

基于小波变换与压缩感知的脉冲星 TOA 估计

由四海¹, 王宏力¹, 冯 磊¹, 何贻洋¹, 许 强²

(1. 火箭军工程大学 导弹工程学院, 陕西 西安 710025; 2. 青州高新技术研究所, 山东 青州 262500)

摘 要: 脉冲星导航是一种新型的自主式导航。为提高其精度与实时性, 提出一种小波变换与压缩感知结合的脉冲星到达时间(Time of Arrival, TOA)估计的方法。该方法对标准脉冲轮廓使用小波变换构造多级冗余字典, 通过信号恢复算法估计出实际脉冲星的 TOA。该方法的算法复杂度低于传统的 TOA 估计方法, 并且随着脉冲星信号周期内 bin 数量的增加, 算法的实时性越好。该方法改变了传统的先去噪再估计 TOA 的思路, 其可以嵌入到信号去噪的过程中, 还可以和小波去噪的阈值处理并行计算。仿真结果显示文中方法耗时分别为两种传统 TOA 估计方法的 0.87% 和 21.35%, 并且随着数据时长的缩短, 文中方法的 TOA 估计精度的相对优势越发明显。该方法不但可以提高 TOA 估计精度, 而且降低了对数据时长的依赖。

关键词: 导航; TOA 估计; 小波变换; 压缩感知; 多级冗余字典

中图分类号: V448.131; V448.232; TN911.72 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA202049.0226001

Pulsar TOA estimation based on wavelet transform and compressed sensing

You Sihai¹, Wang Hongli¹, Feng Lei¹, He Yiyang¹, Xu Qiang²

(1. College of Missile Engineering, Rocket Force Engineering University, Xi'an 710025, China;
2. Qingzhou High-tech Research Institute, Qingzhou 262500, China)

Abstract: Pulsar navigation is a new type of autonomous navigation. In order to improve its accuracy and real-time, a method of pulsar time of arrival (TOA) estimation combining wavelet transform and compressed sensing was proposed. This method constructed a multi-level redundancy dictionary using wavelet transform for the standard algorithm complexity of this method was lower than the traditional TOA estimation method, and the real-time performance of the algorithm was better as the number of bins in the pulsar signal period increases. This method changed the traditional idea of first denoising and then estimating TOA, which can be embedded in the process of signal denoising, and can be calculated in parallel with the threshold processing of wavelet denoising. The simulation results show that the time consumption of this method is 0.87% and 21.35% of that of the two traditional TOA estimation methods, respectively. And with the shortening of the data duration, the relative advantage of the TOA estimation accuracy of this method is more obvious. This method can not only improve the accuracy of TOA

收稿日期: 2019-10-03; 修订日期: 2019-11-20

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金(61503391); 中国博士后基金(2017M613372)

作者简介: 由四海(1984-), 男, 博士生, 主要从事脉冲星导航方面的研究。Email: yousihai12345@163.com

导师简介: 王宏力(1965-), 男, 教授, 博士, 主要从事天文导航方面的研究。Email: wanghongli19650526@163.com

estimation, but also reduce the dependence on the duration of data.

Key words: navigation; TOA estimation; wavelet transform; compressed sensing; multi-level redundancy dictionary

0 引言

X 射线脉冲星导航是一种新兴的自主导航方式,能为航天器提供时间、位置和速度等信息^[1-4]。其原理是通过探测器得到的脉冲星实际脉冲轮廓与标准轮廓进行对比估计到脉冲星的达时间 (Time of Arrival, TOA),进而可以计算载体当前的位置。这其中的关键技术就是 TOA 的估计,其直接影响导航的定位精度。但是由于脉冲星信号弱和探测器体积的限制,需要长时间的累计及大量的计算才能估计出 TOA,如何在短时间估计出高精度的 TOA 是当前研究的重点。短时间主要从两个方面实现,减少算法复杂度和减少累积时间。

