

基于波长调制技术的吸收谱线线型函数测量

周佩丽¹, 谭文¹, 彭志敏²

(1. 华北电力大学 控制与计算机工程学院, 北京 102206;

2. 清华大学 能源与动力工程系 电力系统及发电设备控制与仿真国家重点实验室, 北京 100084)

摘要: 在可调谐二极管激光吸收光谱技术中, 直接吸收法通过对透射光强拟合可直接得到线型函数, 但目前具有较高信噪比的波长调制法不能对其进行有效测量。提出一种基于多次谐波的线型函数测量理论及方法, 通过谐波通项表达式推导出谱线中心频率处二次与四次谐波比值仅与线型函数和调制系数有关, 当调制系数 m 为 2.4928 时, 无论线型函数中 Gauss 线宽和 Lorentz 线宽所占比例如何, 二次与四次谐波比值均为 2.1862, 根据该点的特征可首先得到谱线半宽, 然后将其应用于弱吸收条件下 $2f/1f$ 气体浓度免标法测量。实验中采用 2326.82 nm 处谱线对 CO 浓度进行了测量, 其结果与传统直接吸收法测量结果误差小于 2%。文中为波长调制法中线型函数的精确测量提供了重要的理论依据, 进一步完善了 $2f/1f$ 免标法。

关键词: 波长调制; 线型函数; 谱线半宽; 调制系数; $2f/1f$ 免标法

中图分类号: O433.5⁺1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA202049.0113002

Measurement of absorption line profile function based on wavelength modulation technology

Zhou Peili¹, Tan Wen¹, Peng Zhimin²

(1. School of Control & Computer Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China;

2. State Key Laboratory of Power Systems, Department of Energy and Power Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: In tunable diode laser absorption spectroscopy technology, the direct absorption method can directly obtain absorption line profile function through fitting the transmitting light intensity. But at present, the wavelength modulation method with higher signal-to-noise ratio can't measure it effectively. A measurement theory and method of absorption line profile function based on multiple harmonics was proposed. Through the analysis of harmonic expressions, the ratio between the 2nd harmonic and 4th harmonic at the center frequency was only related to the absorption line profile function and modulation index. When the modulation index m was 2.4928, the ratio between the 2nd harmonic and 4th harmonic was fixed to 2.1862 no matter what the ratio of Gauss linewidth and Lorentz linewidth was. According

收稿日期: 2019-10-05; 修订日期: 2019-11-15

基金项目: 国家重点研发计划(2016YFC0201104); 国家自然科学基金(51676105)

作者简介: 周佩丽(1987-), 女, 博士生, 主要从事基于波长调制光谱技术的吸收率函数测量方法及应用方面的研究。

Email: zhoupeili1987@126.com

导师简介: 谭文(1969-), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事复杂系统控制理论方面的研究。Email: wtan@ncepu.edu.cn

通讯作者: 彭志敏(1981-), 男, 副研究员, 主要从事基于 TDLAS 技术的测量方法及应用方面的研究。Email: apspect@tsinghua.edu.cn

to the characteristics of this point, the spectral line half width can be obtained firstly, and then it can be applied in $2f/1f$ calibration-free measurement of gas concentration. In the experiment, CO concentration has been measured using 2 326.82 nm spectral line through the proposed method. The error between the proposed method and traditional direct absorption method was less than 2%. An important theoretical basis for the measurement of absorption line profile function in wavelength modulation method has been provided by this proposed method, and the traditional theory of $2f/1f$ calibration-free method has been further improved.

Key words: wavelength modulation; line profile function; spectral line half width; modulation index; $2f/1f$ calibration-free method

