

## 弱导阶跃折射率光纤中的模式简并问题

韩 凯, 崔文达\*, 奚小明, 李志鸿

(国防科技大学 前沿交叉学科学院, 湖南 长沙 410072)

**摘要:** 模式是光纤光学中的基本概念,也是光纤激光器研究中最关注的问题之一。在一般的教材、文献中对模式的简并问题涉及较少,没有给出清晰、直观的物理图像。文中采用经典的电磁场理论,阐明了矢量模的简并度、标量模的简并度以及矢量模和标量模之间的简并关系。在弱导阶跃折射率光纤中,矢量模和标量模都是描述光场的正交完备基,矢量模  $[\text{HE}_{1n}^{(o)}, \text{HE}_{1n}^{(e)}]$  与标量模  $[\text{LP}_{0n}^{(ye)}, \text{LP}_{0n}^{(xe)}]$  描述的光场空间是 2 维的,矢量模  $[\text{TE}_{0n}, \text{HE}_{2n}^{(o)}, \text{HE}_{2n}^{(e)}, \text{TM}_{0n}]$  与标量模  $[\text{LP}_{1n}^{(yo)}, \text{LP}_{1n}^{(ye)}, \text{LP}_{1n}^{(xo)}, \text{LP}_{1n}^{(xe)}]$  描述的光场空间是 4 维的,矢量模  $[\text{EH}_{m-1, n}^{(o)}, \text{EH}_{m-1, n}^{(e)}, \text{HE}_{m+1, n}^{(o)}, \text{HE}_{m+1, n}^{(e)}]$  与标量模  $[\text{LP}_{mn}^{(yo)}, \text{LP}_{mn}^{(ye)}, \text{LP}_{mn}^{(xo)}, \text{LP}_{mn}^{(xe)}]$  描述的光场空间也是 4 维的。

**关键词:** 矢量模; 标量模; 模式简并度; 弱导阶跃折射率光纤

**中图分类号:** O43      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.3788/IRLA202049.0405001

## Study on mode degeneracy in weakly guiding step index fiber

Han Kai, Cui Wenda\*, Xi Xiaoming, Li Zhihong

(College of Advanced Interdisciplinary Studies, National University of Defense Technology, Changsha 410072, China)

**Abstract:** Mode is the fundamental concept in fiber optics, which is one of the most concerned issues in the fiber laser research. However, the mode degeneracy issue has not been clarified in common literature. By the classical electromagnetic theory, the degeneracy of vector mode and linearly polarized modes was analyzed and the relation between vector mode and linearly polarized mode were discussed in this paper. In the weakly guiding step index fiber, the vector mode and the linearly polarized mode were both the orthogonal complete basis for describing the optical field. The optical field described by vector mode  $[\text{HE}_{1n}^{(o)}, \text{HE}_{1n}^{(e)}]$  and linearly polarized mode  $[\text{LP}_{0n}^{(ye)}, \text{LP}_{0n}^{(xe)}]$  were 2 dimensional; the optical field described by vector mode  $[\text{TE}_{0n}, \text{HE}_{2n}^{(o)}, \text{HE}_{2n}^{(e)}, \text{TM}_{0n}]$  and linearly polarized mode  $[\text{LP}_{1n}^{(yo)}, \text{LP}_{1n}^{(ye)}, \text{LP}_{1n}^{(xo)}, \text{LP}_{1n}^{(xe)}]$  were 4 dimensional; the optical field described by vector mode  $[\text{EH}_{m-1n}^{(o)}, \text{EH}_{m-1n}^{(e)}, \text{HE}_{m+1n}^{(o)}, \text{HE}_{m+1n}^{(e)}]$  and linearly polarized mode  $[\text{LP}_{mn}^{(yo)}, \text{LP}_{mn}^{(ye)}, \text{LP}_{mn}^{(xo)}, \text{LP}_{mn}^{(xe)}]$  were 4 dimensional.

**Key words:** vector mode; linearly polarized mode; mode degeneracy; weakly guiding step index fiber

收稿日期:2019-12-15; 修订日期:2020-01-20

基金项目:国家自然科学基金青年科学基金(61605245)

作者简介:韩凯(1985-),男,副研究员,博士,主要从事高能激光方面的研究。Email: hankai0071@126.com

通讯作者:崔文达(1988-),男,助理研究员,博士,主要从事高能激光器方面的研究。Email: cui\_wenda@126.com

## 0 引言

近年来,随着高功率高光束质量光纤激光器的发展,大模场光纤中的模式控制问题引起了广泛的关注<sup>[1-3]</sup>。事实上,光纤中的模式分析是光纤光学中的基础内容,常常出现在《光纤光学》教材的第一章里<sup>[4-8]</sup>,其中光纤中的模式简并是指光纤波导中各类模式之间的等价关系。基于经典的光波导理论,《光纤光学》教材分别采用矢量法和标量法分析了阶跃折射率光纤中的模式,得到了各个模式的解析表达式、传播常数的特征方程、传播常数与归一化截止频率的关系。这些结果对于初学者认识光纤中的模式具有较大的帮助<sup>[9-10]</sup>。然而,一般教材、文献中对于光纤中的模式简并问题讨论的不多,一些模式简并的基本问题并没有给出清晰、完整答案,甚至有些教材还存在些许谬误<sup>[11-13]</sup>,例如:矢量模与标量模之间存在着什么样的简并关系?为什么存在这样的简并关系? $TE_{0n}$ 与 $TM_{0n}$ 、 $HE_{mn}$ 与 $EH_{mn}$ 具有相同的标号,为何不能简并成一个模式? $EH_{mn}$ 、 $HE_{mn}$ 模为何是 2 度简并的? $LP_{mn}(m \neq 0)$ 模为何是 4 度简并的?这些基础问题不讨论清楚,将对研究人员理解光纤中的模式、控制光纤中的模式造成障碍<sup>[14-15]</sup>。文中无意重复《光纤光学》教材中的内容,而是针对教材、文献中的不足,采

用电磁场理论阐述清楚光纤中的模式简并问题,廓清模式认识过程中的迷雾,对于理解光纤中的模式、控制光纤中的模式具有一定帮助<sup>[16-20]</sup>。

## 1 光纤中光场模式的求解思路

许多教材和文献都给出了求解光纤中光场模式的思路,如图 1 所示<sup>[21]</sup>。描述电磁场时空分布的麦克斯韦方程组可化简为关于电场强度矢量 $\vec{E}$ 和磁场强度矢量 $\vec{H}$ 时空分布的联立方程组;将光纤分为纤芯和包层两个区域,在纤芯和包层内部折射率变化很小,进一步化简得到描述 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 时空分布的独立波动方程;在光强较小不考虑光纤中非线性效应的情况下,电场强度矢量 $\vec{E}$ 和磁场强度矢量 $\vec{H}$ 随时间以 $e^{i\omega t}$ 的形式变化, $\omega$ 为光场的圆频率。这样以来,只需求解亥姆霍兹方程,得到 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的空间分布,即可获得光纤中光场时空分布的完整信息。光纤中光场的空间分布具有稳定性、有序性、正交性和叠加性的特点,称为模式。分析阶跃折射率光纤中的模式有两种观点(方法):矢量法和标量法。矢量法将 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 沿着圆柱坐标系的径向、角向和轴向分解, $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 在径向、角向和轴向的分量分别表示为 $E_r, E_\phi, E_z$ 和 $H_r, H_\phi, H_z$ ,求得 $E_z(r, \phi, z)$ 和 $H_z(r, \phi, z)$ 后,根据 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的横向分量和纵

