

## 基于量子线路逻辑运算的单光子量子态测量方案

王志远, 张子静\*, 赵 远

(哈尔滨工业大学 物理系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

**摘 要:** 在量子探测领域, 关键任务之一就是要对未知量子态进行测量以获取量子态信息。通过将量子计算中的量子门所组成的量子线路应用于量子探测领域, 提出实现单光子未知量子态的测量方案。利用量子计算的叠加性、纠缠性、可纠错性以及量子线路的可集成性, 可以使得探测更具高效性并简化探测的实验系统。利用本文提出的探测新方案, 通过仿真计算对该方案进行了模拟。在该方案的理论计算与仿真模拟结果的基础上, 得到了以下的结论: 通过在不同信噪比等参数的条件下选择适当的测量次数, 基于量子线路的方案可以得到较为精确的测量结果。

**关键词:** 量子探测; 量子门; 量子线路; 符合测量

中图分类号: O431.2 文献标志码: A DOI: 10.3788/IRLA202049.0205002

## Single photon quantum state measurement scheme for quantum circuit logic operation

Wang Zhiyuan, Zhang Zijing\*, Zhao Yuan

(Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract:** In the field of quantum detection, one of the key tasks is to measure the unknown quantum state to obtain quantum state information. By applying the quantum circuit composed of quantum gates in quantum computing to the field of quantum detection, a measurement scheme for realizing the unknown quantum state of single photons was proposed. Utilizing the superposition of quantum computing, entanglement, error correctability, and the integratability of quantum lines, it was possible to make detection more efficient and simplify the experimental system of detection. Using the new detection method proposed in this paper, the scheme was simulated by simulation. Based on the theoretical calculation and simulation results of the scheme, the following conclusions was obtained: by selecting appropriate measurement times under different parameters such as SNR, the quantum line-based scheme can obtain more accurate measurement results.

**Key words:** quantum detection; quantum gate; quantum circuit; conformance measurement

收稿日期: 2019-10-05; 修订日期: 2019-11-25

基金项目: 国家自然科学基金(61701139)

作者简介: 王志远(1996-), 男, 硕士生, 主要从事量子探测方面的研究。Email: 898080007@qq.com

导师简介: 赵远(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 博士, 主要从事微弱信号光电检测、激光雷达等方面的研究。Email: zhaoyuan@hit.edu.cn

通讯作者: 张子静(1986-), 男, 副教授, 硕士生导师, 博士, 主要从事弱光信号检测与激光雷达成像方面的研究。

Email: zhangzijing@hit.edu.cn

## 0 引言

早在 20 世纪 80 年代, 费曼提出了模拟量子系统的理想工具是基于量子逻辑的量子计算机。也正是他的这一想法孕育了物理学中一个非常活跃的研究领域——量子计算。众所周知, 在经典计算中, 利用少量的基本逻辑门, 就可以实现任意复杂的计算。幸运的是, 量子计算也有此性质。具体而言, 在量子线路模型中, 每个作用于一个多量子比特系统的变换, 都可以被分解成一些作用于单个量子比特及两个量子比特的门, 如受控非门(CNOT)<sup>[1-2]</sup>。在此基础上, 人们也已经提出了许多不同的构造量子计算机的方案。例如, 核磁共振量子处理器, 超导隧穿结线路, 光学系统等多个不同的物理系统去进行量子计算。在量子计算的基础上, 可以通过量子计算机来实现量子体系的模拟研究, 来完成经典计算无法完成的工作。在量子模拟方面, 意大利 Casati 教授实现了对量子混沌系统动力学局域化的量子模拟<sup>[3]</sup>。

在量子探测领域, 通常用量子层析的办法去获取未知的量子态信息。该方案最早由 Stokes 在 1852 年提出, 通过实验测定 4 个参数来确定偏振光偏振态的方案, 即后来称之为量子层析技术<sup>[4-5]</sup>。该技术通过测量未知量子态的密度矩阵元来确定量子态。在过去的几十年间, 该技术后来得到了进一步发展, 例如在 1989 年, Vogel 和 Risken 首次设计出了利用光学零差探测法确定量子态密度矩阵的实验<sup>[6-8]</sup>。1999 年, 利用非线性效应中自发参量下转换产生纠缠光子态的量子层析实验得到成功。随着理论的研究深入, 量子层析技术在量子信息、量子探测等领域得到了广泛应用<sup>[9-15]</sup>。