0 引言

众多气体检测技术中,可调谐二极管激光吸收光谱(Tunable Diode Laser Absorption Spectroscopy, TDLAS)技术由于谱线选择性好、灵敏度高、非接触测量等优点得到快速发展^[1-3]。在 TDLAS 技术中,线型函数包含着气体浓度、温度、压力、光谱常数等信息,其精确测量对 TDLAS 研究具有重要意义^[4-6]。直接吸收法通过对透射光强拟合可得到线型函数,但该方法容易受到颗粒物浓度、激光强度波动等因素影响。波长调制法采用高频信号对激光进行调制,通过谐波检测手段消除其他频率信号的干扰,具有信噪比高等特点,一般采用二次谐波峰值结合标定实验测量气体参数。Reid 提出采用一次谐波对二次谐波进行归一化,可以消除光强的影响,该方法在后期的气体检测中被广泛应用,简化了标定过程^[7]。但波长调制法目前无法对线型函数进行有效测量,线型函数的精确测量或假定又是波长调制法应用的基础,如 Hanson 等提出的 $2f/1f$ 免标法,该方法可以消除光电放大系数、光强波动等影响,其浓度表达式与谐波比值、调制系数和线型函数有关^[8]。研究中一般需要假定线型函数计算谐波信号,然而由于其与待测气体浓度、温度、压力、谱线常数等参数有关,假定线型函数会带来测量误差,也限制了 $2f/1f$ 免标法的应用。

近年来,科研工作者采用谐波信息对线型函数测量进行了研究,Stewart G 等^[9]提出当调制系数 $m < 0.5$ 时,一次谐波信号与线型函数近似相等,通过改

变参考信号和检测信号之间的相位角可实现线型函数的近似测量,但其测量误差随着调制系数的增大而急剧增加;K. Sun 等^[10]采用二次与四次谐波比值和洛伦兹线宽之间的关系对线宽进行了测量。蓝丽娟等^[11]研究中发现无论 Gauss 线宽和 Lorentz 线宽比例系数如何,二次与四次谐波比值曲线和调制系数间存在不动点的现象,并利用该现象对线型函数进行测量,然而该不动点是通过设置不同的线宽比例系数仿真得到的。文中在其研究基础上,基于谐波理论推导出不动点公式,并精确计算出不动点坐标,优化了线型函数的测量方法,然后将其应用于 $2f/1f$ 免标法。实验中采用 2 326.82 nm 谱线对 CO 气体浓度进行了测量,并将其与传统直接吸收法测量结果进行对比。

1 测量原理

1.1 $2f/1f$ 免标法

在波长调制法中,一束中心频率为 ν_0 的激光经过频率为 ω 的高频正弦信号调制后,激光的瞬时频率 ν 和入射光强 I_0 表达式如下:

$$\begin{cases} \nu = \nu_0 + a \cos(\omega t) \\ I_0 = \bar{I}_0 [1 + i \cos(\omega t + \phi)] \end{cases} \quad (1)$$

式中: a 为频率调制幅度, cm^{-1} ; \bar{I}_0 为平均光强; i 为光强线性调制系数; ϕ 为光强调制与频率调制之间的相位差。

根据朗伯比尔定律可知,透射光强与入射光强的比值即透过率表达式如下:

$$\tau(\nu) = \frac{I_t}{I_0} = \exp[-\alpha(\nu)] = \exp[-PS(T)\varphi(\nu_0 + a\cos(\omega t))XL] \quad (2)$$

式中： I_t 为透射光强； $\alpha(\nu)$ 为吸收率函数； P 为压力，atm； $S(T)$ 为谱线强度， $\text{cm}^{-2} \cdot \text{atm}^{-1}$ ； X 为气体浓度； L 为吸收光程，cm； $\varphi(\nu)$ 为线型函数，cm。令 $Q=PS(T)XL$ ，在弱吸收条件下，激光透过率可以用一阶泰勒级数近似展开为：

$$\tau(\nu) \approx 1 - Q\varphi(\nu_0 + a\cos(\omega t)) = 1 - Q \sum_{k=0}^{\infty} H_k \cos k(\omega t) \quad (3)$$

式中： H_k 为线型函数 k 次傅里叶系数，其表达式如下：

$$H_k = \frac{1}{(1+\delta_{k0})\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\nu_0 + a\cos\theta) \cdot \cos k\theta \cdot d\theta, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

式中： δ_{k0} 为符号函数，当 k 为 0 时取 1，当 k 不等于 0 时取 0，锁相检测时参考信号表达式为：

$$\begin{cases} V_{x-k} = R_k \cos(k\omega t + k\theta_k) \\ V_{y-k} = R_k \sin(k\omega t + k\theta_k) \end{cases} \quad (5)$$

