

基于三维反正切函数拟合的光斑质心提取算法

张 惠^{1,2,3}, 李国平^{1,2}, 张 勇^{1,2}, 胡守伟^{1,2,3}

- (1. 中国科学院国家天文台 南京天文光学技术研究所, 江苏 南京 210042;
2. 中国科学院 南京天文光学技术研究所 天文光学技术重点实验室, 江苏 南京 210042;
3. 中国科学院大学, 北京 100049)

摘 要: 在诸多需要对光斑质心进行定位的领域里, 光斑质心定位的精确性和稳定性都是至关重要的。根据光学系统对物体边缘的模糊原理, 提出一种新的光斑中心提取算法。该算法是以反正切函数为基函数, 通过对其变量代换从而得到可以拟合光斑灰度分布的函数。求解过程中首先通过高斯-牛顿法进行迭代, 然后再通过最小二乘法进行最优解估计。文中先通过仿真分析, 对比了文中算法与传统算法的优劣, 进一步通过实验验证该方法相对于传统方法的优势。实验结果表明: 基于文中算法光斑质心提取精度为 0.1253 个像素; 此时角度传感器的测角精度为 0.1723", 优于传感器技术要求的 0.25"。文中算法对噪声、对比度、光斑的长宽比和大小的综合性能优于传统算法, 实验结果稳定可靠, 满足角度传感器使用要求。

关键词: 光斑中心提取; 亚像素检测; 反正切函数变换; 灰度拟合

中图分类号: TN911.73 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3788/IRLA201948.0226001

Spot centroid extraction algorithm based on three-dimensional arctangent function fitting

Zhang Hui^{1,2,3}, Li Guoping^{1,2}, Zhang Yong^{1,2}, Hu Shouwei^{1,2,3}

- (1. Nanjing Institute of Astronomical Optics & Technology, National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210042, China;
2. Key Laboratory of Astronomical Optics & Technology, Nanjing Institute of Astronomical Optics & Technology, Chinese Academy of Sciences, Nanjing 210042, China;
3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: The precision and stability of spot centroid location were crucial in many fields. According to the edge blurring principle on the optical system, a new algorithm of spot centroid extraction was proposed. The proposed algorithm, based on the arctangent function, can be used to fit the gray distribution of the light spot by variable substitution, and then the centroid of spot can be obtained. In the process of solution, the Gauss-Newton method was adopted to iterate, and then the least square method was used for optimal estimation. Firstly, the advantage and disadvantages of the proposed

收稿日期: 2018-09-05; 修订日期: 2018-10-15

基金项目: 国家自然科学基金(U1331204); 国家重点基础研究发展计划(2015CB857100)

作者简介: 张惠(1988-), 男, 博士生, 主要从事大型射电望远镜镜面型检测方面的研究。Email: chxiguang@126.com

导师简介: 李国平(1962-), 男, 研究员, 博士生导师, 主要从事望远镜设计与检测方面的研究。Email: gpli@niaot.ac.cn

algorithm between the traditional algorithms were obvious through comparison analysis, and then the feasibility was validated experimentally. The experimental results show that the location precision of the spot centroid is 0.125 3 pixels, and the angle measurement accuracy of the photoelectric sensor is 0.172 3", superior to the sensor's technical requirement 0.25". The robustness of the proposed algorithm to noise, contrast, aspect ratio and size is superior to the traditional algorithms. The experimental results were stable and reliable, and meet the requirement of the angle sensor.

Key words: spot centroid localization; sub-pixel detection; arctangent function transformation; grayscale fitting

0 引言

在诸多技术领域中,如光学传感^[1]、光电跟踪^[2]、激光制导^[3]、机器视觉^[4]、光斑的识别与提取都是一项关键的技术,因此衍生出了很多的光斑中心提取算法。其中灰度重心法是最为传统的方法,该方法对于高对比度且均匀的光斑的检测精度很高,但是在实际使用过程中由于噪声和非均匀性等因素导致其检测精度较低^[5-6];椭圆拟合方法虽然有很好的鲁棒性,但该方法使用前需要对光斑进行边缘检测(Roberts, Sobel, Canny 边缘检测算子),该方法受限与光斑边缘检测的精度^[7];对于小尺寸光斑或是光斑灰度分布符合高斯分布的,采用高斯分布拟合算法的精度会很高,但是对于大的且不符合高斯分布的光斑,则最终的定位误差会比较大^[8-9]。