参考文献[5]为减少计算量首次将压缩感知引入到脉冲轮廓恢复中。但是其仅仅恢复出轮廓,并没有为估计 TOA 提供一个新的思路。参考文献[6]提出了基于压缩感知的脉冲星轮廓恢复与 TOA 估计的方法,这个方法主要创新点是列向量匹配算法。这种方法的实时性还需要进一步提高。参考文献[7]提出了一种基于鲁棒的压缩感知技术来恢复脉冲轮廓,并选择 Hadamard 矩阵的前行作为测量矩阵。参考文献[8]对参考文献[7]的方法做出的改进,提出了一种基于观测范围的小尺寸测量矩阵,其可以降低计算量。参考文献[7]、[8]都利用 Hamamard 矩阵构造了测量矩阵,因为这种矩阵元素为 1 或者-1,因此这种方法还是需要大量的计算。为后续表述方便,参考文献[8]方法简称“方法 1”。这种方法的测量矩阵还需要确定。参考文献[9-10]提出双冗余字典的方法,其计算量明显降低,并且随着脉冲星轮廓数据的增大,效果也随之明显。为后续表述方便,该方法简称“方法 2”。并且参考文献[10]在信号恢复中设计提出了同尺度 1 范数的代价函数。相比常用的 2 范数降低了计算量,可以解决因脉冲星流量发生变化时代价函数判断失误的现象。并且 Hadamard 在构造时

要求维数必须为 $2^n \times 2^n$,这对脉冲星信号周期在历元折叠划分 bin 时受到了限制,不能达到分辨率的最优值。

但是由于探测器的面积受到限制,并且脉冲星信号非常弱而且受宇宙噪声的影响,导致恢复的脉冲轮廓有大量的噪声,并且数据的累计时长越短噪声越明显。要想估计出精确的 TOA 必须进行信号降噪。以上研究的均未谈及去噪问题。通常做法是先去噪然后估计 TOA。当前基于小波的脉冲星信号去噪方法已经很成熟^[11]。因为小波变换后不但有频率信息,还有时间信息,并且信号长度减半,可以减少计算量。所以将去噪和 TOA 估计结合起来是可行的。本文提出的将小波变换与压缩感知相结合的方法具体过程为:首先建立基于原始信号小波变换的多尺度冗余字典,将实时的脉冲星信号在多个尺度进行 TOA 估计,并恢复出脉冲轮廓。这种做法可以在小波去噪过程中完成。并且文中构建的测量矩阵可以进一步降低计算量。为了证明所提方法的有效性,和参考文献[8,10]所提方法进行了对比。文中方法简称为“方法 3”。

1 压缩感知

压缩感知的数学模型为^[12]:

$$\hat{a} = \min \|a\|_0 \quad \text{s.t.} \quad y = \Phi x = \Phi \Psi a = \theta a \quad (1)$$

式中: $\|a\|_0$ 代表 a 的 0 范数; y 代表 $M \times 1$ 维的观测向量; x 为未知的 $N \times 1$ 维向量,其可以在基 $\Psi_{N \times N}$ 上表示为 $x = \Psi a$ (如果系数向量的 $K (K \cdot N)$ 个元素, a 是非 0 的,则 x 可以定义为 K 阶稀疏); Φ 表示 $M \times N$ 维测量矩阵; $\theta = \Phi \Psi$ 表示感知矩阵。文中所提的方法基于历元折叠算法。脉冲星信号非常微弱,通常需要累计长时间以提高光子数量,把脉冲的一个周期 P 分成 N_b 个小段,每个小段称为 1 个 bin,然后通过计算把光子的到达时间换算到一个周期 P 的各个 bin 内。每个 bin 中光子的个数就反应了信号的强度。这种算法