式中： R_k 为参考信号幅值； θ_k 为相位角。

将参考信号与透射光强信号相乘，可得此时一次谐波中心频率处幅值为：

$$S_{1f} \approx \frac{GR_1 \bar{I}_0}{2} \quad (6)$$

式中： G 为谐波检测时光电放大系数，偶数次谐波中心频率处幅值为：

$$S_{2f} \approx \frac{GR_2 \bar{I}_0}{2} \cdot |QH_n| = \frac{GR_2 \bar{I}_0 Q}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\nu_0 + a\cos\theta) \cdot \cos n\theta \cdot d\theta \right| \quad (7)$$

$2f/1f$ 免标法将二次谐波 S_{2f} 与一次谐波 S_{1f} 相除^[8]，可消掉光电放大系数、光强波动等影响，通过下式可得到气体浓度 X ，即：

$$X = \frac{iR_{21}}{PS(T)LH_2} \quad (8)$$

式中： R_{21} 为谱线中心频率处二次谐波与一次谐波比值。

通过公式(8)可以看出，在 $2f/1f$ 免标法的应用中，线型函数二次傅里叶系数是已知参数，然而其与气体待测参数(如气体浓度、温度、压力等)有关，采用假定线型的方式会引起测量误差，而且在很多应用中无法对其进行假定计算，因此需要对线型进行精确测量。

1.2 线型函数测量方法

根据公式(7)可知，二次与四次谐波比值 R_{21} 表达式可以描述为：

$$R_{21} = \frac{|S_{2f}|}{|S_{1f}|} = -\frac{H_2}{H_1} = -\frac{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\nu_0 + a\cos\theta) \cdot \cos 2\theta \cdot d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\nu_0 + a\cos\theta) \cdot \cos 4\theta \cdot d\theta} \quad (9)$$

比值 R_{21} 只与线型函数和调制幅度有关，文中采用参考文献[12]中线型函数表达式：

$$\varphi(\nu) = \frac{c_L}{\pi} \cdot \frac{\gamma}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma^2} + \frac{c_G}{\gamma} \cdot \left(\frac{\ln 2}{\pi} \right)^{1/2} \cdot \exp \left[\frac{-\ln 2 \cdot (\nu - \nu_0)^2}{\gamma^2} \right] \quad (10)$$

式中： γ 为谱线半宽； c_L 和 c_G 分别为洛伦兹和高斯线宽的权重系数，表达式如下：

$$\begin{cases} c_L = 0.68188 + 0.61293d - 0.18384d^2 - 0.11568d^3 \\ c_G = 0.32460 - 0.61825d + 0.17681d^2 + 0.12109d^3 \end{cases} \quad (11)$$

式中： d 为线型系数，是 Lorentz 线型和 Gauss 线型所占比例， $d \in [-1, 1]$ 。

将线型函数谱线中心频率处表达式代入 R_{21} 中， $m = a/\gamma$ ，为调制系数，可得：

$$R_{21} = -\frac{\frac{c_L}{\pi \cdot \gamma} A_1 + \frac{c_G}{\gamma} \cdot \left(\frac{\ln 2}{\pi} \right)^{1/2} B_1}{\frac{c_L}{\pi \cdot \gamma} A_2 + \frac{c_G}{\gamma} \cdot \left(\frac{\ln 2}{\pi} \right)^{1/2} B_2} \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+m^2\cos^2\theta} \cdot \cos 2\theta \cdot d\theta \\ A_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+m^2\cos^2\theta} \cdot \cos 4\theta \cdot d\theta \\ B_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-\ln 2 \cdot m^2\cos^2\theta] \cdot \cos 2\theta \cdot d\theta \\ B_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[-\ln 2 \cdot m^2\cos^2\theta] \cdot \cos 4\theta \cdot d\theta \end{cases} \quad (13)$$

分析公式(12)可以发现，当满足 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ 时， R_{21} 是一个常数，与谱线半宽、Lorentz 线型权重系数及 Gauss 线型权重系数无关，仅与调制系数有关。经过积分计算，可得到：

$$\begin{cases} m^* = 2.4928 \\ R_{21}^* = 2.1862 \end{cases} \quad (14)$$

因此可知，当 R_{21} 比值为 2.1862 时，对应的调制系数为 2.4928，同时结合该点的调制幅度 a 和公式

$\gamma=a/m$, 即可得到半宽 γ , 在温度 T 已知的情况下, 通过下述公式, 便可得到完整的线型函数表达式:

$$\begin{cases} \gamma_G=3.581 \times 10^{-7} v_0 \sqrt{T/M} \\ \gamma=0.5346 \cdot \gamma_L + \sqrt{0.2166 \cdot \gamma_L^2 + \gamma_G^2} \\ d = \frac{\gamma_L - \gamma_G}{\gamma_L + \gamma_G} \end{cases} \quad (15)$$