为了追求更高和更稳定的定位精度,一些新的方法也陆续被提出来,比如多维度重构小孔中心测量方法^[10]、多尺寸光斑质心的快速检测方法^[11]、采用动态梯度光斑质心定位方法^[3]、或是先对光斑边缘进行亚像素检测方法^[12]等。这些方法确实可以提高光斑质心的提取定位精度,但是当光斑质量较差时,或是图像噪声较大时,其性能都会大大的受损。

鉴于已有光斑质心提取方法存在的缺点,比如噪声鲁棒性差、对图像的信噪比要求严格,过分依赖与光斑边缘信号等,文中提出了一种基于三维反正切函数拟合的光斑质心提取算法,该算法以反正切函数为基函数,通过相应的函数变换,使其成为可以拟合光斑灰度分布的三维函数。通过该方法对光斑进行拟合,最终可以同时得到光斑的质心、大小、倾斜等信息。

1 算法原理

1.1 算法的提出

由于光学系统存在着像差,即清晰锐利的边缘,通过光学系统后会变得平滑。也就是说对于一个理想的边界通过光学系统后,原本突变的地方会变得平缓。该过程在光学成像系统中可以描述为边缘信号 $\varepsilon(x)$ 与光学系统点扩散函数 $h(x)$ 的卷积^[13],即

$$g(x) = \varepsilon(x) \otimes h(x) \tag{1}$$

相应的物理过程如图 1 所示。

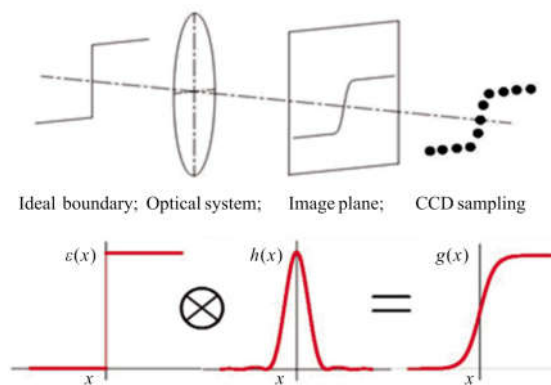


图 1 边缘模糊的物理过程

Fig.1 Physical process for edge fuzzy principle

从图 1 可以看出,理想的边界经过光学系统后,其所成像 $g(x)$ 的形状类似于反正切函数,因此考虑采用反切函数来拟合光斑。但对于一个光斑来说,其灰度是三维分布的,因此需要对反正切函数进行相应的变形才可以拟合光斑。

1.2 反正切函数变形

图 2 给出了一个光斑的截面。

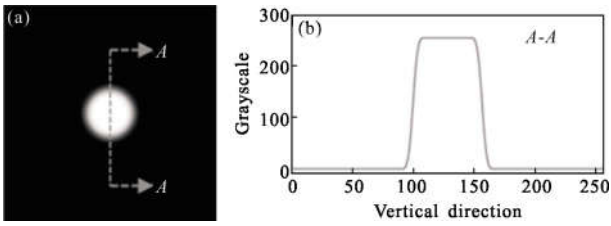


图 2 光斑灰度分布

Fig.2 Grayscale distribution of spot

从图 2 可以看出, 光斑的截面类似于两个相互对称的反正切函数的组合, 因考虑到对反正切函数进行相应的对称处理处, 即用 $a \cdot x^2 + c$ 代替原来的变量 x , 得到变形后的反正切函数为:

$$f(x) = A \cdot \arctan(a \cdot x^2 + c) + t \quad (2)$$

式中: A, a, c, t 均为待定参数, 反应的是不同截面的信息。为了形象说明变形后函数与光斑截面的相似性, 在此取一组参数 $A=1, a=-1, c=20, t=\pi/2$, 可得到光斑截面如图 3(b) 所示。

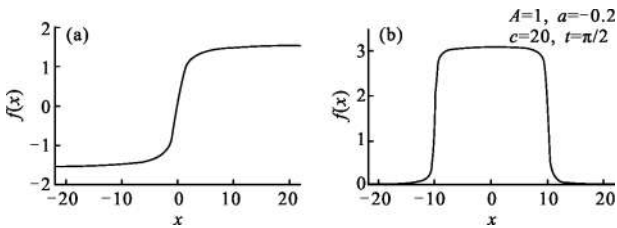


图 3 标准反正切函数与其变形函数

Fig.3 Standand arctangent function and its transformed function

相似地, 若用 $a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c$ 代替原来 x , 即可得到三维的拟合函数:

$$f_p(x, y) = A \cdot \arctan(a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c) + t \quad (3)$$