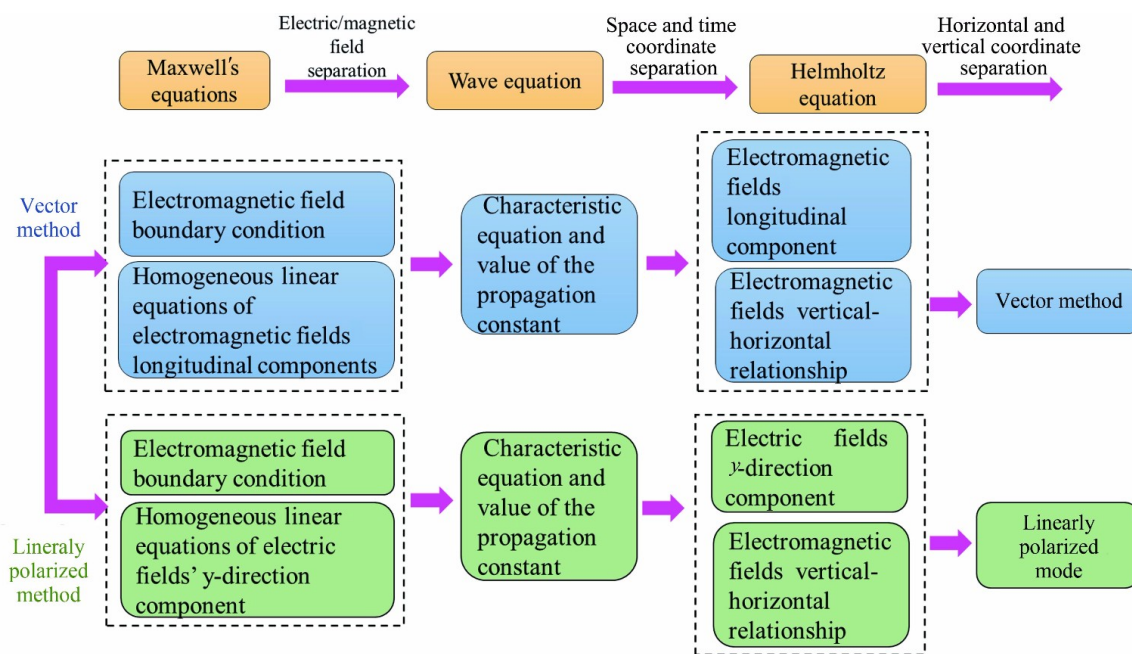


图 1 光纤中光场模式的求解过程

Fig.1 Solution procedure of light field mode in fiber

向分量之间的关系,即可得到 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 完整的空间分布,即矢量模。标量法将 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 沿着固定的 $X$ 方向、 $Y$ 方向和 $Z$ 方向分解,由于在弱导光纤中光场的偏振方向可以是一致的,因此可以合理地选取坐标方向使得 $\vec{E}$ 沿 $X$ 方向的分量为0, $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 在 $X$ 方向、 $Y$ 方向和 $Z$ 方向的分量可写为0, $E_y, E_z$ 和 $H_x, H_y, H_z$ ,求得 $E_y(r, \varphi, z)$ 后,根据 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的横向分量和纵向分量之间的关系,即可得到 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 完整的空间分布,即标量模。

通过上述求解过程得到的 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的一系列空间分布解,即光纤波导中可存在的模式,其中某些模式的空间分布相同,传播常数也相同,在描述光纤波导中光场的传播特性时是等价的,因此可以看作同一种模式,即这些模式是简并的。另外,标量法解得的模式可以由一组传播常数十分接近的矢量模简并而成,称为矢量模与标量模的简并关系,文中将对上述两种模式简并情况做详细分析。

## 2 矢量模的简并问题

文中将光纤视为无自由电荷、无传导电流、无损耗、各向同性的理想波导,在矢量法求解矢量模的过程中需将 $E_z(r, \varphi, z)$ 和 $H_z(r, \varphi, z)$ 的坐标变量分离,考虑到光纤中光场沿 $z$ 向仅有相位的变化,可将 $E_z(r, \varphi, z)$ 写为<sup>[11-12]</sup>:

$$E_z(r, \varphi, z) = A \cdot R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot e^{-\beta z} \quad (1)$$

式中: $A$ 为常数; $R(r)$ 、 $\Phi(\varphi)$ 分别表示关于半径 $r$ 和辐角 $\varphi$ 的函数; $\beta$ 为纵向传播常数。描述 $E_z(r, \varphi, z)$ 和 $H_z(r, \varphi, z)$ 的齐次波动方程转化为关于 $\Phi(\varphi)$ 的二阶线性微分方程和关于 $R(r)$ 的贝塞尔方程<sup>[11-12]</sup>:

$$\frac{1}{\Phi(\varphi)} \cdot \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = -m^2 \quad (2a)$$

$$\left[ \frac{r^2}{R(r)} \cdot \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{r}{R(r)} \cdot \frac{\partial R(r)}{\partial r} + (n^2 k_0^2 - \beta^2) r^2 \right] = m^2 \quad (2b)$$

式中: $n$ 为光纤中的折射率,纤芯的折射率表示为 $n_1$ ,包层的折射率表示为 $n_2$ ;  $k_0=2\pi/\lambda$ 为真空中的圆波数, $\lambda$ 为真空中的波长。值得注意的是,公式(2a)的解空间由两个基函数组成,分别是 $\sin(m\varphi)$ 与 $\cos(m\varphi)$ , ( $m=0, 1, 2, 3 \dots$ )。一些文献中<sup>[18-20]</sup>常常使用函数 $e^{jm\varphi}$ , ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ )作为公式(2a)的解,但是这是错误的。尽管 $e^{jm\varphi}$ , ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ )满足公式(2a),但是

$e^{jm\varphi}$ , ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ )并不是二阶线性微分方程的完备正交基,仅仅是 $\sin(m\varphi)$ 与 $\cos(m\varphi)$ , ( $m=0, 1, 2, 3 \dots$ )的线性组合而已。错误的使用函数 $e^{jm\varphi}$ , ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$ )描述 $E_z(r, \varphi, z)$ 和 $H_z(r, \varphi, z)$ 沿辐角方向的变化规律会对模式简并问题的认识造成障碍。

贝塞尔方程(2b)的解是贝塞尔函数的线性组合,根据物理图像确定公式(2b)的试探解为<sup>[21-22]</sup>:

$$R(r) = \begin{cases} \frac{J_m\left(\frac{U}{a}r\right)}{J_m(U)} & 0 \leq r \leq a \\ \frac{K_m\left(\frac{W}{a}r\right)}{K_m(W)} & r \geq a \end{cases} \quad (3)$$

式中: $a$ 为纤芯的半径; $J_m$ 与 $K_m$ 分别为第一类贝塞尔函数和第二类修正贝塞尔函数; $U$ 为导模的横向归一化传播常数 $U = a\sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2}$ ;  $W$ 为导模在包层中的归一化衰减系数 $W = a\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2}$ 。利用光场在纤芯与包层边界上的连续条件,得到特征方程:

$$\left[ \frac{k_0^2 n_1^2 J'_m(U)}{U J_m(U)} + \frac{k_0^2 n_2^2 K'_m(W)}{W K_m(W)} \right] \cdot \left[ \frac{1}{U} \frac{J'_m(U)}{J_m(U)} + \frac{1}{W} \frac{K'_m(W)}{K_m(W)} \right] = \beta^2 m^2 \left( \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right)^2 \quad (4)$$