就是历元折叠^[2]。压缩感知算法的构建通常可以分为冗余字典、测量矩阵和恢复算法 3 个设计步骤。

2 冗余字典的设计

为减少计算量,文中构建了多级冗余字典。具体方法为:将标准的脉冲轮廓进行多级小波变换,通过标准轮廓和小波变换后的低频系数构建为 m 级冗余字典 $\Psi^j, j \in [0, m]$ 。其中 j 代表冗余字典的级数也对应小波变换的级数。当 $j=0$ 时,表示未作小波变换标准脉冲轮廓,对应的 0 级冗余字典 Ψ^0 为:

$$\Psi^0 = [\Psi_1^0, \Psi_2^0, \dots, \Psi_i^0, \dots, \Psi_N^0] \quad (2)$$

式中: $i \in [1, N]$, N 是脉冲星光子 TOA 信号历元折叠后 1 个周期 bin 的个数。其中 0 级冗余字典 Ψ^0 的各元素 Ψ_i^0 为不同相位的标准轮廓,

$$\Psi_i^0 = s\left(\frac{i \times l_b}{P}\right) \quad (3)$$

式中: $s(\theta), \theta \in [0, 1]$ 代表一个周期为 P 的标准脉冲轮廓函数; l_b 代表历元折叠之后每个 bin 的长度。

当 $j \geq 1$ 时, j 级冗余字典 Ψ^j 为 $N^j \times N^j$ 维矩阵, N^j 代表第 j 级小波变换后低频信号的长度, 也对应

第 j 级冗余字典的维数。 $\Psi_1^j = \text{dec}(\Psi_1^0, j)$, 其中 dec 为小波变换函数, 表示对 Ψ_1^0 进行 j 级小波变换并返回低频信号 Ψ_1^j 。 Ψ_1^j 的第 k 个原子为 Ψ_1^j 第 k 个元素到最后一个元素所构成的向量, 与第一个元素到第 $k-1$ 个元素所构成的向量拼接成的新的向量:

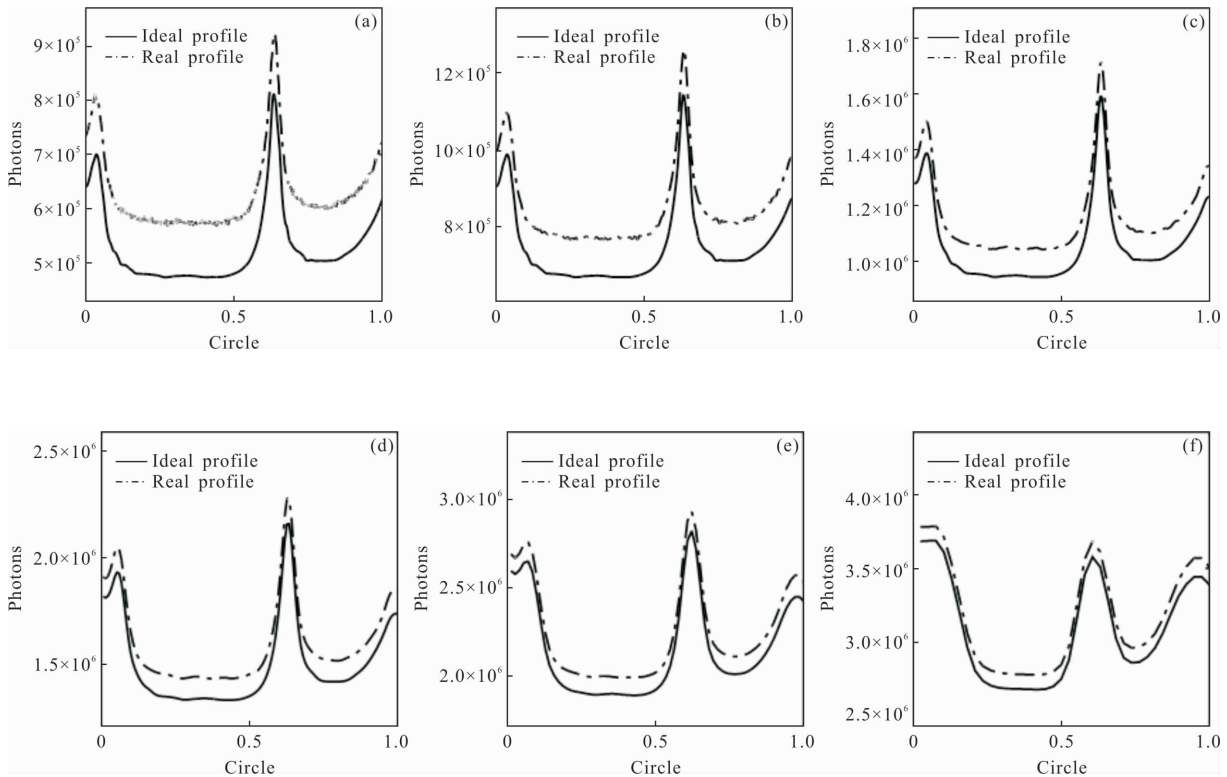
$$\Psi_k^j = [\Psi_1^j(k:\text{end}); \Psi_1^j(1:(k-1))], k \in [1, N^j] \quad (4)$$