式中: $p = \{A, a, b, c, t\}$ 为待定的参数。由于公式(3)是建立在以光斑质心为原点, 光斑的半短轴为 x , 半长轴为 y 的坐标系内, 而该坐标系是未知的, 因此公式(3)是无法进行求解的, 在此需要将该光斑坐标系旋转到图像坐标系下。相应的旋转矩阵为:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 - c_{x_0} \\ y_0 - c_{y_0} \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中: xoy 为光斑坐标系, 是未知的; 而 $x_0o_0y_0$ 为图片坐标系, 是已知的; 相应的光斑质心为 (c_{x_0}, c_{y_0}) ; 旋转角为 θ 。

将公式(4)代入公式(3), 最终得到了可用于光斑

灰度拟合的三维反正切拟合函数:

$$f_p(x_0, y_0) = A \cdot \arctan(ag((x_0 - c_{x_0})\cos\theta + (y_0 - c_{y_0})\sin\theta)^2 + b \cdot (-(x_0 - c_{x_0})\sin\theta + (y_0 - c_{y_0})\cos\theta)^2 + c) + t \quad (5)$$

式中: $p = \{A, a, b, c, t, c_{x_0}, c_{y_0}, \theta\}$ 为待拟合的参数, 其反应的光斑整体的信息。只要确定了参数 p 值, 那么就可以确定光斑的信息, 即

光斑中心: (c_{x_0}, c_{y_0}) ;

光斑倾斜角: θ

光斑半长轴: $\sqrt{-c/a}$;

半短轴: $\sqrt{-c/b}$

至此, 完成了文中所提出的三维反正切函数拟合光斑中心提取算法推导。当改变参数 p 的值时, 可以模拟出不同的光斑, 比如大的质心饱和光斑 $p = \{85, -0.1, -0.3, 30, 126, 45, 35, \pi/8\}$ (见图 4(a)), 或者于小尺寸且能量符合高斯分布的光斑 $p = \{45, -0.05, -0.03, 2, 126, 30, 50, -\pi/4\}$ (如激光光斑), (见图 4(b))。由于求解过程相对于椭圆拟合算法减少了边缘检测过程, 相对于加权质心法减少了取阈值的过程, 由于减少了中间环节, 因此也就相对地减少了原理误差, 进而提升了检测精度。

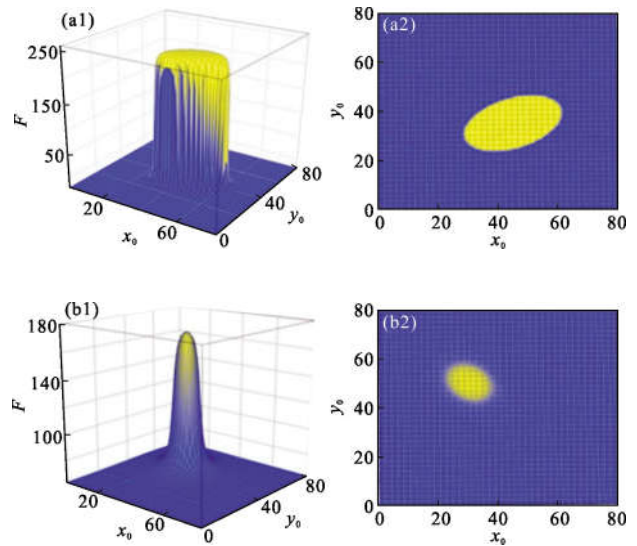


图 4 质心饱和大光斑(a1~a2)和高斯分布光斑(b1~b2)

Fig.4 Central and saturated large spot (a1~a2) and Gaussian distribution spot (b1~b2)

1.3 非线性最优估计

由公式(5)可以看出, 用文中的方法进行光斑的拟合的过程是非线性的, 因此需要确定其最优解的

存在。在此采用非线性最小二乘法进行最优估计,迭代的过程采用高斯-牛顿法^[14]。标记实际采到光斑的灰度分布为 Q ,那么采样值与拟合值的残差为:

$$r(p)=F-Q \quad (6)$$

根据最小二乘法原理,希望得到 p^* ,使得 $\|r(p)\|$ 最小,即

$$p^*=\operatorname{argmin}_p\{R(p)\} \quad (7)$$

$$R(p)=\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (r_i(p))^2=\frac{1}{2} r(p)^T r(p) \quad (8)$$

选取 Δ 为步长,将 $R(p)$ 在 p_k 的附近进行泰勒展开,略去二阶以上的展开项得:

$$R(p_k+\Delta) \approx L(\Delta)=\frac{1}{2} (r(p_k+\Delta))^T r(p_k+\Delta)=R(p_k)+\Delta^T J_k^T r_k+\frac{1}{2} \Delta^T J_k^T J_k \Delta \quad (9)$$