特征方程(4)是一个四次超越方程,可进一步将其化简为两个二次超越方程:

$$\frac{2J'_m(U)}{U \cdot J_m(U)} + \left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) \cdot \frac{K'_m(W)}{W \cdot K_m(W)} = \left\{ \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^2 \cdot \left[ \frac{K'_m(W)}{W \cdot K_m(W)} \right]^2 + 4m^2 \left( \frac{1}{U^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{W^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (5a)$$

$$\frac{2J'_m(U)}{U \cdot J_m(U)} + \left(1 + \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) \cdot \frac{K'_m(W)}{W \cdot K_m(W)} = - \left\{ \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right)^2 \cdot \left[ \frac{K'_m(W)}{W \cdot K_m(W)} \right]^2 + 4m^2 \left( \frac{1}{U^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{W^2} \right) \cdot \left( \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \right\}^{1/2} \quad (5b)$$

在特定的 $m$ 值下,根据特征方程(4)或(5)以及 $U$ 、 $W$ 、 $\beta$ 三者之间的关系可求得两个系列的 $U$ 、 $W$ 、 $\beta$ 特征值。将特征值 $U$ 、 $W$ 、 $\beta$ 带入公式(3),即可得到 $E_z$ 沿径向的变化规律,结合 $E_z$ 沿辐角的变化规律及沿轴向的变化规律即可得到 $E_z$ 的空间分布。同样的方法可得到 $H_z$ 的空间分布,进一步的结合 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 的横向分量与纵向分量之间的关系,可得到 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 完整的

空间分布,即矢量模。有些文献给出的二次超越特征方程 (5) 是错误的,这会对矢量模简并问题的理解造成障碍<sup>[10]</sup>。

需要说明的是,当  $m=0$  时,由特征方程 (5a) 求出的系列特征值对应 TE 模,第  $n(n=1, 2, 3, 4\cdots)$  个特征值对应的模式为  $TE_{0n}$  模;由特征方程 (5b) 求出的系列特征值对应于 TM 模,第  $n(n=1, 2, 3, 4\cdots)$  个特征值对应的模式为  $TM_{0n}$  模。但是由特征方程 (5a) 解出的第  $n$  个特征值与特征方程 (5b) 解出的第  $n$  个特征值并不相等,与之相应的  $TE_{0n}$  模的空间分布与  $TM_{0n}$  模的空间分布也不相同,因此,尽管  $TE_{0n}$  模与  $TM_{0n}$  模下标相同却不能简并为一个模式。当  $m>0$  时,由特征方程 (5a) 求出的特征值对应 EH 模,第  $n$  个特征值对应的模式为  $EH_{mn}$  模;由特征方程 (5b) 求出的特征值对应于 HE 模,第  $n$  个特征值对应的模式为  $HE_{mn}$  模。

值得注意的是,根据前文的叙述  $E_z$  和  $H_z$  沿辐角的变化规律有两种情况:  $\sin(m\varphi)$  与  $\cos(m\varphi)$ , ( $m=0, 1, 2, 3\cdots$ )。相应的  $E_z$  和  $H_z$  有两种可能的空间分布,分别称为  $o$  态与  $e$  态:

$o$  态

$$E_z = A \exp(-j\beta z) \sin(m\varphi) \cdot \begin{cases} \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} & 0 \leq r \leq a \\ \frac{K_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} & r \geq a \end{cases} \quad (6a)$$

$$H_z = B \exp(-j\beta z) \cos(m\varphi) \cdot \begin{cases} \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} & 0 \leq r \leq a \\ \frac{K_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} & r \geq a \end{cases} \quad (6b)$$

$e$  态

$$E_z = A \exp(-j\beta z) \cos(m\varphi) \cdot \begin{cases} \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} & 0 \leq r \leq a \\ \frac{K_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} & r \geq a \end{cases} \quad (7a)$$

$$H_z = B \exp(-j\beta z) \sin(m\varphi) \cdot \begin{cases} \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} & 0 \leq r \leq a \\ \frac{K_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} & r \geq a \end{cases} \quad (7b)$$

当  $m>0$  时,特征方程 (5a) 解出的第  $n$  个特征值对应于  $EH_{mn}$  模,对比公式 (6) 和 (7) 给出的  $o$  态和  $e$  态这两种情况,  $E_z$  和  $H_z$  的两种空间分布沿径向的变化规律完全相同、纵向传播常数完全相同,沿辐角的变化相似,仅相差一个角度  $\pi/2m$ ,因此,可以认为这两种空间分布是同一种模式,即  $EH_{mn}$  模都是 2 度简并的。同理,由特征方程 (5b) 确定的  $HE_{mn}$  模也是 2 度简并的。当  $m=0$  时,特征方程 (5a) 解出的第  $n$  个特征值对应于  $TE_{0n}$  模,而  $TE_{0n}$  模的  $E_z=0$ ,只存在公式 (6) 描述的  $o$  态这一种情况,因此  $TE_{0n}$  模的简并度为 1;特征方程 (5b) 解出的第  $n$  个特征值对应于  $TM_{0n}$  模,  $TM_{0n}$  模的  $H_z=0$ ,只存在公式 (7) 描述的  $e$  态这一种情况,故  $TM_{0n}$  模的简并度为 1。此外,对比公式 (6) 和 (7) 不难发现,  $TE_{0n}$  模与  $TM_{0n}$  模的空间分布完全不同,这从另一个角度说明了  $TE_{0n}$  模与  $TM_{0n}$  模不能简并为一个模式。

矢量模的电场强度矢量  $\vec{E}$  和磁场强度矢量  $\vec{H}$  的横向分量和纵向分量之间的关系如公式 (8) 所示:

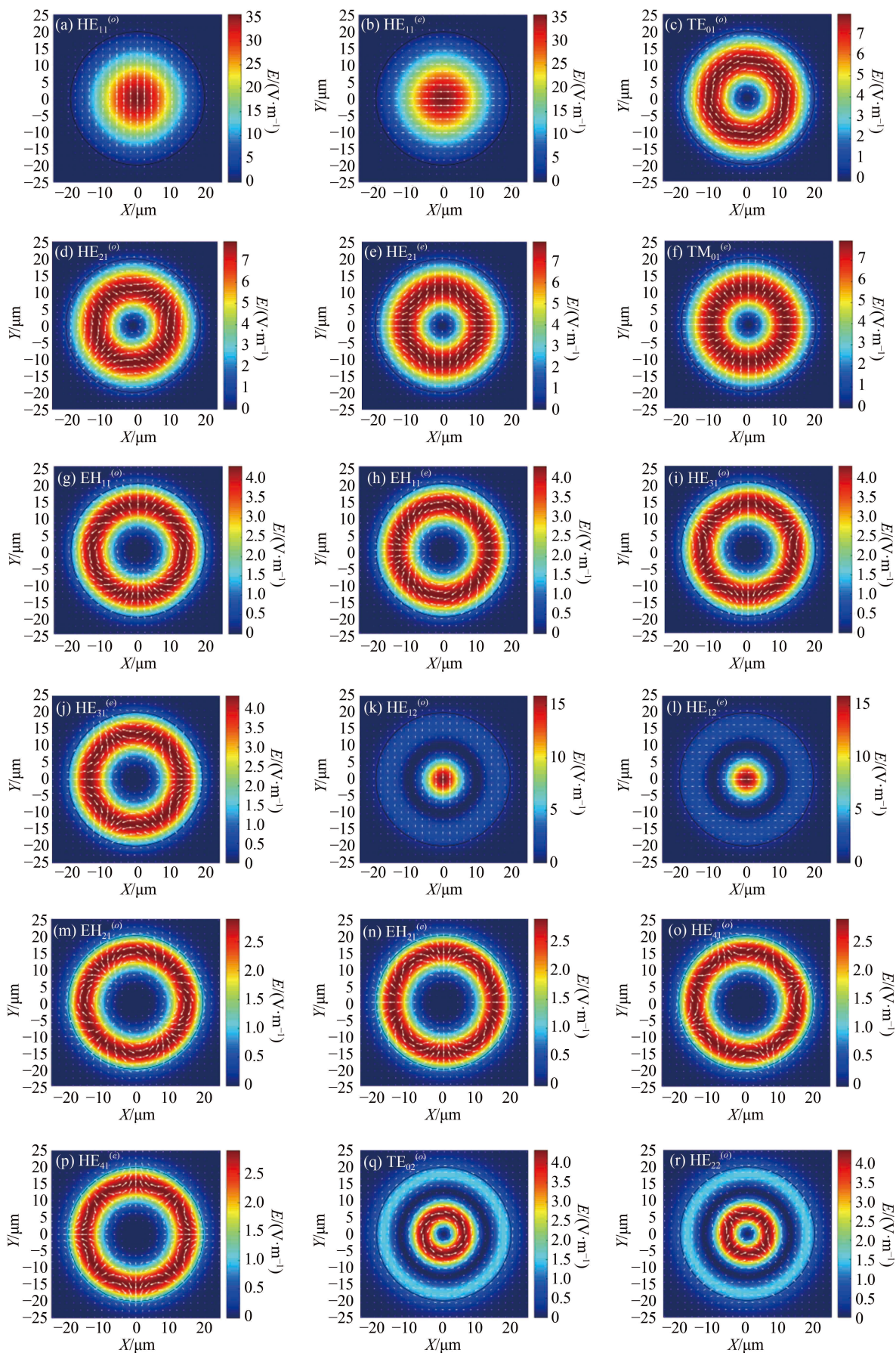
$$\chi^2 E_r = -j \left( \omega \mu_0 \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + \beta \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) \quad (8a)$$

$$\chi^2 E_\varphi = -j \left( -\omega \mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} + \beta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \right) \quad (8b)$$

$$\chi^2 H_r = -j \left( -\omega \varepsilon \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \quad (8c)$$

$$\chi^2 H_\varphi = -j \left( \omega \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial r} + \beta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} \right) \quad (8d)$$

式中:  $\chi$  为横向传播常数,在纤芯中  $\chi$  为  $U/a$ ,在包层中  $\chi$  为  $jW/a$ ;  $\mu_0$  为真空中的磁导率。根据公式 (5)~(8) 求得典型阶跃折射率光纤中的模场强度如图 2 所示,图中白色箭头表示电场矢量。图 2 中展示的光纤的纤芯半径为  $20 \mu\text{m}$ ,激光波长  $\lambda$  为  $1\ 064.2 \text{ nm}$ ,纤芯折射率  $n_1$  为  $1.451\ 5$ ,包层的折射率  $n_2$  为  $1.450\ 3$ ,满足弱导条件,数值孔径  $NA$  为  $0.059\ 01$ ,归一化截止频率  $V$  为  $6.9681$ ,能够支持 14 个模式。



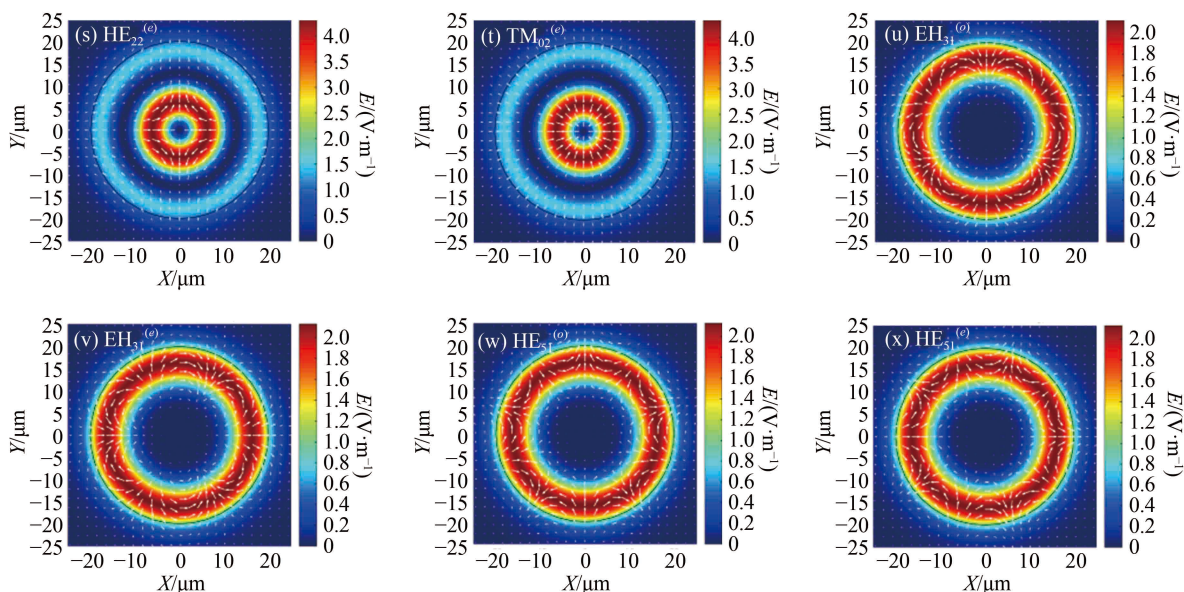


图 2 典型阶跃折射率光纤中的矢量模强度分布

Fig.2 Vector mode intensity distribution in the classic step index fiber

结合图 2, 可以直观的看出,  $TE_{0n}$  与  $TM_{0n}$  模、 $HE_{mn}$  与  $EH_{mn}$  模虽然具有相同的标号, 但是它们的模场分布是完全不同的, 因此不能简并为一个模式。 $EH_{mn}$  模、 $HE_{mn}$  模均存在  $o$  态和  $e$  态这两种情况, 而且这两种情况的模场分布基本相同, 仅仅相差辐角  $\pi/2m$ , 因此  $EH_{mn}$  模、 $HE_{mn}$  模均为二度简并的。 $TE_{0n}$  模仅有  $o$  态这一种情况,  $TM_{0n}$  模仅有  $e$  态这一种情况, 因此  $TE_{0n}$  模、 $TM_{0n}$  模是一度简并的。

### 3 标量模的简并问题

标量法是建立在弱导光纤基础上的, 即  $n_1 \sim n_2$ , 认为光纤截面上光场的偏振方向都是一致的。当光场的偏振方向沿  $y$  方向时,  $E_x=0$ , 将  $E_y(r, \varphi, z)$  分离坐标变量后写为:

$$E_y(r, \varphi, z) = A \cdot R(r) \cdot \Phi(\varphi) \cdot e^{-\beta z} \quad (9)$$

与矢量法的求解过程相似, 求得  $E_y(r, \varphi, z)$  两种可能的空间分布, 分别称为  $yo$  态和  $ye$  态。

$yo$  态

$$E_y(r, \varphi, z) = A \exp(-j\beta z) \sin(m\varphi) \cdot \begin{cases} \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} & 0 \leq r \leq a \\ \frac{K_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} & r \geq a \end{cases} \quad (10)$$