式中: $\Psi_1^j(k:\text{end})$ 代表提取 Ψ_1^j 向量中序号为从 k 到最后的元素而生成新的向量。同理 $\Psi_1^j(1:(k-1))$ 代表提取 Ψ_1^j 向量中序号为从 $1 \sim k-1$ 的元素而生成新的向量。

下面通过实验的方法验证多级冗余字典的可行性。标准脉冲轮廓 $s(\theta)$ 和实际的脉冲轮廓 $\bar{s}(\theta)$ 的关系可以表示为:

$$\bar{s}(\theta) = s(\theta) + \varepsilon_s(\theta) \quad (5)$$

式中: $\varepsilon_s(\theta)$ 为信号噪声。为了验证多级冗余字典和实际信号的相关性, 将具有相同相位的标准轮廓和真实轮廓的多级小波分解进行对比, 如图 1 和表 1 所示。表 1 表示每一级小波变换后标准脉冲轮廓和实际含噪脉冲轮廓的相似系数, 子图序号与小波分解



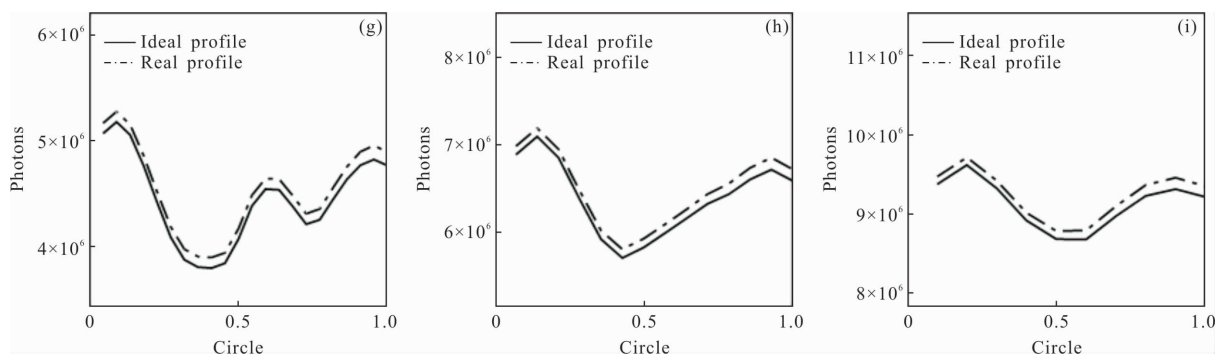


图 1 标准轮廓与时长 580 s 真实轮廓的小波分解对比

Fig.1 Comparison of wavelet decomposition between ideal profile and real profile of 580 s duration