式中: J_k 为 Jacobin 矩阵。其中的 n 代表着数据的总数, k 则表示的是第 k 组参数。

$$J_k=\begin{bmatrix} \frac{\partial r_1(p_k)}{\partial A} & \frac{\partial r_1(p_k)}{\partial a} & \dots & \frac{\partial r_1(p_k)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial r_2(p_k)}{\partial A} & \frac{\partial r_2(p_k)}{\partial a} & \dots & \frac{\partial r_2(p_k)}{\partial \theta} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial r_n(p_k)}{\partial A} & \frac{\partial r_n(p_k)}{\partial a} & \dots & \frac{\partial r_n(p_k)}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (10)$$

由于拟合函数 F 是处处可导的,所以其对每个参数的导数都是存在的,如下:

$$\frac{\partial r(p)}{\partial A}=\arctan(a \cdot x^2+b \cdot y^2+c)+t \quad (11)$$

$$\frac{\partial r(p)}{\partial a}=A \cdot \frac{x^2}{1+(a \cdot x^2+b \cdot y^2+c)^2} \quad (12)$$

$$\frac{\partial r(p)}{\partial b}=A \cdot \frac{y^2}{1+(a \cdot x^2+b \cdot y^2+c)^2} \quad (13)$$

$$\frac{\partial r(p)}{\partial c}=A \cdot \frac{1}{1+(a \cdot x^2+b \cdot y^2+c)^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial r(p)}{\partial t}=1 \quad (15)$$

$$\frac{\partial r(p)}{\partial c_{x_0}}=A \cdot \frac{-2a \cdot x \cdot \cos \theta+2b \cdot y \cdot \sin \theta}{1+(a \cdot x^2+b \cdot y^2+c)^2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial r(p)}{\partial c_{y_0}}=A \cdot \frac{-2a \cdot x \cdot \sin \theta-2b \cdot y \cdot \cos \theta}{1+(a \cdot x^2+b \cdot y^2+c)^2} \quad (17)$$

$$\frac{\partial r(p)}{\partial \theta}=A \cdot \frac{2a \cdot x \cdot y-2b \cdot x \cdot y}{1+(a \cdot x^2+b \cdot y^2+c)^2} \quad (18)$$

公式(11)~(18)中的 x 和 y 用公式(4)进行替换,即求得每个导数的具体值。

为了使公式(9)取得最小值,那么就要求其一阶

导为零,即

$$\frac{\partial L(\Delta)}{\partial \Delta}=J_k^T r_k+J_k^T J_k \Delta=0 \quad (19)$$

当 $J_k^T J_k$ 为非奇异时,则步长可表示为:

$$\Delta=-\left(J_k^T J_k\right)^{-1} J_k^T r_k \quad (20)$$

那么最终的高斯-牛顿最速迭代的方向就可以得到:

$$p_{k+1}=p_k+\Delta \quad (21)$$

公式(20)和(21)分别给出了迭代的步长和方向,但是要进行迭代还需要知道参数 p 的初始值,此初始值由实际所采集的光斑图像进行估计。其中参数变量的初始估计值如下:

$$A_0=\frac{\max(Q)}{\pi} \quad (22)$$

$$t_0=\frac{A_0 \pi}{2} \quad (23)$$

$$\left[c_{0x_0} \quad c_{0y_0}\right]=-\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Q_{ij} * \left[x_i \quad y_j\right]}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Q_{ij}} \quad (24)$$

$$c_0=|\max(x_Q)-c_{0x_0}|+|\max(y_Q)-c_{0y_0}| \quad (25)$$

$$\left[a_0 \quad b_0\right]=-\frac{c_0}{\left[ra^2 \quad rb^2\right]} \quad (26)$$

$$\theta_0=\arctan\left(\frac{\max(y_Q)}{\max(x_Q)}\right) \quad (27)$$

式中: x_Q, y_Q 表示光斑灰度在 x, y 轴的坐标值; r_a, r_b 则为光斑半径的估计值。至此所有参数的初始估计量也已经全部估算出来即 $p_0\{A_0, a_0, b_0, c_0, t_0, c_{0x_0}, c_{0y_0}, \theta_0\}$, 将其代入公式(20)、(21),即可完成拟合过程的迭代,求出最优值。

2 仿真分析

为了验证文中所提出的算法在光斑质心提取方面的性能,在此与两种最常用的光斑质心提取算法(椭圆拟合法和加权质心法)进行对比分析。考虑到对光斑质心提取影响较大的因素有噪声、对比度、光斑长宽比和光斑尺寸,所以仿真过程也就是基于这四个方面的。