文中将量子计算领域中的量子线路模型应用到量子探测领域, 提出通过用量子线路对未知量子态进行一系列的量子态变换后, 再对量子态测量的一种新方案。利用量子计算的可叠加性、纠缠性及可纠错性, 可以高效的得到最终实验结果。同时利用量子线路的可集成性, 可以使探测过程的实验系统大大得到简化。文章最后在该方案理论上实现了计算机模拟, 并在模拟的基础上得到了一些结论。相信日后通过将量子线路集成化而形成的量子芯片不单单应用于计算领域, 各个领域都会有所涉及。

## 1 基于量子线路实现单光子未知偏振态的测量方案

类似于经典的电子线路, 量子门是构成量子线路的基本单元, 是对输入的量子比特态进行变换, 实现最终结果的一种操作。在用光学系统实现的量子计算中, 通常把单个水平偏振态的光子 $|H\rangle$ 记为 $|0\rangle$ , 把单个垂直偏振态的光子 $|V\rangle$ 记为 $|1\rangle$ 。

根据叠加原理, 未知的单光子的任意偏振态都可以写为:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1)$$

式中: 振幅  $\alpha$  与  $\beta$  为复数, 服从归一化条件 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 。由于在态矢量的定义中存在一个没有物理意义的整体相位, 人们可以选择  $\alpha$  为正定的实数。这样, 一个一般的量子比特态可以写成:

$$|\psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle, \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \phi \leq 2\pi) \quad (2)$$

将该未知的单光子偏振态作为控制比特输入装置  $b$  端,  $a$  端输入一个 $|0\rangle$ 的光子。如图 1 所示, 这两个光子首先进入一个受控非门, 实现量子态的变换, 再经过一个受控相移门, 加入一个人为可调的相位  $\delta$ , 并通过一个与透振方向与水平方向成  $45^\circ$  角的偏振片, 最终分别入射到偏振分束器(PBS)的两端, 并在输出的两端分别用两个探测器接收信号并作符合测量。

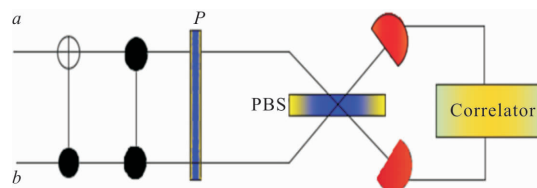


图 1 实现单光子量子态测量的量子线路

Fig.1 Quantum circuit for single-photon quantum state measurement

下面给出该方案详细的理论推导过程。

首先, 输入该装置的两光子系统的初态为:

$$|\psi\rangle_0 = |0\rangle(\cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle) \quad (3)$$

其次, 要经过一个如图 2 所示的受控非门。

根据受控非门的作用, 如果控制比特处于 $|0\rangle$ , 受控非门就不进行任何操作, 如果控制比特处于态 $|2\rangle$ , 受控非门将目标比特翻转。则经过一个受控非门的量子态翻转操作后量子态变为:

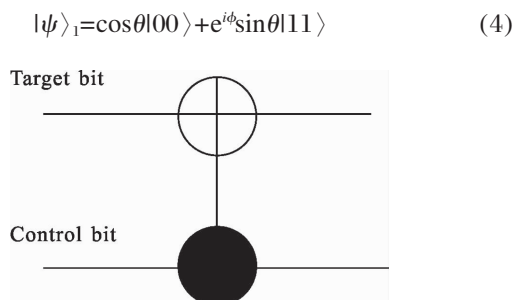


图 2 受控非门示意图

Fig.2 Schematic diagram of controlled non-gate

其次, 又经过一个如图 3 所示的受控相移门根据受控相移门的作用, 只有当控制比特与目标比特都为态 $|1\rangle$ 时, 才对目标比特做一个相位移动, 则经过一个受控相移门的操作, 量子态变为:

$|\psi\rangle_2 = \cos\theta|00\rangle + e^{i(\phi+\delta)}\sin\theta|11\rangle$  (5)

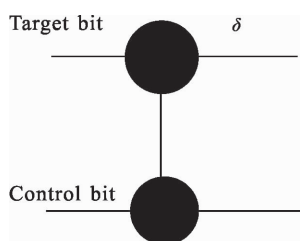


图 3 受控相移门示意图

Fig.3 Schematic diagram of a controlled phase shift gate

这里, 对该态做一个基矢的变换, 得到如下等效的表达式:

$|\psi\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + e^{i(\phi+\delta)}\sin\theta)|\phi^+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta - e^{i(\phi+\delta)}\sin\theta)|\phi^-\rangle$  (6)

其中

$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$  (7)

$|\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$  (8)

$|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$  (9)

$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$  (10)

再经过一个透振方向与水平方向成  $45^\circ$  的偏振片, 对双光子态输入时, 通过把偏振片的琼斯矩阵依次作用在每个光子上即可得到输出的结果。特别的,

当偏振片的透振方向与水平方向成  $45^\circ$  时, 则对以下输入量子态有如下变换:

$P_{\frac{\pi}{4}}|\phi^+\rangle = \frac{1}{2}(|\phi^+\rangle + |\psi^+\rangle)$  (11)

$P_{\frac{\pi}{4}}|\phi^-\rangle = 0$  (12)

$P_{\frac{\pi}{4}}|\psi^+\rangle = \frac{1}{2}(|\phi^+\rangle + |\psi^+\rangle)$  (13)

$P_{\frac{\pi}{4}}|\psi^-\rangle = 0$  (14)

上式结果表明: 偏振片对  $|\phi^-\rangle$  与  $|\psi^-\rangle$  有吸收作用。则经过偏振片后, 这两个光子组成的态变为:

$|\psi\rangle_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos\theta + e^{i(\phi+\delta)}\sin\theta)|\phi^+\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos\theta + e^{i(\phi+\delta)}\sin\theta)|\psi^+\rangle$  (15)

再将该态的两个光子分别输入到 PBS 的两个端面上, 并用两个探测器分别放置在两端并做符合测量。

由 PBS 只让  $|0\rangle$  态完全透射,  $|1\rangle$  态完全反射的性质可知, 仅有当两个光子态同为  $|0\rangle$  态或同为  $|1\rangle$  态时, 两个探测器才会同时被响应(即只有  $|\phi^+\rangle$  态)才会有符合计数脉冲输出。而根据量子力学测量原理知道测量最终的量子态  $|\psi\rangle_3$ , 得到  $|\phi^+\rangle$  态的概率为:

$P = |\langle\phi^+|\psi\rangle_3|^2 = \frac{1}{8}(1 + \sin 2\theta \cos(\delta + \phi))$  (16)

从该公式中可以看出最终符合计数脉冲输出的概率与人为所加的相位  $\delta$ 、未知待测量  $\theta, \phi$  有关, 且该函数为余弦函数。为了得到最终的概率, 要制备  $N$  个水平偏振态的光子与  $N$  个完全相同的待测副本, 并同时输入到该线路中, 记录最终输出的符合脉冲的个数  $n$ 。可以用  $n$  与  $N$  的比值来求得探测概率。可以改变  $\delta$  的值, 得到多组测量概率的值, 该概率值与所加的  $\delta$  值成余弦函数(如图 4 所示)。