的级数一致,即第 i 个子图对应第 i 级分解。可以看出表 1 显示轮廓与真实轮廓高度相关,绘制的各级小波分解曲线基本重合,不便观察。为了表示清晰,图 1 将真实轮廓向上平移。从图 1 中可以看出标准曲线和实际曲线多级小波变换后的曲线都有一定变化,但是变换后的曲线也非常相似,所以通过小波变换构造多级冗余字典来估计脉冲星 TOA 是可行的。

表 1 相同相位的脉冲星标准轮廓与时长 580 s 真实轮廓的相关系数

Tab.1 Correlation coefficient between ideal profile and real profile of 580 s duration

Fig.1	Subgraph number		Correlation coefficient		
(a)–(e)	9.984e-01	9.991e-01	9.994e-01	9.996e-01	9.997e-01
(f)–(i)	9.998e-01	9.997e-01	9.994e-01	9.981e-01	-

3 测量矩阵的设计

为进一步减少计算量,文中的测量矩阵 Φ 采用随机采样的方法。具体方法为:第 j 级维数为 $N^j \times N^j$ 的冗余字典,采样率为 $\mu^j, \mu^j \in [0, 1]$ 。因为每级的冗余字典的维数是不同的,级数较高的冗余字典对应维数比较低,测量矩阵随机抽取元素对减少计算量的效果就比较弱,并且还容易造成结果的误估计。所以测量矩阵的采样率应该和冗余字典的长度相关,长度越长采样率越低。 μ^j 可以构造为:

$$\mu^j = c_{\mu}^j \mu_L + (1 - c_{\mu}^j) \mu_H \quad (6)$$

式中: $c_{\mu}^j = \frac{(2^j - 1) \times 2^{m-j}}{2^m - 1}$; μ_L 为 $j=m$ 时的采样率; μ_H 为 $j=0$ 时的采样率。

Step 1: 构造向量 $[1:N^j]$,其作用是生成从 $1 \sim N^j$ 的差值为 1 等差数列构成的向量。并将其随机排序得到向量;

$$rs = \text{RandSort}(1:N^j) \quad (7)$$

Step 2: 提取序号为 $1:M$ 的元素构造向量;

$$rms = rs(1:M) \quad (8)$$

Step 3: 构造 Φ 。令 $\Phi(k, rm(k)) = 1, k \in [1, M]$, Φ 的其余元素置零。

Φ 的构造可以在脉冲星轮廓信号采集之前完成,所以不会为轮廓恢复和 TOA 估计增加计算量。

4 脉冲轮廓的恢复算法

第 j 级代价函数为:

$$h^j(\cdot) = \|cA^j - \Psi_i^j\|_2 \quad (9)$$

式中: $\|\cdot\|_2$ 代表 2 范数。假设当 $j=m$ 时,通过 $h^j(\cdot)$ 得到的解为 $\hat{t}_{\text{TOA}}^{\text{MAX}}$,当 $j \in [1:(m-1)]$ 时,搜索区间为 $L = [\hat{t}_{\text{TOA}}^{\text{MAX}} - r, \hat{t}_{\text{TOA}}^{\text{MAX}} + r]$, r 的一个很小的值,其可以通过实验获得。通过代价函数 $h(\cdot)$ 得到解 \hat{t}_{TOA}^j ,最终可以得到未进行小波分解的脉冲星到达时间 \hat{t}_{TOA}^0 。恢复算法的流程如图 2 所示。图中步骤 A 为压缩感知的恢复算法, B 为小波去噪。A 与 B 在硬件支持并行计算的条件下是可以并行处理的,所以整个算法可以在去噪的过程中就完成对 TOA 的估计,也可以说文中