2.1 噪声

在进行仿真分析时,首先建立一个半长轴为 $r_a=8$ pixel,半短轴 $r_b=6$ pixel 的光斑,然后在其上加上零均值的高斯白噪声,分析结果如下。

从图 5 中可以看出,随着高斯白噪声的方差的

增大, 三种算法的光斑质心提取精度的均方根误差 RMSE 都在增大, 即提取的精度变差; 文中算法的精度始终优于椭圆拟合和加权质心法; 灰度重心算法随着噪声方差的增大逐渐收敛于一个固定值 0.55 pixel, 这是由于随着噪声的增大光斑会渐渐淹没于噪声中的原因。纵观图 5, 文中算法对噪声的鲁棒性优于椭圆拟合和加权质心法。

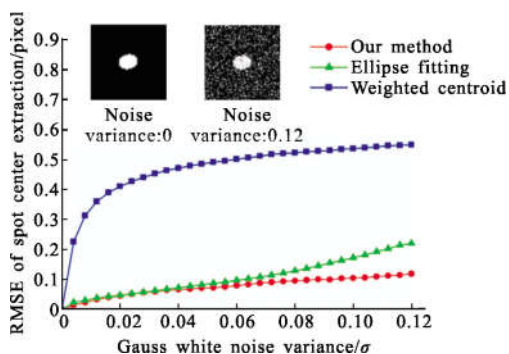


图 5 噪声对光斑质心提取的影响

Fig.5 Influence of noise on spot centroid extraction

2.2 对比度

在对比度分析时, 考虑到噪声的客观存在, 所以这里的光斑是含有噪声方差为 0.01 的光斑。光斑的对比度定义如下:

$$C_{ms} = \sqrt{\frac{1}{N \times M} \sum_i \sum_j (Q_{i,j} - \text{mean}(Q_{i,j}))^2} \quad (28)$$

式中: $\text{mean}(Q_{i,j}) = \frac{1}{N \times M} \sum_i \sum_j Q_{i,j}$

图 6 中, 随着对比度的降低, 光斑质心提取的误差会先增大, 这是由于对比度下降时, 高灰度值被压缩, 低灰度值被拉伸, 也就是说噪声比例会增大; 对比度进一步降低, 则 RMSE 会有稍微的减小, 对比度降到一定比例时, 噪声会被相对抹平; 文中算法的提取精度的变化率完全小于其余两种方法, 也就是说文中方法相对于对比度变化的鲁棒性更优。

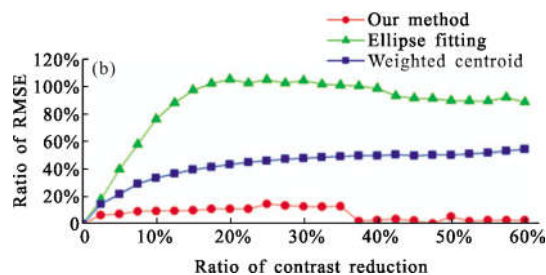
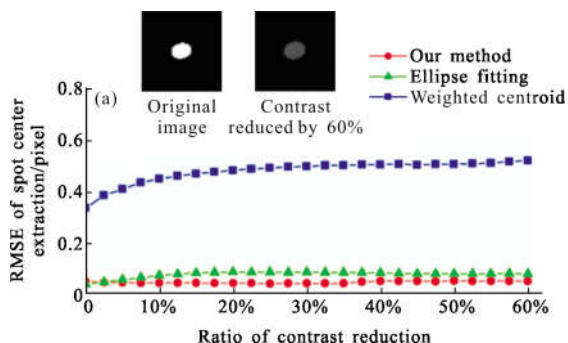


图 6 对比度对光斑质心提取的影响

Fig.6 Influence of contrast on spot centroid extraction

2.3 光斑长宽比

光斑的长宽比定义与光斑的长半轴与其短半轴的比例, 其反映了光斑偏离标准圆形程度, 其定义公式为 $R=r_a/r_b$, 在生成仿真用的光斑时, 有 $r_b=6$ pixel, 通过改变 r_a 的长度来改变长宽比, 相应的分析结果如图 7 所示。