$ye$  态

$$E_y(r, \varphi, z) = A \exp(-j\beta z) \cos(m\varphi) \cdot \begin{cases} \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} & 0 \leq r \leq a \\ \frac{K_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} & r \geq a \end{cases} \quad (11)$$

进一步利用光场在纤芯与包层的边界上的连续条件, 得到特征方程为:

$$\frac{U \cdot J'_m(U)}{J_m(U)} = \frac{W \cdot K'_m(W)}{K_m(W)} \quad (12)$$

标量模的特征方程 (12) 是一个一次超越方程, 比矢量模的特征方程 (4) 简洁得多。在特定的  $m$  值下, 根据特征方程 (12) 以及  $U$ 、 $W$ 、 $\beta$  三者之间的关系可求得若干  $U$ 、 $W$ 、 $\beta$  的特征值。将特征值  $U$ 、 $W$ 、 $\beta$  带入公式 (10) 或 (11), 即可得到  $E_y$  的空间分布, 进一步的结合  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  各方向分量之间的公式 (13), 可得到  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  完整的空间分布, 即标量模。其中第  $n(n=1, 2, 3, 4, \dots)$  个特征值对应的标量模为  $LP_{mn}$  模。

$$E_z = -\frac{j}{\beta} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial y} \quad (13a)$$

$$H_x = -\frac{\omega \epsilon}{\beta} \cdot E_y \quad (13b)$$

$$H_y = 0 \quad (13c)$$

$$H_z = j \frac{\omega \epsilon}{\beta^2} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (13d)$$

在光场偏振方向沿  $y$  方向的情况下, 当  $m \neq 0$  时,

LP<sub>mn</sub> 模均存在 yo 态和 ye 态这两种情形,对比公式 (10) 和 (11), 在这两种情形下, E<sub>y</sub> 沿径向的变化规律完全相同、纵向传播常数完全相同, 沿辐角的变化相似, 仅相差一个角度 π/2m, 因此, 可以认为 yo 态和 ye 态是同一种模式; 当 m=0 时, LP<sub>mn</sub> 模只存在 ye 态这一种情形。

当光纤中的光场偏振方向沿 x 方向时, E<sub>y</sub>=0, E<sub>x</sub>(r, φ, z) 同样存在两种可能的空间分布, 分别称为 xo 态和 xe 态。

xo 态

$$E_x(r, \varphi, z) = A \exp(-j\beta z) \sin(m\varphi) \cdot \begin{cases} \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} & 0 \leq r \leq a \\ \frac{K_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} & r \geq a \end{cases} \quad (14)$$

xe 态

$$E_x(r, \varphi, z) = A \exp(-j\beta z) \cos(m\varphi) \cdot \begin{cases} \frac{J_m(\frac{U}{a}r)}{J_m(U)} & 0 \leq r \leq a \\ \frac{K_m(\frac{W}{a}r)}{K_m(W)} & r \geq a \end{cases} \quad (15)$$

利用光场在纤芯与包层边界上的连续条件得到的特征方程亦为公式 (12), 根据特征方程 (12) 以及 U、W、β 三者之间的关系可求得若干 U、W、β 的特征值, 根据公式 (14) 或 (15), 即可得到 E<sub>x</sub> 的空间分布, 进一步的结合  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  各方向分量之间的公式 (16), 可得到  $\vec{E}$  和  $\vec{H}$  完整的空间分布:

$$E_z = -\frac{j}{\beta} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} \quad (16a)$$

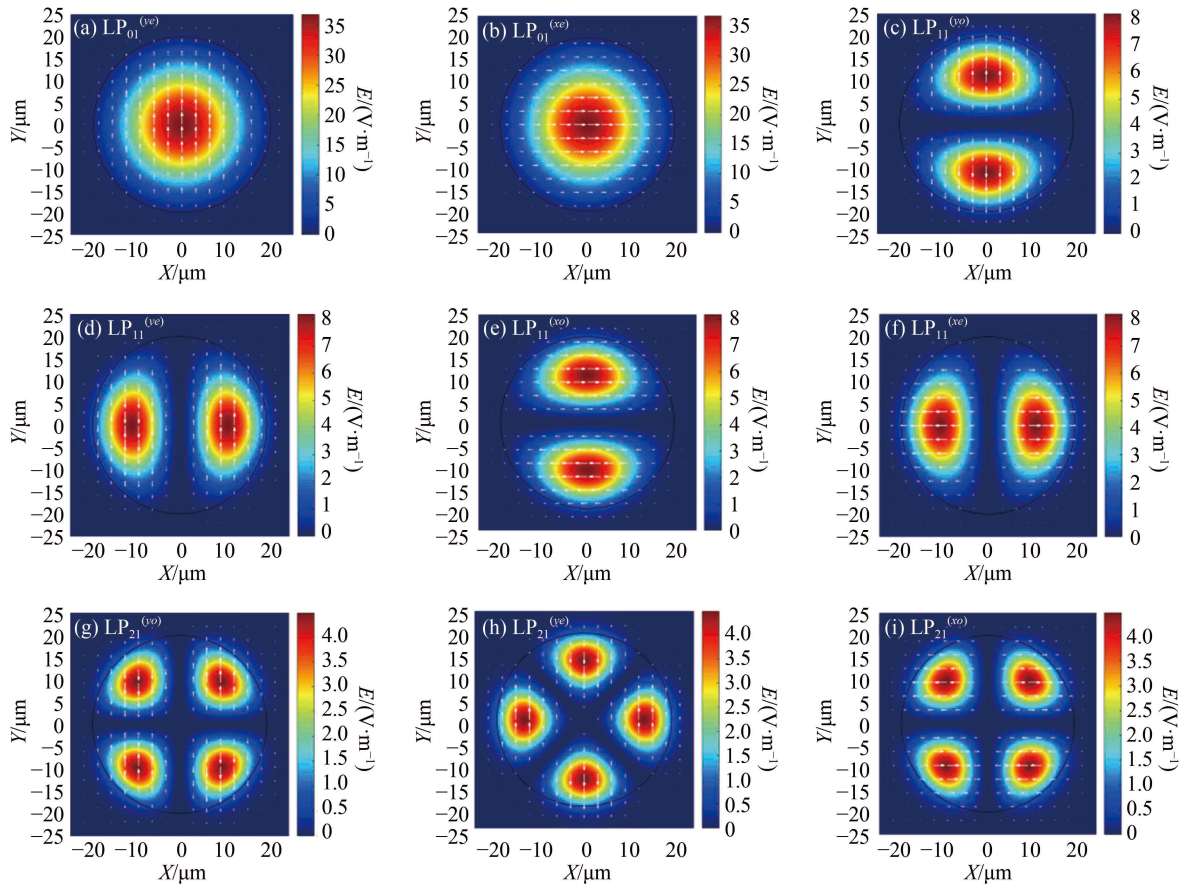
$$H_x = 0 \quad (16b)$$

$$H_y = \frac{\omega \varepsilon}{\beta} \cdot E_x \quad (16c)$$

$$H_z = -j \frac{\omega \varepsilon}{\beta^2} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (16d)$$

同样, 在光场偏振方向沿 x 方向的情况下, 当 m≠0 时, LP<sub>mn</sub> 模均存在 xo 态和 xe 态这两种情形; 当 m=0 时, LP<sub>mn</sub> 模只存在 xe 态这一种情形。

作为示例, 图 3 展示了光纤中的线偏振模, 图中白色箭头表示电场矢量。光纤纤芯半径为 20 μm, 激光波长 λ 为 1 064.2 nm, 纤芯折射率 n<sub>1</sub> 为 1.451 5, 包