所提的方法可以嵌入到信号去噪过程中。

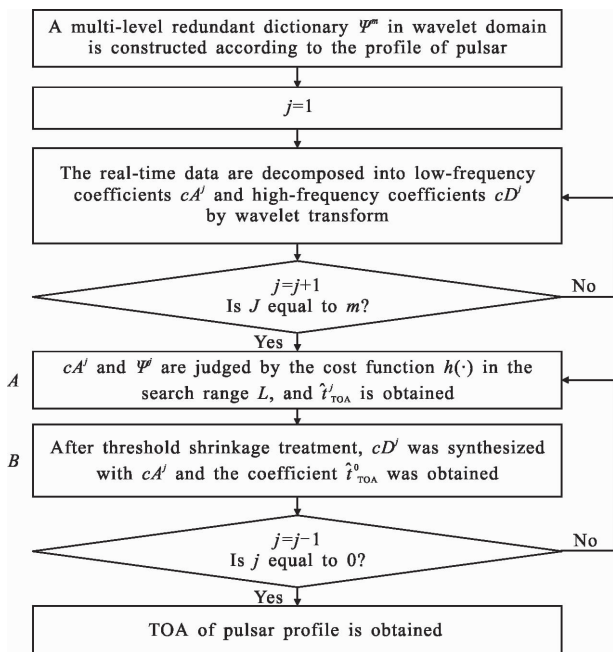


图 2 恢复算法流程

Fig.2 Recovery algorithm flow

5 仿真与讨论

文中的仿真各参数如表 2 所示,为便于叙述,将参考文献[6]所提方法记为方法 1,参考文献[10]所提方法记为方法 2,文中所提方法为方法 3。

表 2 数值仿真各参数

Tab.2 Numerical simulation of parameters

Name	Parameter
Pulsar data source	NASA's RXTE task data
Pulsar	053 1+21
Pulsar period/ms	33.663 8
Operating system	64-bit Win7
Matlab	R2015a
CPU	i5-3210M
RAM/GB	16
Main frequency/GHz	2.3
The number of bins per cycle	2 000
Wavelet decomposition series	9

算法复杂度分析如下。

方法 1 算法复杂度为:

$$O(N \cdot M)$$

方法 2 的方法算法复杂度为:

$$O(2 \times \sqrt{N} \times M) \quad (11)$$

方法 3:假设脉冲星轮廓数据长度为 N 。向一侧搜索的长度设为 l :

$$O\left(\left(\frac{N}{2^n} + 2 \times l \times (n-1)\right) \times M\right) \quad (12)$$

仿真结果如表 3 所示。为减少误差,将程序循环运行 1 000 次然后求平均。从表中可以看出,方法 3 的算法用时分别为方法 1 和方法 2 的 0.87%和 21.35%。3 种方法用时比例基本符合上述算法复杂度分析的比例。

表 3 3 种方法的用时对比

Tab.3 Time comparison of three methods

	Method 1	Method 2	Method 3
Algorithm complexity	$O(2\ 000 \times M)$	$O(90 \times M)$	$O(34 \times M)$
Algorithm time/s	1.56e+01	6.37e-01	1.36e-1

3 种方法的 TOA 估计精度,经仿真统计结果如表 4 所示,从表中可以看出方法 3 的精度要优于方法 1 和方法 2,特别是数据的时长越短优势越明显。

表 4 不同时长数据的 TOA 估计精度(单位:bin)

Tab.4 TOA estimation accuracy of different time

length data (Unit: bin)

Data duration/s	Method 1	Method 2	Method 3
580	0	0	0
480	5	5	0
380	9	9	0
180	15	15	0
80	20	20	0
40	22	22	0
10	22	22	0
5	20	20	0
4	20	20	0
3	22	22	0
2	22	22	0
1	27	27	0

这是由于当数据时长较短时,脉冲星波形有大量噪声,方法 1 和方法 2 在恢复算法过程成没有去

掉噪声的影响。而方法 3 经过小波变换后可以去除噪声的影响。如图 3 所示,时长为 1 s 的信号 X_1 含有大量的噪声,和标准信号 X_i 相比差别很大。当经过多级小波变换后,随着小波级数的增加, X_1 与 X_i 差别越来越小。它们的相关系数如表 5 所示,虽然在图 3(a)和图 3(b)(对应的 1 级分解和 2 级分解)中 X_1 与 X_i 的相关系数比较小,但随着逐级分解,两者的相关系数在 4 级以后可以达到 0.9 以上。进一步验证了相比方法 1 和方法 2,该方法可以在短时去除