式中: γ_G 为 Gauss 线宽; γ_L 为 Lorentz 线宽; M 为待测气体分子质量。将线型函数代入公式(4)可以得到线型函数的二次谐波分量 H_2 , 然后利用公式(8)2f/1f 免标法对浓度进行测量。

2 实验验证

2.1 实验装置

实验中采用 CO 气体 2 326.82 nm 处谱线进行验证,

从 HITRAN2012 光谱数据库中获取该谱线参数如表 1 所示。

表 1 CO 气体 2 326.82 nm 谱线参数

Tab.1 CO spectral line parameters at 2 326.82 nm

ν_0/cm^{-1}	$S(T)$		E/cm^{-1}
	$/\text{cm}^{-1} \cdot (\text{molecule} \times \text{cm}^{-2})^{-1}$	$/\text{cm}^{-1} \cdot \text{atm}^{-1}$	
4 297.705	2.94E-21	0.063	211.4

实验装置如图 1 所示, 选用加拿大 NORCADA 厂家 NL2327-B 激光二极管, 激光控制器 ITC4001 控制激光二极管发出波长为 2 326.82 nm 激光并采用外部调制, 信号发生器产生 1 kHz 调制信号(使用 F-P 干涉仪测量电流系数为 $0.048 \text{ cm}^{-1}/\text{mA}$), 调制信号进入数据采集卡第一通道。被调制的激光信号经

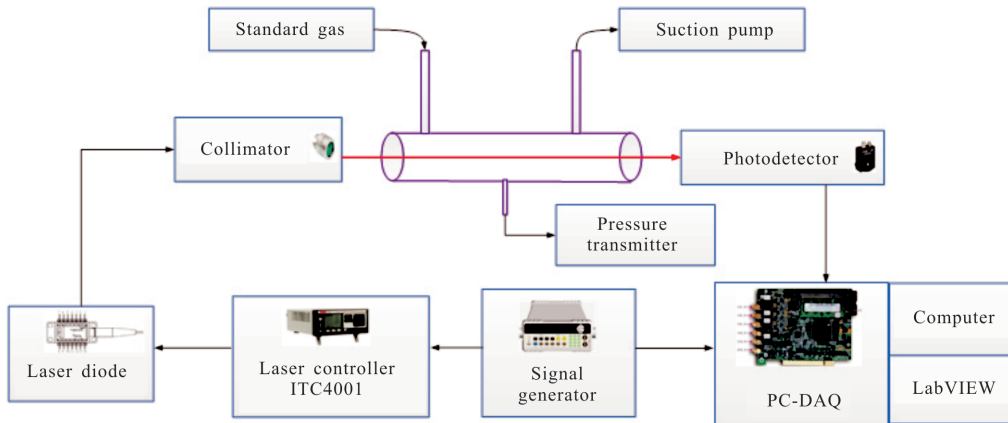


图 1 验证实验装置

Fig.1 Verification experiment device

过准直器准直后透过气室, 被 CO 气体吸收, 然后由光电探测器接收转换为电信号进入数据采集卡第二通道。探测信号和调制信号由计算机进行处理, 分别

得到一次、二次和四次谐波。

调制信号采用变幅信号实现调制系数连续可变, 调幅信号的表达式为:

$$\begin{cases} a(t) = \left[a_0(1-x) + \frac{4a_0x}{T_1} t \right] \cos(2\pi ft), 0 \leq t < \frac{T_1}{2} \\ a(t) = \left[a_0(1+x) - \frac{4a_0x}{T_1} \left(t - \frac{T_1}{2} \right) \right] \cos \left(2\pi f \left(t - \frac{T_1}{2} \right) \right), \frac{T_1}{2} \leq t < T_1 \end{cases} \quad (16)$$