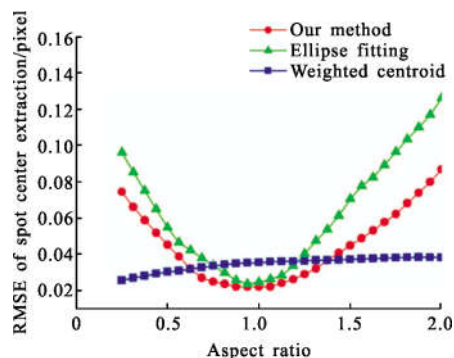


图 7 长宽比对光斑质心提取的影响

Fig.7 Influence of aspect ratio on spot centroid extraction

从图 7 可以看出, 文中算法和椭圆拟合方法对长宽比敏感, 而灰度重心法却相对稳定; 当长宽比在 1 附近时, 也就是光斑与标准圆形相差不多时, 此时文中算法的精度远高于其他两种方法。在实际的工程应用如激光制导或是光电传感过程中, 传感器采集到的光斑都是由主动光源提供的, 因此光斑形状都接近与圆, 即其长宽比为 1。由此认为文中的算法是优于其他两种方法的, 同时, 当长宽比在 0.6~1.4 之间时, 文中算法的优势明显。

2.4 光斑大小

此处光斑大小的分析是建立在能量固定的基础上, 也就是说光斑大小的直接反应就是光斑半长轴与半短轴的大小, 其在物理过程中则是反应测量系统中 CCD 的离焦情况。

图 8 中, 随着 CCD 位置的离焦, 光斑的尺寸变

大,相应光斑受外部噪声的影响也会增大,因此三种算法的检测精度都随着光斑的增大而变差,即检测的不确定性会增大,当光斑大到一定程度后,此时光斑已经被噪声严重污染,那么此时三种方法检测精度也会变得相当。

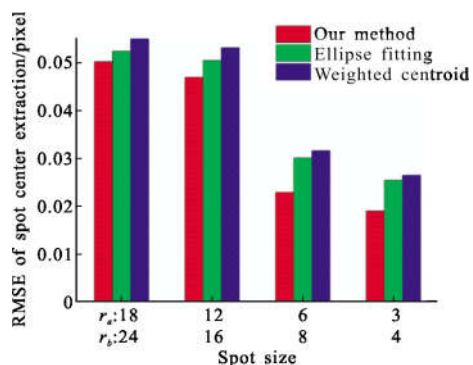


图 8 光斑大小与质心提取的影响

Fig.8 Influence of spot size and centroid extraction

2.5 仿真总结

在仿真部分,笔者从影响光斑质心提取的四个主要因素入手,分别对比分析了文中算法与椭圆拟合算法和加权质心法的性能。在这四个方面文中算法都体现出其良好的光斑质心定提取性能。因此文中所提出的这种采用三维反正切拟合的光斑质心提取算法是一种行之有效,性能良好的光斑质心提取算法。

3 实验验证

实验所用的光电角度传感器是为新疆奇台射电望远镜(QTT)^[15]主动面补偿系统所研制的,其原理图如图 9 所示,该传感器为一个卡塞格林系统^[13],位于系统焦平面的光源通过针孔后,经过分光棱镜(BS),望远镜的子镜(SM),主镜(PM)准直出射,出射光线经分束片(BS plate)的后面反射回的光线在 CCD 上所成的像作为参考光斑,而经反射镜(Mirror)反射回来的光线所成的像为目标光斑,由于参考光斑和目标光斑所在空气中所走过的光程相同,且在同一个系统中成像,所以其系统误差对这两个光斑的影响是相当的,因此通过参考光斑与目标光斑做差,可以有效地消除系统误差。该系统焦距为1 500 mm,CCD 的像元尺寸为 10 μm ,主镜口径为 50 mm,子镜口径为 12 mm,视场角,针孔的尺寸为 10 μm 。