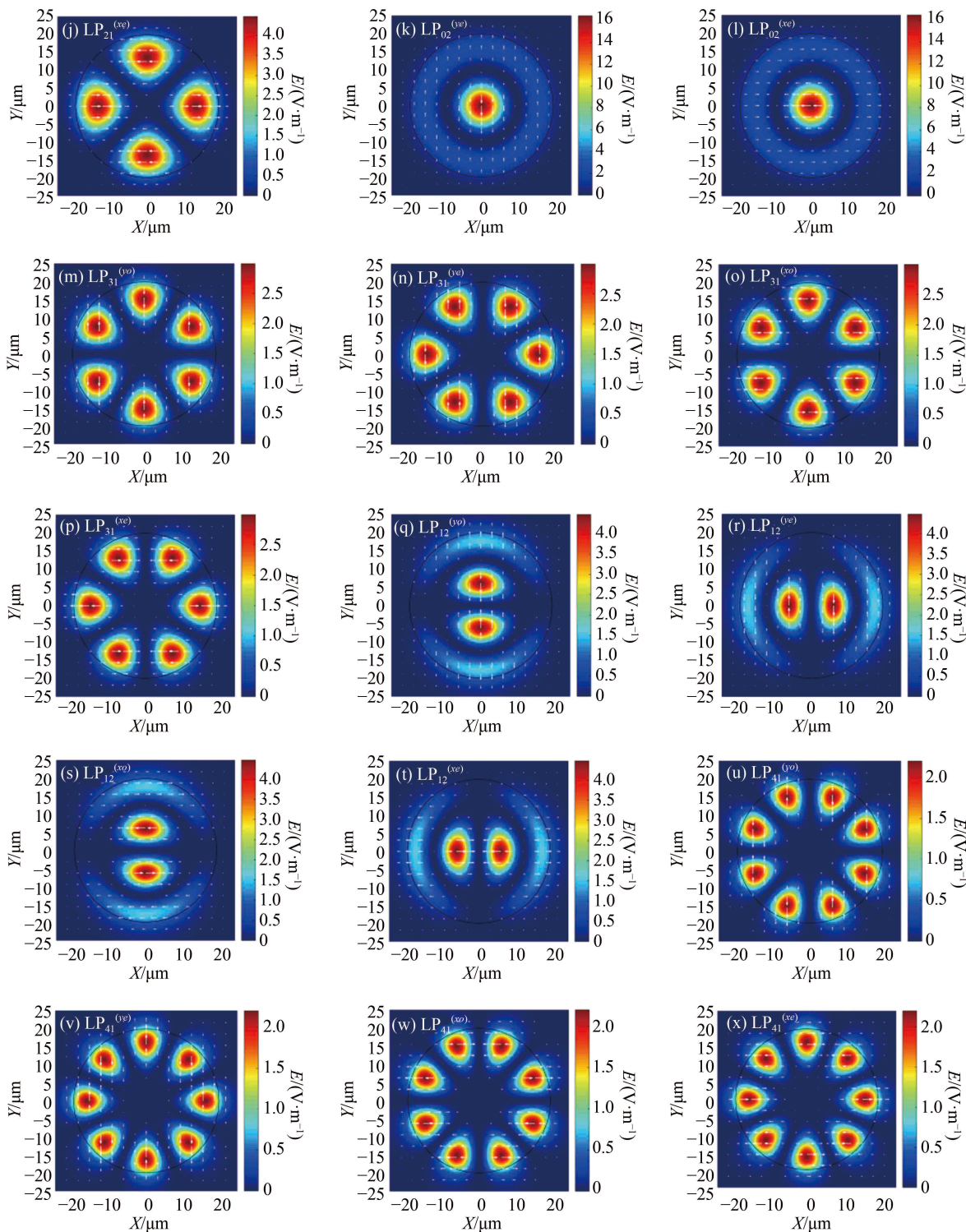


图 3 典型阶跃折射率光纤中的标量模强度分布

Fig.3 Linearly polarized mode intensity distribution in the classic step index fiber

层的折射率  $n_2$  为 1.450 3, 满足弱导条件, 数值孔径 NA 为 0.059 01, 归一化截止频率  $V$  为 6.968 1, 能够支持 14 个模式。

结合图 3 可以直观的看出, 当  $m \neq 0$  时,  $LP_{mn}$  模存

在  $yo$  态、 $ye$  态、 $xo$  态、 $xe$  态这四种情况, 它们的模场分布基本相同, 此时  $LP_{mn}$  模是四度简并的, 当  $m=0$  时,  $LP_{mn}$  模只存在  $ye$  态、 $xe$  态这两种情况, 此时  $LP_{mn}$  模是二度简并的。



### 4 矢量模与标量模的简并关系

在弱导阶跃折射率光纤中,光场既可以用矢量模描述也可以用标量模描述。要理清这两种描述方法的内在联系就需要先阐明矢量模和标量模之间的简并关系<sup>[29]</sup>。

事实上,TE<sub>0n</sub>模、TM<sub>0n</sub>模与LP<sub>1n</sub>模的纵向传播常数β是相同的。当m=0时,由矢量模的特征方程(4)得到描述TE<sub>0n</sub>模、TM<sub>0n</sub>模纵向传播常数的特征方程,如公式(17a)所示:

$$\left[ \frac{1}{U} \frac{J'_0(U)}{J_0(U)} + \frac{1}{W} \frac{K'_0(W)}{K_0(W)} \right] \left[ \frac{n_1^2}{U} \frac{J'_0(U)}{J_0(U)} + \frac{n_2^2}{W} \frac{K'_0(W)}{K_0(W)} \right] = 0 \quad (17a)$$

考虑到弱导近似,即n<sub>1</sub>~n<sub>2</sub>,上式化简为:

$$\frac{1}{U} \frac{J'_0(U)}{J_0(U)} + \frac{1}{W} \frac{K'_0(W)}{K_0(W)} = 0 \quad (17b)$$

根据贝塞尔函数的性质:

$$vJ_v + xJ'_v = xJ_{v-1} \quad (18a)$$

$$-vJ_v + xJ'_v = -xJ_{v+1} \quad (18b)$$

$$vK_v + xK'_v = -xK_{v-1} \quad (18c)$$

$$-vK_v + xK'_v = -xK_{v+1} \quad (18d)$$

公式(17b)可进一步化简为:

$$\frac{-J_1(U)}{J_1(U) + U \cdot J'_1(U)} + \frac{K_1(W)}{K_1(W) + W \cdot K'_1(W)} = 0 \quad (17c)$$

$$\frac{J_1(U) + U \cdot J'_1(U)}{J_1(U)} = \frac{K_1(W) + W \cdot K'_1(W)}{K_1(W)} \quad (17d)$$

$$\frac{U \cdot J'_1(U)}{J_1(U)} = \frac{W \cdot K'_1(W)}{K_1(W)} \quad (17e)$$

对比发现,公式(17e)与当m=1的标量模特征方程(12)是完全相同,也就是说,在弱导近似下,TE<sub>0n</sub>模、TM<sub>0n</sub>模的纵向传播常数与LP<sub>1n</sub>模的纵向传播常数是完全相同的。

事实上,当m>1时,EH<sub>m-1,n</sub>模与LP<sub>mn</sub>模的纵向传播常数β是相同的。EH<sub>m-1,n</sub>模的特征方程(5a)式在弱导近似下可化为:

$$\frac{J'_{m-1}(U)}{U \cdot J_{m-1}(U)} + \frac{K'_{m-1}(W)}{W \cdot K_{m-1}(W)} = (m-1) \left( \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (19a)$$