式中: a_0 为变幅信号的中心位置幅值; x 为变幅系数; T_1 为变幅信号周期; f 为正弦调制信号周期, 其形状如图 2 所示。

数据处理软件采用 LabVIEW 编写, 数据处理过

程如图 3 所示。首先, 透射光强信号和调制信号经过锁相处理后得到一次谐波 S_{1f} 、二次谐波 S_{2f} 和四次谐波 S_{4f} (锁相检测中通过对调制信号进行 FFT 得到其初始相位, 然后软件产生同相位无噪声的参考信

号),确定二次谐波与四次谐波曲线上比值为 2.186 2 的点 R_{24}^* 对应的调制幅度 a^* (该过程中,首先对激光二极管的电流调谐系数进行标定,然后采用图 2 中所示的变幅信号对激光二极管进行调制,确定变幅信号变幅过程中的各调制幅度,最后根据二次谐波与四次谐波曲线上比值为 2.186 2 的点 R_{24}^* 在该比值曲线中所占的比例计算出相应的调制幅度 a^*),该幅度对应的调制系数 m^* 为 2.492 8,根据公式 $\gamma=a^*/m^*$ 便可得到 Voigt 线宽 γ 。在温度已知条件下,通过公式(15)Gauss 线宽 γ_G 得到 Lorentz 线宽 γ_L 和线型系数 d ,并最终得到完整的线型函数 $\varphi(\nu)$ 和二次傅里叶系数 H_2 。将二次谐波与一次谐波比值 R_{21}^* 和光强线性调制系数 i 代入到公式(8),即可得到免标法普通情况下测量的气体浓度 X 。

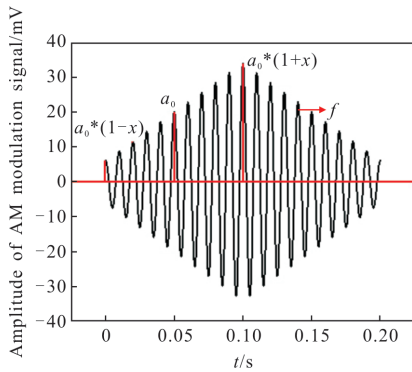


图 2 调幅调制信号波形示意图

Fig.2 AM modulation signal waveform

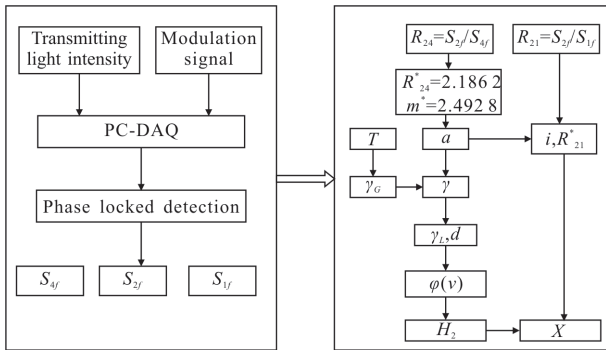


图 3 多次谐波测量线型函数数据处理过程

Fig.3 Data processing of line profile function measurement based on multiple harmonics

2.2 实验结果

采用浓度为 1% 的 CO 标气进行配比,气室压力 P 为 1 atm,温度 T 为 295.3 K,气室长度 L 为 52.5 cm。

对光强线性调制系数 i 进行标定,标定时将经过调制的激光在无吸收的情况下由光电探测器接收,改变不同的调制电压,根据 2.1 节中标定的电流调谐系数得到相应的调制幅度,在不同的调制幅度下对光强线性调制系数进行标定,然后对调制幅度和光强线性调制系数进行拟合,拟合结果为 $i=0.2075*a+0.000715$ 。实验测量的一次谐波 S_{1f} 、二次谐波 S_{2f} 和四次谐波 S_{4f} 如图 4 所示。

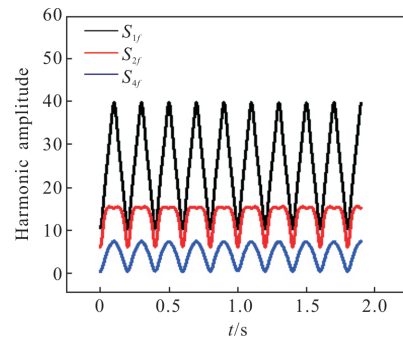


图 4 多次谐波信号测量结果(调幅信号频率为 5 Hz,高频正弦信号为 1 kHz)