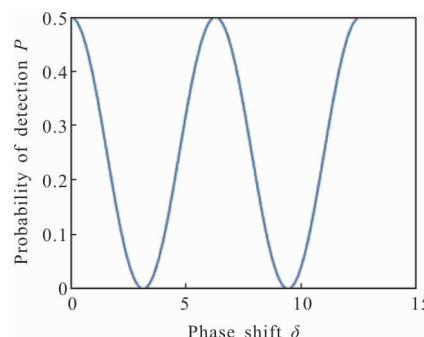


图 4 探测概率随相移变化的曲线图

Fig.4 Graph of detection probability as a function of phase shift

根据图像及其公式可以得知：

$$P_{\max} = \frac{1}{8} (1 + \sin 2\theta) \quad (17)$$

$$P_{\min} = \frac{1}{8} (1 - \sin 2\theta) \quad (18)$$

$$\sin 2\theta = 4(P_{\max} - P_{\min}) \quad (19)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsin 4(P_{\max} - P_{\min}) \quad (20)$$

选择  $\delta$  为 0 时, 得到测量概率为  $P_0$ 。则有

$$\phi = \arccos \left( \frac{8P_0 - 1}{\sin 2\theta} \right) \quad (21)$$

至此, 未知单光子偏振态的两个未知参数得到求解。

下面对该方法的测量精度进行了分析。通过对误差传递公式对公式(20)和(21)进行了误差的理论分析。

$$\Delta\theta = \frac{2|\Delta n_1 + \Delta n_2|}{N\sqrt{1 - (4(P_{\max} - P_{\min}))^2}} \quad (22)$$

$$\Delta\phi = \frac{8}{N\sin 2\theta\sqrt{1 - ((8P_0 - 1)/\sin 2\theta)^2}} + \frac{2(8P_0 - 1)\cos 2\theta\Delta\theta}{N\sin^2 2\theta\sqrt{1 - ((8P_0 - 1)/\sin 2\theta)^2}} \quad (23)$$

式中:  $n_1, n_2, N$  分别为最大概率所对应的符合计数脉冲的个数, 最小概率所对应的符合计数脉冲的个数与样本个数。

## 2 仿真研究

知道理论上要得到准确的测量值需要无穷多个实验样本, 但这是不切实际的。因此接下来通过计算机仿真的办法在兼顾实验效率与实验精度的情况下, 得到所需的最佳样本个数。实际测量主要的误差来源就是由于测量引起的输出态概率投影造成的统计误差。文中通过在测量得到的符合计数脉冲的平均个数  $n$  上再加入一个随机数来模拟实验中的统计误差。随机数的变化范围记为  $\Delta n$ 。将信号符合计数与其统计误差的比值定义为信噪比( $\text{SNR} = n/\Delta n$ )。利用加入统计误差后仿真求得的  $\theta'$ 、 $\phi'$  值与真实值  $\theta$ 、 $\phi$  做差值, 计算出误差  $\Delta\theta$ 、 $\Delta\phi$ 。

$$\Delta\theta = |\theta' - \theta| \quad (24)$$

$$\Delta\phi = |\phi' - \phi| \quad (25)$$

仿真误差在图 5~图 8 中用蓝色实线画出。理论误差在图 5~图 8 中用红色实线画出。

从图 5 的仿真结果中( $\text{SNR}=5, n=50$ ), 可以得到如下结论: 理论所给出的误差曲线与仿真所给出的误差曲线有相同的下降趋势。当所用的样本个数在 2 255 以上时(图中已标注), 测量精度可以达到 98% 以上, 同时蓝色曲线在该值处也有较小的误差涨落。

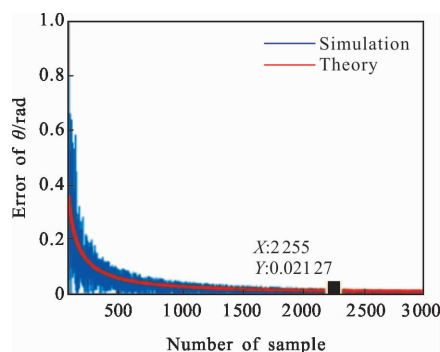


图 5 未知数  $\theta$  的误差曲线  
Fig.5 Error curve of unknown  $\theta$

从图 6 可以得到如下结论: 未知数  $\theta$  的值也会影响未知参量  $\phi$  的测量误差, 其中当  $0.85 \leq \sin 2\theta \leq 0.96$ , 此时的测量精度较差。而在此范围之外  $\phi$  有着较好的实验精度。

