N^{M-2} \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^N \frac{|e^{ikd_1} + e^{ikd_2}|^2 |e^{ipd_1} + e^{ipd_2}|^2}{(N-2)^4} + \dots \right]. \quad (31)$$

在上述情形下公式求和部分是与 d_1 和 d_2 无关的常数,于是所有的 $S^f(d_1, d_2, p; T)$ 计算结果均将趋于一个常数。这样根据(25)式,随着温度的提升最终 $G^f(x_{N-1}, x_N; T) \rightarrow \sum_{d_1, d_2} I(x_{N-1}, x_N; d_1, d_2)$, 关联函数图样只取决于波函数空间部分的贡献,波动条纹数目也将取决于总粒子数目而非关联粒子数目。

按照上述同样的思路可以计算有限温度下玻色-玻色关联函数,其结果与相同参与关联的粒子数目和总粒子数目下的玻色-玻色关联函数图样完全一致,结果表明有限温度下的空间关联函数也不能体现出玻色和费米子统计性质上的差异。

4 结 论

详细分析了一维强相互作用的玻色-费米混合气体的空间关联特性。在理论推导公式基础上,详细分析了绝对零度和有限低温下处于 T-G 原子气区域的玻色-费米混合气体的空间关联函数特点。计算与分析表明绝对零度下玻色-玻色关联图样与费米-费米关联图样呈现出对称且具有平移不变性的平台结构,且一侧平台上波峰数目为参与关联的粒子数目减一。计算结果还揭示了绝对零度下在 T-G 原子气区域的玻色-费米混合气体中,对于固定玻色子(玻色子)数目的系统,费米子(玻色子)的数目对玻色子(费米子)空间关联函数图样形状和图样中的条纹数目影响不大。另外在一维空间粒子不能互相跨越交换位置,因此空间关联函数并不能体现费米子与玻色子统计性质上的差异,相同的关联粒子数目条件下,费米子与玻色子的关联图样没有差别。与绝对零度下情形不同,有限低温下费米子(玻色子)的数目对玻色子(费米子)空间关联函数影响较大。在有限低温下,系统的量子关联函数始终还是呈现出对称分布的平台结构,但平台上的波动条纹数目随着温度增加而逐渐增多。随着温度的提升,波动条纹数目也将取决于总粒子数目而不是关联粒子数目。结果还表明在有限温度下的空间关联函数也不能体现出玻色子和费米子统计性质上的差异。

参考文献:

- [1] Glauber R J. Photon correlations [J]. *Physical Review Letters*, 1963, 10(3): 84-86.
- [2] Brown R H, Twiss R Q. The question of correlation between photons in coherent light rays [J]. *Nature*, 1956, 178: 1447-1448.
- [3] Oliver W D, Kim J, Liu R C, *et al.* Hanbury Brown and Twiss-type experiment with electrons [J]. *Science*, 1999, 284(5412): 299-301.
- [4] Fölling S, Gerbier F, Widera A, *et al.* Spatial quantum noise interferometry in expanding ultracold atom clouds [J]. *Nature*, 2005, 434: 481-484.
- [5] Schellekens M, Hoppeler R, Perrin A, *et al.* Hanbury Brown Twiss effect for ultracold quantum gases [J]. *Science*, 2005, 310 (5748): 648-651.
- [6] Han J X, Li X Y, Zhang J N, *et al.* Characterizing noise correlation and enhancing coherence via qubit motion [J]. *Fundamental Research*, 2021, 1(1): 10-15.
- [7] Yan Z H, Qin J L, Qin Z Z, *et al.* Generation of non-classical states of light and their application in deterministic quantum teleportation [J]. *Fundamental Research*, 2021, 1(1): 43-49.
- [8] Dall R G, Manning A G, Hodgman S S, *et al.* Ideal n -body correlations with massive particles [J]. *Nature Physics*, 2013, 9: 341-344.
- [9] Öttl A, Ritter S, Köhl M, *et al.* Correlations and counting statistics of an atom laser [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 95(9): 090404.
- [10] Jelte T, McNamara J M, Hogervorst W, *et al.* Comparison of the Hanbury Brown-Twiss effect for bosons and fermions [J]. *Nature*, 2007, 445: 402-405.
- [11] Greiner M, Regal C A, Stewart J T, *et al.* Probing pair-correlated fermionic atoms through correlations in atom shot noise [J]. *Physical Review Letters*, 2005, 94(11): 110401.
- [12] Altman E, Demler E, Lukin M D. Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations [J]. *Physical Review A*, 2004, 70(1): 013603.
- [13] Langen T, Geiger R, Kuhnert M, *et al.* Local emergence of thermal correlations in an isolated quantum many-body system [J]. *Nature Physics*, 2013, 9: 640-643.
- [14] Langen T, Erne S, Geiger R, *et al.* Experimental observation of a generalized Gibbs ensemble [J]. *Science*, 2015, 306(6231): 207-211.
- [15] Wang L M, Wang L, Zhang Y B. Quantum walks of two interacting anyons in one-dimensional optical lattices [J]. *Physical Review A*, 2014, 90(6): 063618.
- [16] Nussinov Z, Ortiz G. Autocorrelations and thermal fragility of anyonic loops in topologically quantum ordered systems [J]. *Physical Review B*, 2008, 77(6): 064302.
- [17] Watanabe H, Oshikawa M. Absence of quantum time crystals [J]. *Physical Review Letters*, 2015, 114: 251603.
- [18] Gharibyan H, Hanada M, Swingle B, *et al.* Characterization of quantum chaos by two-point correlation functions [J]. *Physical Review E*, 2020, 102(2): 022213.
- [19] Cornfeld I P, Fomin S V, Sinai Y G. *Ergodic Theory* [M]. New York: Springer, 1982: 28-33.
- [20] Bromberg Y, Lahini Y, Small E, *et al.* Hanbury Brown and Twiss interferometry with interacting photons [J]. *Nature Photonics*, 2010, 4: 721-726.
- [21] Carusotto I, Ciuti C. Quantum fluids of light [J]. *Reviews of Modern Physics*, 2013, 85(1): 299-366.

- [22] Perrin A, Bücker R, Manz S, *et al.* Hanbury Brown and Twiss correlations across the Bose-Einstein condensation threshold [J]. *Nature Physics*, 2012, 8: 195-198.
- [23] Cayla H, Butera S, Carcy C, *et al.* Hanbury Brown and Twiss bunching of phonons and of the quantum depletion in an interacting bose gas [J]. *Physical Review Letters*, 2020, 125(16): 165301.
- [24] Modugno G, Roati G, Riboli F, *et al.* Collapse of a degenerate fermi gas [J]. *Science*, 2002, 297(5590): 2240-2243.
- [25] Imambekov A, Demler E. Applications of exact solution for strongly interacting one dimensional Bose-Fermi mixture: Low-temperature correlation functions, density profiles, and collective modes [J]. *Annals of Physics*, 2006, 321(10): 2390-2437.
- [26] Cheianov V V, Smith H, Zvonarev M B. Low-temperature crossover in the momentum distribution of cold atomic gases in one dimension [J]. *Physical Review A*, 2005, 71(3): 033610.
- [27] Fiete G A, Balents L. Green's function for magnetically incoherent interacting electrons in one dimension [J]. *Physical Review Letters*, 2004, 93: 226401.