Fig.4 Measurement results of multiple harmonics signal(frequency of AM signal is 5Hz, frequency of modulation signal is 1kHz)

将中间七个周期信号求平均值,取上升沿信号,所得到的二次与四次谐波比值 R_{24} 和二次谐波与一次谐波比值 R_{21} 如图 5 所示,在 R_{24} 曲线上确定比值为 2.186 2 的点 A ,其调制幅度 a 为 0.1428 cm^{-1} ,根据不动点理论,可以得到谱线半宽 γ 为 0.0573 cm^{-1} ,根据温度 T 可以计算高斯线宽为 0.005 cm^{-1} ,线型系数为 0.839。

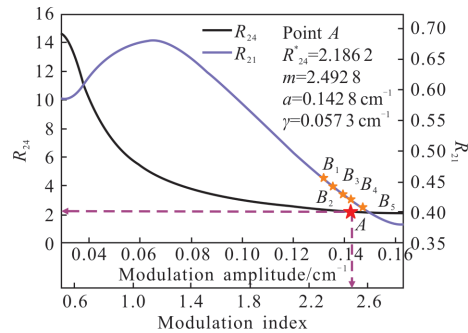


图 5 多次谐波法实验测量结果(七个周期谐波信号平均值处理结果)

Fig.5 Experimental measurement result by multiple harmonics method (average processed result of harmonic signals in seven periods)

然后利用 R_{21} 曲线上 $B_1 \sim B_5$ 五个点测量浓度,将

谱线半宽、线型系数、各点调制幅度代入公式(4)得到线型函数的二次傅里叶系数 H_2 , 根据标定曲线得到各点的光强线性调制系数, 五个点所对应的参数如表 2 所示, 将各参数代入免标法公式(8)中, 得到 CO 平均浓度为 1 753 ppm(1 ppm= 10^{-6})。

表 2 曲线 R_{21} 点 $B_1 \sim B_5$ 参数

Tab.2 Parameters of point B_1 to point B_5 on line R_{21}

Point	R_{21}	a/cm^{-1}	i	H_2	X/ppm
B_1	0.455	0.132 0	0.028 1	1.908	1 751
B_2	0.442	0.135 7	0.028 9	1.905	1 752
B_3	0.429	0.139 7	0.029 7	1.900	1 752
B_4	0.418	0.142 8	0.030 4	1.895	1 752
B_5	0.406	0.147 4	0.031 3	1.888	1 759

将多次谐波测量线型函数和浓度结果代入吸收率函数, 同时采用直接吸收法对其进行验证, 结果如图 6 所示。直接吸收法测量时, 采用 20 Hz 三

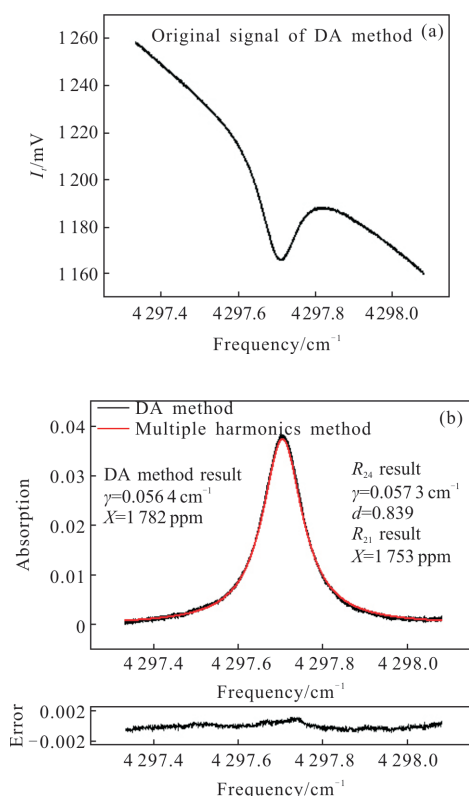


图 6 直接吸收法验证实验结果(a)直接吸收法测量原始信号; (b)多次谐波法与直接吸收法测量结果对比

Fig.6 Verified experiment results of direct absorption method (a) Measurement of original signal by direct absorption method; (b) Comparison of measurement results between multiple harmonics method and direct absorption method