根据贝塞尔函数的性质公式(18),上式可化为:

$$\frac{\left[ \frac{(m-1) \cdot m}{U^2} - 1 \right] \cdot J_m(U) + \frac{m-1}{U} \cdot J'_m(U)}{m \cdot J_m(U) + U \cdot J'_m(U)} + \frac{\left[ \frac{(m-1) \cdot m}{W^2} + 1 \right] \cdot K_m(W) + \frac{m-1}{W} \cdot K'_m(W)}{m \cdot K_m(W) + W \cdot K'_m(W)} = (m-1) \left( \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (19b)$$

$$\frac{m-1}{U^2} - \frac{J_m(U)}{m \cdot J_m(U) + U \cdot J'_m(U)} + \frac{m-1}{W^2} + \frac{K_m(W)}{m \cdot K_m(W) + W \cdot K'_m(W)} = (m-1) \left( \frac{1}{U^2} + \frac{1}{W^2} \right) \quad (19c)$$

$$\frac{J_m(U)}{m \cdot J_m(U) + U \cdot J'_m(U)} = \frac{K_m(W)}{m \cdot K_m(W) + W \cdot K'_m(W)} \quad (19d)$$

$$\frac{U \cdot J'_m(U)}{J_m(U)} = \frac{W \cdot K'_m(W)}{K_m(W)} \quad (19e)$$

得到了LP<sub>mn</sub>模的特征方程。完全类似的方法可以证明,当m≥0时,HE<sub>m+1,n</sub>模与LP<sub>mn</sub>模的纵向传播常数β是相同的。图2描述的矢量模与图3描述的标量模的纵向传播常数的对比如表1所示。

表 1 矢量模纵向传播常数与标量模纵向传播常数的对比

Tab.1 Propagation constants of vector modes and linearly polarized modes

| Vector modes | β/m <sup>-1</sup> | Linearly polarized modes | β/m <sup>-1</sup> |
|--------------|-------------------|--------------------------|-------------------|
| HE11         | 8 569 293         | LP01                     | 8 569 293         |
| TE01         | 8 568 310         | LP11                     | 8568310           |
| HE21         | 8 568 310         |                          |                   |
| TM01         | 8 568 310         |                          |                   |
| EH11         | 8 567 033         | LP21                     | 8 567 039         |
| HE31         | 8 567 033         |                          |                   |
| HE12         | 8 566 606         | LP02                     | 8 566 608         |
| EH21         | 8 565 493         | LP31                     | 8 565 502         |
| HE41         | 8 565 493         |                          |                   |
| TE02         | 8 564 673         | LP12                     | 8 564 687         |
| HE22         | 8 564 672         |                          |                   |
| TM02         | 8 564 672         |                          |                   |
| EH31         | 856 3724          | LP41                     | 8 563 745         |
| HE51         | 8 563 723         |                          |                   |

从表1中也可以看出,在弱导近似下,TE<sub>0n</sub>模、

TM<sub>0n</sub> 模与 LP<sub>1n</sub> 模的纵向传播常数近似相等, EH<sub>m-1, n</sub> 模与 LP<sub>mn</sub> 模的纵向传播常数近似相等, HE<sub>m+1, n</sub> 模与 LP<sub>mn</sub> 模的纵向传播常数近似相等。矢量模与标量模的纵向传播常数相同, 意味着矢量模与标量模沿着光纤轴向的传输行为相同, 在纤芯中横向的振荡形式相同, 在包层中横向衰减的趋势相同。或者说, 在弱导阶跃折射率光纤中, 矢量模和标量模存在着深层次的内在联系。根据公式 (1)~(8) 可以求得矢量模 *o* 态和 *e* 态完整的电磁场分布, 根据公式 (9)~(16) 可以求得标量模 *yo* 态、*ye* 态、*xo* 态和 *xe* 态完整的场分布, 对比二者的场分布表达式, 在能量归一条件下, 可以推导出不同 *m* 值下标量模和矢量模之间的组合关系, 如公式 (20) 所示:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{HE}_{1n}^{(o)} \\ \text{HE}_{1n}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{LP}_{0n}^{(ye)} \\ \text{LP}_{0n}^{(xe)} \end{bmatrix} \quad (20a)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{TE}_{0n} \\ \text{HE}_{2n}^{(o)} \\ \text{HE}_{2n}^{(e)} \\ \text{TM}_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{LP}_{1n}^{(yo)} \\ \text{LP}_{1n}^{(ye)} \\ \text{LP}_{1n}^{(xo)} \\ \text{LP}_{1n}^{(xe)} \end{bmatrix} \quad (20b)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{EH}_{m-1, n}^{(o)} \\ \text{EH}_{m-1, n}^{(e)} \\ \text{HE}_{m+1, n}^{(o)} \\ \text{HE}_{m+1, n}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{LP}_{mn}^{(yo)} \\ \text{LP}_{mn}^{(ye)} \\ \text{LP}_{mn}^{(xo)} \\ \text{LP}_{mn}^{(xe)} \end{bmatrix} \quad (20c)$$

公式 (20) 揭示了弱导光纤中矢量模与标量模之间的简并关系, 即: HE<sub>1n</sub><sup>(o)</sup> 的场分布与 LP<sub>0n</sub><sup>(ye)</sup> 相同, HE<sub>1n</sub><sup>(e)</sup> 的场分布与 LP<sub>0n</sub><sup>(xe)</sup> 相同, 如公式 (20a) 所示; LP<sub>1n</sub><sup>(yo)</sup> 模、LP<sub>1n</sub><sup>(xe)</sup> 模是 HE<sub>2n</sub><sup>(e)</sup> 模和 TM<sub>0n</sub> 模的线性叠加, LP<sub>1n</sub><sup>(ye)</sup> 模、LP<sub>1n</sub><sup>(xo)</sup> 模是 TE<sub>0n</sub> 模和 HE<sub>2n</sub><sup>(o)</sup> 模的线性叠加, 如公式 (20b) 所示; 当 *m*>1 时, LP<sub>mn</sub><sup>(yo)</sup> 模、LP<sub>mn</sub><sup>(xe)</sup> 模是 EH<sub>m-1, n</sub><sup>(e)</sup> 模和 HE<sub>m+1, n</sub><sup>(e)</sup> 的线性叠加, LP<sub>mn</sub><sup>(ye)</sup> 模、LP<sub>mn</sub><sup>(xo)</sup> 模是 EH<sub>m-1, n</sub><sup>(o)</sup> 模和 HE<sub>m+1, n</sub><sup>(o)</sup> 模的线性叠加, 如公式 (20c) 所示。或者说, 矢量模可以表示成为标量模的线性组合, 标量模也可以表示成为矢量模的线性组合。图 2 描述的矢量模场分布和图 3 描述的标量模场分布也印证了公式 (20) 描述的简并关系。限于篇幅, 在此不对公式 (20) 作详细的证明。

## 5 结 论

在阶跃折射率光纤中, 光场可以采用矢量模描

述, TE<sub>0n</sub> 与 TM<sub>0n</sub> 模、EH<sub>mn</sub> 与 HE<sub>mn</sub> 模的纵向传播常数 β 不同, 模场分布相差很大, 因而 TE<sub>0n</sub> 与 TM<sub>0n</sub> 模、EH<sub>mn</sub> 与 HE<sub>mn</sub> 模不能简并为一个模式; EH<sub>mn</sub> 模、HE<sub>mn</sub> 模均存在 *o* 态和 *e* 态这两种情况, 而且这两种情况的模场分布角向旋转相同, 旋转角度为 π/2*m*, 因而 EH<sub>mn</sub> 模、HE<sub>mn</sub> 模均为二度简并的; TE<sub>0n</sub> 模仅有 *o* 态这一种情况, TM<sub>0n</sub> 模仅有 *e* 态这一种情况, 因而 TE<sub>0n</sub> 模、TM<sub>0n</sub> 模是一度简并的。