噪声的影响,更加准确的估计 TOA。

表 5 标准轮廓与时长 1 s 含噪轮廓的相关系数

Tab.5 Correlation coefficient between ideal profile and duration 1 s noisy profile

Fig.3	Subgraph number		Correlation coefficient		
(a)-(e)	6.228e-01	7.949e-01	8.735e-01	9.183e-01	9.439e-01
(f)-(i)	9.633e-01	9.780e-01	9.750e-01	9.369e-01	-

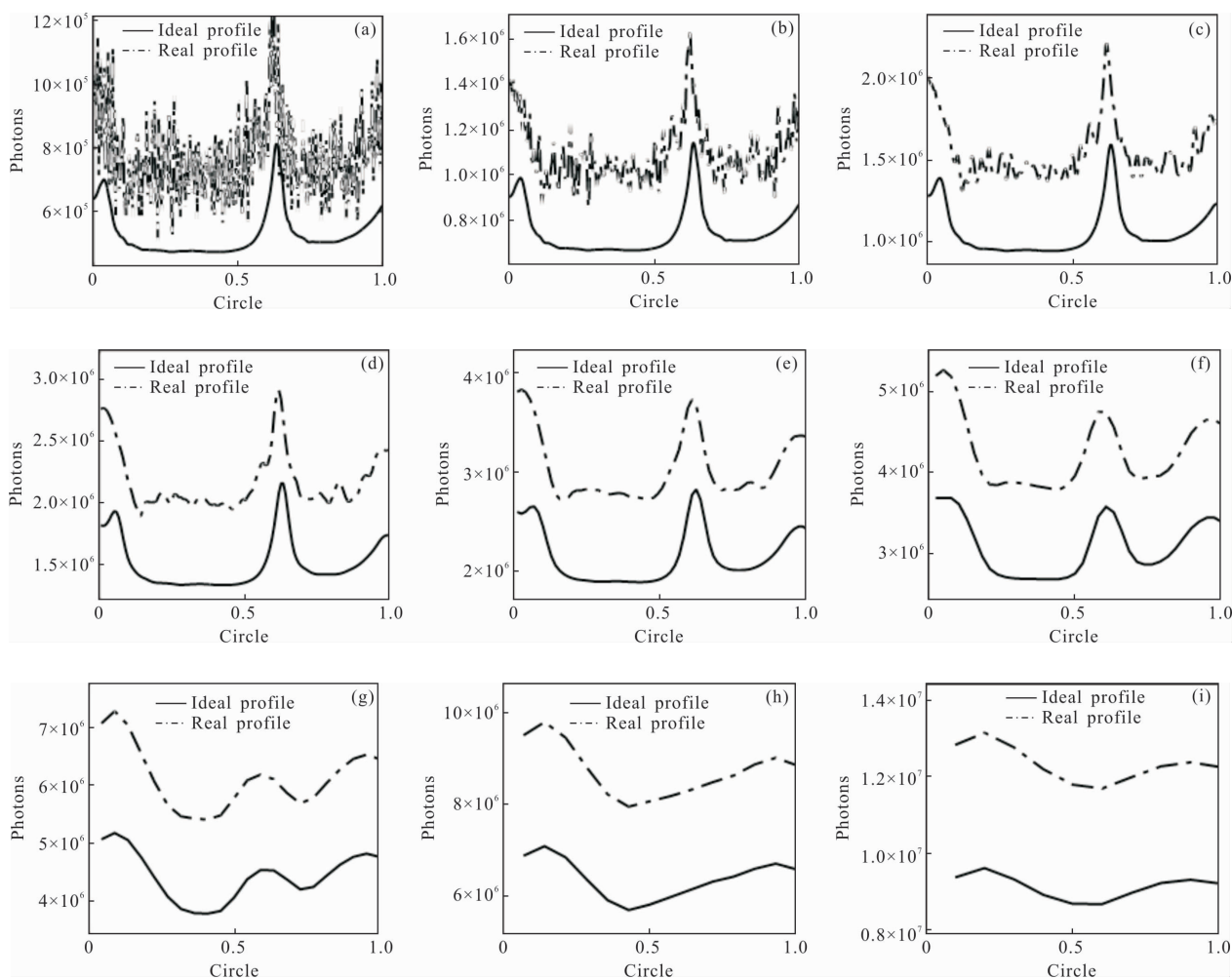


图 3 时长 1 s 的数据与标准信号多级小波变换的对比图

Fig.3 Multi-level wavelet transform comparison of 1 s-data and ideal signal

6 结论

当前需要长时间累积数据是脉冲星导航实时性的一个瓶颈。文中提出了一种基于小波变换和压缩感知方法,相比传统方法可以更快速、更准确地估计

TOA。该方法具有短时数据处理的能力,可以降低对数据长度的要求,进而提高导航的刷新频率。该方法可以嵌入到对脉冲星数据小波去噪过程中,改变了传统了“先去噪后估计 TOA”的做法,进一步提高了算法的实时性。在支持并行计算的平台上,该算法过

程可以和小波去噪的阈值处理过程并行完成,也就是说在小波滤波时不增加额外的计算时间就可以完成 TOA 的估计。

参考文献:

- [1] Xu Q, Wang H, Feng L, et al. A novel X-ray pulsar integrated navigation method for ballistic aircraft [J]. *Optik*, 2018, 175(6): 28–38.
- [2] Sheikh S I, Pines D J, Ray P S, et al. Spacecraft navigation using X-Ray pulsars [J]. *J Guid Control Dyn*, 2006, 29(1): 49–63.
- [3] Chu Yonghui, Li Maodeng, Huang Xiangyu, et al. Autonomous navigation method based on landmark and pulsar measurement [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2015, 44(S): 12–15. (in Chinese)
- [4] Xu Qiang, Wang Hongli, Feng Lei, et al. An improved augmented X-ray pulsar navigation algorithm based on the norm of pulsar direction error [J]. *Adv Sp Res*, 2018, 62(11): 3187–3198.