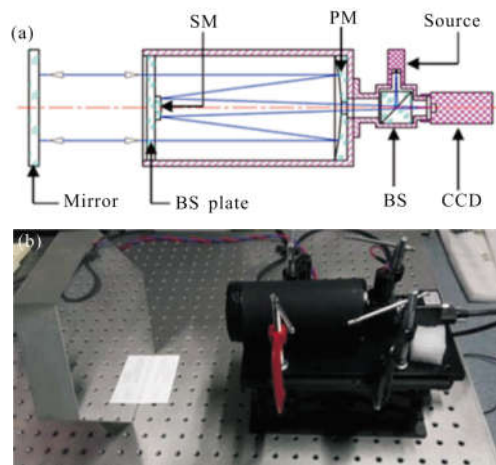


图 9 实验原理与装置

Fig.9 Experimental principle and instrument

实验在实验室内常温下完成,相应的采样频率为 1 Hz,连续采样 3 min,共计采集了 180 幅图片。所采集的图像序列中的其中一幅如图 10(a)所示。

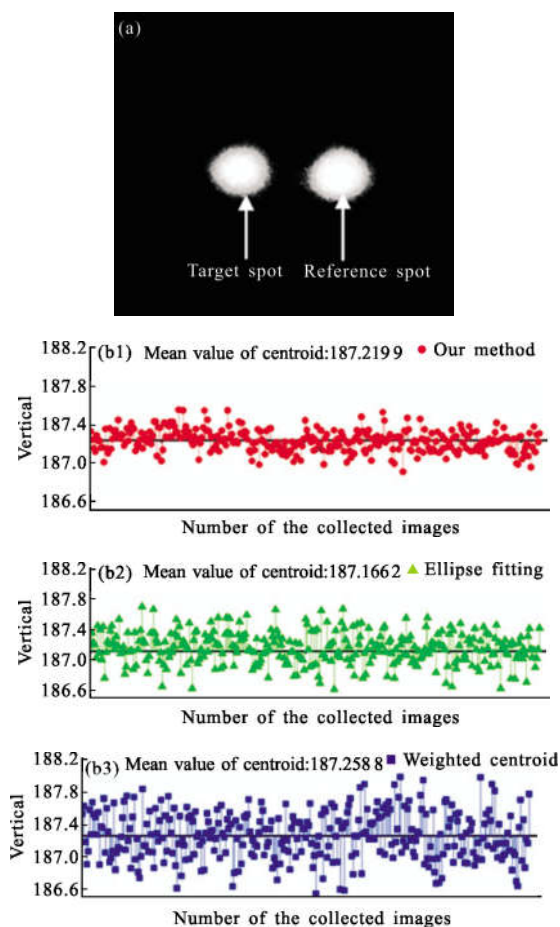


图 10 实验采集的图像(a)和光斑质心竖直方向变化量(b1)~(b3)

Fig.10 Experimental acquisition image (a) and the change of the spot center position in vertical direction (b1)~(b3)

从图 10(b1)~(b3)可以明显看出,加权质心法所提取的光斑质心的变动量最大,采用文中方法提取的光斑质心变化量最小,这是因为在该系统中,影响光斑质心提取的主要因素为噪声;由于所采用的方法不同,这也导致了每种方法提取光斑的质心会有一些的不同。而采用文中算法可以进行高稳定性的质心定位与提取,其中光斑位置偏差与角度测量之间的关系如公式(29)所示:

$$\delta = \arctan\left(\frac{\Delta n \cdot a}{f}\right) \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 3\ 600 \text{ 项} \quad (29)$$

式中: Δn 为光斑质心偏差量; a 为 CCD 像元尺寸; f 为系统的焦距。其中一个微弧度对应 0.15 个像素。表 1 给出了光斑质心在此竖直方向的变化情况和测角精度。

表 1 三种方法的实验结果

Tab.1 Experimental results of the three methods

	Root mean square error	
	Extraction accuracy/ pixel	Angle measurement accuracy/(")
Our method	0.125 3	0.172 3
Ellipse fitting method	0.218 1	0.299 9
Weighted centroid	0.315 2	0.433 4

鉴于 QTT 大型射电望远镜对该角度传感器技术要求的测角精度是优于 0.25",可以看出在现在的仪器硬件的基础上,只有文中算法的测角精度完成满足使用要求,而且还有一定的余量。因此文中所提出的光斑中心提取算法有其必要的实用性。

4 结 论

文中以项目所研制的光电角度传感器为基础,考虑到传感器的数量大的原因,因此无法从提升硬件上来提高传感器性能,只能通过软件算法来进行提升。文中根据光斑的成像原理,提取一种光斑基于三维反正切函数拟合的质心提取算法,首先通过仿真分析得到该算法的综合性能优于传统的椭圆拟合法和加权质心法,接着通过实验再次验证文中所提算法的可行性。最终采用该方法的光斑质心提取误差为 0.125 3 个像素,传感器的测角精度为 0.172 3",其测试结果优于技术要求。通过仿真和实验都证明

了文中算法的优越性。因此在需要对光斑质心进行定位的领域,文中算法具有重要的工程应用价值。

由于文中算法在拟合过程中采用的非线性最小二乘法,求解的速度会略慢,为了提高求解过程中收敛的速度,可采用灰度重心法先粗略地求出光斑的质心,进而再用文中方法求解到更加精确的光斑质心;或者是采用光斑切片,即采用公式(2)的求取方法,获得每个截面的质心,然后再通过这些光斑质心加权求得最终的整体光斑中心。

参考文献:

- [1] Kong Fanpeng, Manuel Cegarra Polo, Andrew Lambert. Centroid estimation for a Shack-Hartmann wavefront sensor based on stream processing [J]. *Applied Optics*, 2017, 56 (23): 6466-6475.
- [2] Grass David, Fesel Julian, Hofer Sebastian G, et al. Optical trapping and control of nanoparticles inside evacuated hollow core photonic crystal fibers [J]. *Applied Physics Letters*, 2016, 108(22): 1-8.
- [3] Xin Lei, Xu Lijun, Cao Zhang. Laser spot center location by using the gradient-based and least square algorithms [C]// IEEE International Instrumentation and Measurement Technology Conference, 2013: 1242-1245.
- [4] Werner F, Gdaniec N, Knopp T. First experimental comparison between the Cartesian and the Lissajous trajectory for magnetic particle imaging [J]. *Physics in Medicine & Biology*, 2017, 62(9): 3407-3421.
- [5] Jeremie Fish, Jan Scrimgeour. Fast weighted centroid algorithm for single particle localization near the information limit [J]. *Applied Optics*, 2015, 54(20): 6360-6366.
- [6] Qian Feng, Yang Mingyu, Zhang Xiaopei. Improvement of localization accuracy of spot centroid based on sequential images [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2016, 24(11): 2880-2888. (in Chinese)
- [7] Wang Dan, Liao Yanbiao, Zhang Min. Analysis of precisions of parameters calculated by ellipse fitting in double beam interferometer [J]. *Acta Optica Sinica*, 2016, 36(3): 105-110. (in Chinese)
王丹, 高廖延, 张敏. 双光束干涉仪中椭圆拟合估算的参数精度研究 [J]. *光学学报*, 2016, 36(3): 105-110.
- [8] Wang Lili, Hu Zhongwen, Ji Hangxin. Laser spot center location algorithm based on Gaussian fitting [J]. *Journal of Applied Optics*, 2012, 33(5): 987-990. (in Chinese)

- 王丽丽, 胡中文, 季杭馨. 基于高斯拟合的激光光斑中心定位算法[J]. 应用光学, 2012, 33(5): 987-990.
- [9] Tang Yanqin, Gu Guohua, Qian Weixian, et al. Laser spot center location algorithm of four-quadrant detector based on Gaussian distribution [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2017, 46(2): 0206003. (in Chinese)
唐艳琴, 顾国华, 钱惟贤, 等. 四象限探测器基于高斯分布的激光光斑中心定位算法 [J]. 红外与激光工程, 2017, 46(2): 0206003.
- [10] Wang Zhengzhou, Hu Bingliang, Yin Qinye, et al. Method for measuring laser spot center based on multi-dimensional reconstruction in integrated diagnostic system [J]. *Infrared and Laser Engineering*, 2015, 44(S1): 73-79. (in Chinese)
王拯洲, 胡炳樑, 殷勤业, 等. 综合诊断系统多维度重构小孔光斑中心测量方法 [J]. 红外与激光工程, 2015, 44(S1): 73-79.
- [11] Sun Huitao, Li Mugu. Fast and accurate detection of multi-scale light spot centers [J]. *Optics and Precision Engineering*, 2017, 25(5): 1348. (in Chinese)
孙慧涛, 李木国. 多尺度光斑中心的快速检测[J]. 光学精密工程, 2017, 25(5): 1348.
- [12] Sun Lihuan, Zhao Xiaoyang, Gao Lingyu, et al. Measurement of laser spot center position based on sub pixel positioning technology [J]. *Laser Technology*, 2017, 41(4): 011. (in Chinese)
孙立环, 赵霄洋, 高凌好, 等. 基于亚像素定位技术的激光光斑中心位置测量[J]. 激光技术, 2017, 41(4): 011.
- [13] Li Xiaotong, Cen Zhaofeng, Geometrical Optics, Aberrations and Optical Design [M]. Hangzhou: Zhejiang University Press, 2014. (in Chinese)
李晓彤, 岑兆丰. 几何光学. 像差. 光学设计[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2014.
- [14] Zhao Shubo, Li Liwei. Note about Gauss newton method [J]. *Natural Sciences Journal of Harbin Normal University*, 2016, 32(3): 6-10. (in Chinese)
赵淑波, 李立伟. 关于高斯牛顿法的注记 [J]. 哈尔滨师范大学(自然科学学报), 2016, 32(3): 6-10.
- [15] Wang Na. Xingjiang Qitai 110 m radio telescope [J]. *Scientia Sinica Physica: Mechanica & Astronomica*, 2014, 44(8): 783-794. (in Chinese)
王娜. 新疆奇台 110 m 射电望远镜 [J]. 中国科学: 物理学力学天文学, 2014, 44(8): 783-794.