角波进行扫描, 取 40 个周期信号平均后拟合线宽为 0.0564 cm^{-1} , 浓度为 1 782 ppm, 二者测量结果误差小于 2%。

3 结论

文中基于谐波理论提出一种基于多次谐波的线型函数测量理论及方法。在谱线中心频率处, 二次谐波与四次谐波比值只与线型函数和调制系数有关, 通过对线型函数公式进行分析, 当调制系数为 2.492 8 时, 二者比值固定于 2.186 2, 与 Gauss 线宽和 Lorentz 线宽所占比例无关。该理论采用 CO 气体 2 326.82 nm 谱线进行了实验验证, 并将该方法应用于 CO 浓度 $2f/1f$ 免标法测量中。实验中采用直接吸收法进行验证, 直接吸收法测量线宽和浓度分别为 0.0564 cm^{-1} 和 1 782 ppm, 多次谐波法测量线宽和浓度分别为 0.0573 cm^{-1} 和 1 753 ppm, 两种方法测量误差小于 2%。文中为二次与四次谐波测量线型函数提供了理论依据, 并将该方法应用于弱吸收条件下的浓度免标法测量中, 完善了免标法的理论基础。在接下来研究中, 拟将其应用于燃煤电厂烟气中 CO 浓度测量。

参考文献:

- [1] Qu Zhechao, Werhahn Olav, Ebert Volker. Thermal boundary layer effects on line-of-sight tunable diode laser absorption spectroscopy (TDLAS) gas concentration measurements [J]. *Applied Spectroscopy*, 2018, 72(6): 853-862.
- [2] Zang Yipeng, Nie Wei, Xu Zhenyu, et al. Measurement of trace water vapor based on tunable diode laser absorption spectroscopy [J]. *Acta Optica Sinica*, 2018, 38(11): 1130004. (in Chinese)
- [3] Lu Weiye, Zhu Xiaorui, Li Yuesheng, et al. Comparison of direct absorption and wavelength modulation methods for online measurement of CO_2 by TDLAS [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2018, 47(7): 0717002. (in Chinese)
- [4] Du Yanjun, Peng Zhimin, Ding Yanjun. High-accuracy sinewave-scanned direct absorption spectroscopy [J]. *Optics Express*, 2018, 26(22):29550.
- [5] Nie Wei, Kan Ruifeng, Xu Zhenyu, et al. Measurements of line strengths for some lines of ammonia in $6\ 611\text{--}6\ 618 \text{ cm}^{-1}$ [J]. *Acta Phys Sin*, 2017, 66(5): 054207. (in Chinese)

- [6] Li Meng, Guo Jinjia, Ye Wangquan, et al. Study on TDLAS system with a miniature multi-pass cavity for CO₂ measurements[J]. *Spectroscopy and Spectral Analysis*, 2018, 38(3): 697–707. (in Chinese)
- [7] Cassidy D T, Reid J. Atmospheric pressure monitoring of trace gases using tunable diode laser[J]. *Appl Opt*, 1982, 21(7): 1186–1190.
- [8] Rieker G B, Jeffries J B, Hanson R K. Calibration-free wavelength-modulation spectroscopy for measurements of gas temperature and concentration in harsh environments [J]. *Applied Optics*, 2009, 48(29): 5546–5560.
- [9] Stewart G, Johnstone W, Bain J R P, et al. Recovery of absolute gas absorption line shapes using tunable diode laser spectroscopy with wavelength modulation—part 1: Theoretical Analysis[J]. *Lightw Technol*, 2011, 29(6): 811–821.
- [10] Sun Kai. Utilization of multiple harmonics of wavelength modulation absorption spectroscopy for practical gas sensing [D]. US: Stanford University, 2013.
- [11] Lan L J, Ding Y J, Peng Z M, et al. Calibration-free wavelength modulation for gas sensing in tunable diode laser absorption spectroscopy[J]. *Appl Phys B*, 2014, 117(10): 1211–1219.
- [12] Liu Yuyan, Lin Jieli, Huang Guangming, et al. Simple empirical analytical approximation to the Voigt Profile [J]. *J Opt Soc Am*, 2001, 18(5): 666–672.