- [5] Su Zhe, Xu Luping, Gan Wei. Pulsar profile construction algorithm based on compressed sensing [J]. *Sci Sin (Phy, Mech and Astron)*, 2011, 41(5): 681–684.
- [6] Li Shengliang, Liu Kun, Xiao Longlong. Fleet algorithm for X-ray pulsar profile construction and TOA solution based on compressed sensing [J]. *Optik*, 2014, 125(7): 1875–1879.
- [7] Shen Lirong, Li Xiaoping, Sun Haifeng, et al. A robust compressed sensing based method for X-ray Pulsar Profile construction [J]. *Optik*, 2016, 127: 4379–4385.
- [8] Liu Jing, Jian Chengfang, Liu Gang. Observation range-based compressive sensing and its application in TOA estimation with low-flux pulsars [J]. *Optik*, 2017, 148: 256–267.
- [9] Kang Zhiwei, Wu Chunyan, Liu Jin, et al. Pulsar time delay estimation method based on two-level compressed sensing[J]. *Acta Phys Sin*, 2018, 67(9): 1–8. (in Chinese)
- [10] You S, Wang H, He Y, et al. Pulsar profile construction based on double-redundant-dictionary and same-scale L1-norm compressed sensing [J]. *Optik*, 2018, 164: 617–623.
- [11] Liu Xiuping, Wei Yuan, Han Lili, et al. X-ray pulsar signal de-noising for impulse noise using wavelet packet [J]. *Aerosp Sci Technol*, 2017, 64: 147–153.
- [12] Donoho D L. Compressed sensing [J]. *IEEE Trans Inf Theory*, 2006, 52(4): 1289–1306.