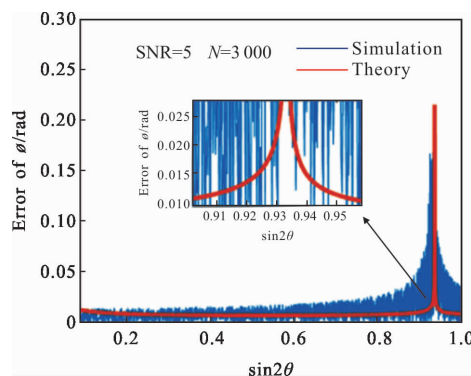


图 6 不同未知数  $\theta$  下  $\phi$  的误差曲线  
Fig.6 Error curves of  $\phi$  under different  $\theta$

图 7(a)反映了使得未知数  $\phi$  测量精度达到 98% 以上时的实验样本数(最佳样本数)随未知数  $\theta$  的变化曲线, 可以发现在不同的  $\theta$  值下要使  $\phi$  有较小的测量误差, 所需的最佳实验样本个数也不同。其曲线的变化趋势也证实了图 6 的结果。

图 7(b)显示了当  $\theta$  值一定时(以  $\theta = \pi/12$  为例),  $\phi$  的测量误差曲线随样本数变化的曲线图。从图中

可以找到当样本个数为 2 622 时(图中已标注),红色与蓝色曲线有较小的测量误差涨落。此时实验样本数即为实际实验过程中最佳样本个数。

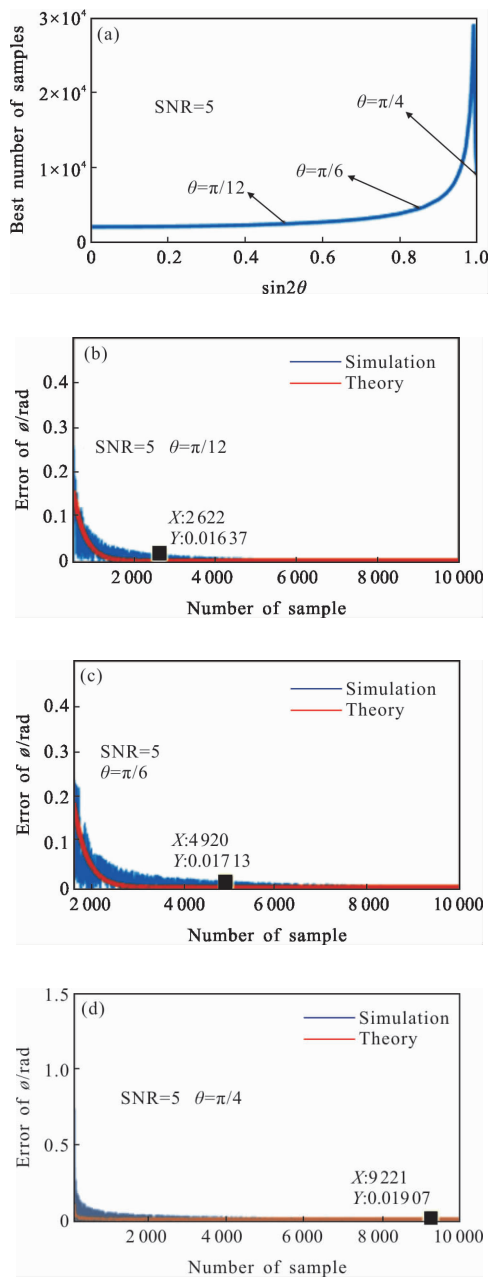


图 7 (a)实验最佳样本个数曲线图;(b) $\theta=\pi/12$  下的  $\phi$  的误差曲线;(c) $\theta=\pi/6$  下的  $\phi$  的误差曲线;(d) $\theta=\pi/4$  下的  $\phi$  的误差曲线