当阶跃折射率光纤纤芯折射率与包层折射率相近、满足弱导条件时, 在光纤截面上光场的偏振方向可以是一致的, 可以用标量模描述; 当 *m*>0 时, LP<sub>mn</sub> 模存在 *yo* 态、*ye* 态、*xo* 态、*xe* 态这四种情况, 而且这四种情况的模场强度分布旋转相同、偏振方向相同或正交, 因而, 当 *m*>0 时, LP<sub>mn</sub> 模是四度简并的; LP<sub>0n</sub> 模只存在 *ye* 态、*xe* 态这两种情况, 而且这两种情况的模场强度分布相同, 偏振方向正交, 因而 LP<sub>0n</sub> 模是二度简并的。

在弱导阶跃折射率光纤中, 光场既可以用矢量模描述也可以用标量模描述, 矢量模和标量模都是描述光场的正交完备基; 弱导阶跃折射率光纤中的光场既可以表示为矢量模的线性组合, 也可以表示为标量模的线性组合; 矢量模 [HE<sub>1n</sub><sup>(o)</sup>、HE<sub>1n</sub><sup>(e)</sup>] 与标量模 [LP<sub>0n</sub><sup>(ye)</sup>、LP<sub>0n</sub><sup>(xe)</sup>] 的纵向传播常数 β 是近似相同的, 这两组正交完备基可以互相表示为对方的线性组合, 即光场模式可以由两个独立变量表示, 因此可以看作 2 维光场空间; 同理, 矢量模 [TE<sub>0n</sub>、HE<sub>2n</sub><sup>(o)</sup>、HE<sub>2n</sub><sup>(e)</sup>、TM<sub>0n</sub>] 与标量模 [LP<sub>1n</sub><sup>(yo)</sup>、LP<sub>1n</sub><sup>(ye)</sup>、LP<sub>1n</sub><sup>(xo)</sup>、LP<sub>1n</sub><sup>(xe)</sup>] 的纵向传播常数 β 是近似相同的, 这两组正交完备基描述的光场空间是 4 维的; 当 *m*≥2 时, 矢量模 [EH<sub>m-1, n</sub><sup>(o)</sup>、EH<sub>m-1, n</sub><sup>(e)</sup>、HE<sub>m+1, n</sub><sup>(o)</sup>、HE<sub>m+1, n</sub><sup>(e)</sup>] 与标量模 [LP<sub>mn</sub><sup>(yo)</sup>、LP<sub>mn</sub><sup>(ye)</sup>、LP<sub>mn</sub><sup>(xo)</sup>、LP<sub>mn</sub><sup>(xe)</sup>] 的纵向传播常数 β 是近似相同的, 这两组正交完备基描述的光场空间是 4 维的。

## 参考文献:

- [1] Gloge D. Weakly guiding fibers [J]. *Applied Optics*, 1971, 10(10): 2252-2258.
  - [2] Liao Suying, Gong Mali. New progress of large mode area fibers [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2011, 40(3): 85-92. (in Chinese)
- 廖素英, 巩马理. 大模场光纤研究的新进展[J]. 红外与激光工

- 程, 2011, 40(3): 85–92.
- [3] Zhang Dayong, Fu Yuqing, Feng Guoying, et al. Characteristics of laser modes in step index fiber [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2008, 37(S3): 82–86. (in Chinese)  
张大勇, 傅玉青, 冯国英, 等. 阶跃折射率光纤中的激光模式特性[J]. *红外与激光工程*, 2008, 37(S3): 82–86.
- [4] John Crisp. Introduction to Fiber Optics[M]. 2nd ed. London: Biddles Ltd, 2001.
- [5] Michael Bass, Eric W. Van Stryland. Fiber Optics Handbook[M]. New York: McGraw-Hill Companies Inc, 2002.
- [6] Rongqing Hui, Maurice O’Sullivan. Fiber Optic Measurement Techniques[M]. Burlington: Elsevier Academic Press, 2009.
- [7] Fedor Mitschke. Fiber Optics Physics and Technology[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2009.
- [8] Jacques Bures. Guided Optics Optical Fibers and All-fiber Components[M]. Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGA, 2009.
- [9] Dietrich Marcuse. Theory of Dielectric Optical Waveguides[M]. New York: Academic Press Inc, 1974.
- [10] Richard J Black, Langis Gagon. Optical Waveguide Modes Polarization, Coupling, and Symmetry[M]. New York: McGraw-Hill Companies Inc, 2010.
- [11] Liao Yanbiao. Fiber[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000. (in Chinese)  
廖延彪. 光纤光学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
- [12] Liao Yanbiao, Li Min. Fiber Optics[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013. (in Chinese)  
廖延彪, 黎敏. 光纤光学[M]. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2013.
- [13] Liu Deming, Sun Junqiang, Lu Ping, et al. Fiber Optics[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2008. (in Chinese)  
刘德明, 孙军强, 鲁平, 等. 光纤光学[M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 2008.
- [14] Feng Guoying, Zhou Shouhuan, Gao Chunqing. Laser Mode Field and Beam Quality Characterization[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2016. (in Chinese)  
冯国英, 周寿桓, 高春清. 激光模场及光束质量表征[M]. 北京: 国防工业出版社, 2016.
- [15] Ren Guobin, Wang Zhi, Lou Shuqin, et al. Study on mode degeneracy in photonic crystal fibers [J]. *Acta Phy Sin*, 2004, 53: 1856. (in Chinese)  
任国斌, 王智, 娄淑琴, 等. 光子晶体光纤模式的简并特性研究[J]. *物理学报*, 2004, 53: 1856.
- [16] Peng Lu, Anbo Wang, Shay Soker, et al. Adaptive mode control based on a fiber Bragg grating [J]. *Opt Lett*, 2015, 40: 3488–3491.
- [17] Seongjin Hong, Kyoungyeon Choi, Yong Soo Lee, et al. Two-mode fiber with a reduced mode overlap for uncoupled mode-division multiplexing in C+L band [J]. *Curr Opt Photon*, 2018, 2: 233–240.
- [18] Christian Schulze, Robert Brüning, Siegmund Schröter, et al. Mode coupling in few-mode fibers induced by mechanical stress [J]. *J Lightwave Technol*, 2015, 33: 4488–4496.
- [19] Huang Liangjin, Leng Jinyong, Zhou Pu, et al. Adaptive mode control of a few-mode fiber by real-time mode decomposition [J]. *Opt Express*, 2015, 23: 28082–28090.
- [20] Snitzer E, Osterberg H. Observed dielectric waveguide modes in the visible spectrum [J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1961, 51(5): 499–505.
- [21] Ramachandran S, Kristensen P. Optical vortices in fiber [J]. *Nanophotonics*, 2013, 2(5-6): 455–474.
- [22] Kenji Kawano, Tsutomu Kitoh, Introduction to Optical Waveguide Analysis[M]. New York: John Wiley & Sons Inc, 2001.
- [23] Katsunari Okamoto, Fundamentals of Optical Waveguides[M]. 2nd ed. Ibaraki: Okamoto Laboratory Ltd, 2006.