Fig.7 (a) Experimental best sample number curve; (b)  $\theta=\pi/12$  error curve of  $\phi$ ; (c)  $\theta=\pi/6$  error curve of  $\phi$ ; (d) error curve of  $\phi$  under  $\theta=\pi/4$

图 7(c)显示了当  $\theta$  值一定时(以  $\theta=\pi/6$  为例), $\phi$

的测量误差曲线随样本数变化的曲线图。从图中可以找到当样本个数为 4 920 时(图中已标注),红色与蓝色曲线有较小的测量误差涨落。此时实验样本数即为实际实验过程中最佳样本个数。

图 7(d)显示了当  $\theta$  值一定时(以  $\theta=\pi/4$  为例), $\phi$  的测量误差曲线随样本数变化的曲线图。从图中可以找到当样本个数为 9 221 时(图中已标注),红色与蓝色曲线有较小的测量误差,并且在该值处蓝色曲线有着较小的涨落。此时实验样本数即为实际实验过程中最佳样本个数。

图 8 反映了在样本个数( $N=3\ 000$ )的条件下,在不同的信噪比下  $\phi$  的测量误差变化趋势。从该图可以看出在信噪比与样本个数一定时, $\theta$  的取值会影响  $\phi$  的测量误差(与图 6 结论相一致)。

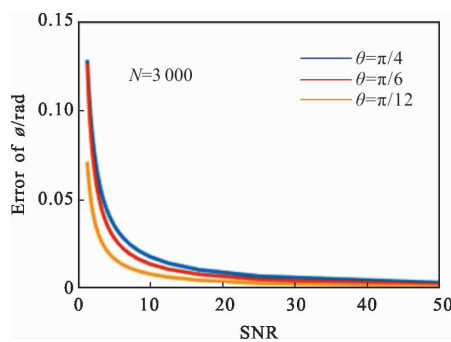


图 8 不同信噪比下的  $\phi$  的测量误差曲线

Fig.8 Measurement error curve of  $\phi$  under different signal-to-noise ratios

综上所述,基于该量子线路的方案有效的实现了对未知量子态的测量。同时在仿真的基础上找到了最佳的实验样本个数,平衡了误差与效率之间的矛盾。控制了实验成本,保证了实验效率。

### 3 结 论

基于文中提出的量子线路的方法可以实现对未知单光子量子态的测量。通过仿真得到了要使  $\theta$  误差最小时的最佳样本个数。其次也得到了未知数  $\theta$  的值对  $\phi$  的测量误差有影响的结论,并画出了要使  $\phi$  的测量精度达到 98% 以上时所需的最佳样本数的变化曲线,并在  $\theta$  值一定时(以  $\theta=\pi/4, \pi/6, \pi/12$  为例)详细讨论了要使  $\phi$  测量误差较小时的最佳样本个数。最后又讨论了不同信噪比在  $\theta$  值一定时(以



$\theta=\pi/4, \pi/6, \pi/12$  为例), 对  $\phi$  测量误差的影响。文中通过仿真确定最佳实验样本数来减小实验误差, 同时也提高了实验效率, 节约实验成本。就该方案实验可行性而言, 目前已有光学系统来实现受控非门的方法, 随着人们的深入研究, 量子逻辑门的效率也已得到提高, 初代的光量子计算机也已问世, 人们对量子比特的操纵能力也变得越来越强。文中提出的基于量子线路实现量子态测量的实验方案是可实际操作的。相信在未来, 量子逻辑门会被大量的集成, 更多的量子线路所组成的量子芯片在特定领域会替代掉现有的电子线路去实现更为高效, 更为宽广的功能。

参考文献:

- [1] Tan Xi, Wu Jinlei, Deng Can, et al. Implementation of quantum phase gate between two atoms via Rydberg antiblockade and adiabatic passage [J]. *Chinese Physics B*, 2018, 27(10): 200–205.
- [2] Domokos P, Raimond J M, Brune M, et al. Simple cavity-QED two-bit universal quantum logic gate: The principle and expected performances [J]. *Physical Review A*, 1995, 52(5): 3554–3559.
- [3] Benenti G, Giulio Casati, Simone Montangero, et al. Dynamical localization simulated on a few-qubit quantum computer[J]. *Physical Review A*, 2002, 67(5):052312.
- [4] Wu Qinglin, Chen Zonghai, Zhang Chenbin. Quantum tomography measurement scheme based on quantum tomography and its simulation [J]. *Control and Decision*, 2009, 24(11): 1625–1628. (in Chinese)  
吴庆林, 陈宗海, 张陈斌. 基于量子层析的量子态测量方案及其仿真[J]. 控制与决策, 2009, 24(11): 1625–1628.
- [5] Qi Bo, Chen Hongbin, Ren Ge, et al. Acquisition and tracking technology of 100 km quantum entanglement distribution experiment [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2013, 21(6): 1628–1634. (in Chinese)  
亓波, 陈洪斌, 任戈, 等. 100 km 量子纠缠分发实验捕获跟踪技术[J]. 光学 精密工程, 2013, 21(6): 1628–1634.
- [6] Kahn J. An invitation to quantum tomography[J]. *Journal of the Royal Statistical Society*, 2010, 67(1): 109–134.
- [7] He Weiji, Sima Boyu, Miao Zhuang, et al. Correction of reversal error of photon counting 3D imaging lidar[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2013, 21(10): 2488–2494. (in Chinese)  
何伟基, 司马博羽, 苗壮, 等. 光子计数三维成像激光雷达反转误差的校正[J]. 光学 精密工程, 2013, 21(10): 2488–2494.
- [8] Bu Yuming, Du Xiaoping, Zeng Chaoyang, et al. Research Progress and Trend Analysis of Scanning Laser 3D Imaging Radar[J]. *Chinese Optics*, 2018, 11(5): 23–39. (in Chinese)  
卜禹铭, 杜小平, 曾朝阳, 等. 无扫描激光三维成像雷达研究进展及趋势分析[J]. 中国光学, 2018, 11(5): 23–39.
- [9] Vo gel W, Welsch D G. k-photon jaymes-cummings model with coherent atomic prepar ation: Squeezing and coherence [J]. *Physical Review A*, 1989, 40(12): 7113–7120.
- [10] Chen Yuxian, Fan Yun, Zhao Yuan, et al. Application of photon counting technology in laser pulse detection [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2006, 35(S3): 361–364. (in Chinese)  
陈锺贤, 范韵, 赵远, 等. 光子计数技术在激光脉冲探测中的应用[J]. 红外与激光工程, 2006, 35(S3): 361–364.
- [11] Wang Qing, Zhang Yong, Hao Lili, et al. Super-resolving quantum LADAR with odd coherence superposition states sources at shot noise limit [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2015, 44(9): 2569–2574. (in Chinese)  
王强, 张勇, 郝利丽, 等. 基于奇相干叠加态的超分辨率量子激光雷达[J]. 红外与激光工程, 2015, 44(9): 2569–2574.
- [12] D’Ariano G M, Laurentis M D, Paris M A, et al. Quantum tomography as a tool for the characterization of optical devices [J]. *Journal of Optics B Quantum & Semiclassical Optics*, 2002, 4(3): 837–842.
- [13] Magesan E, Gambetta J M, Johnson B R, et al. Efficient measurement of quantum gate error by interleaved randomized benchmarking[J]. *Physical Review Letters*, 2012, 109(8): 080505.
- [14] Sasanian Z, Miller D M. Mapping a multiple-control toffoli gate cascade to an elementary quantum gate circuit [J]. *Journal of Multiple Valued Logic & Soft Computing*, 2012, 18(1): 83–98.
- [15] Qu Hengkuo. Scanning imaging tracking lidar [J]. *Chinese Optics*, 2012, 5(3): 242–247. (in Chinese)  
屈恒阔. 扫描成像跟踪激光雷达 [J]. 中国光学, 2012, 5(3): 242–247.